Espaços Métricos
Interior e Fecho

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Segundo Semestre de 2022

Interior e Fecho

Definição (Interior e fecho)

Seja (X, ρ) um espaço métrico

(i) *O interior E^o de um conjunto $E \subset X$ é a união de todos os abertos de (X, ρ) contidos em E.*

(ii) *O fecho E^- de um conjunto $E \subset X$ é a interseção de todos os fechados de (X, ρ) contendo E. É claro que E é fechado se, e somente se, $E = E^-$.*

(iii) *Um conjunto $E \subset X$ é dito denso em X se $E^- = X$ e nunca denso se $E^{-o} = \emptyset$.*

(iv) *Um ponto $x \in E$ é dito um ponto de fronteira de E se $B_r(x) \cap E \neq \varnothing \neq B_r(x) \cap E^c$. O conjunto dos pontos de fronteira de E é denotado por ∂E.*

Exemplo

Seja (X, ρ) um espaço métrico

1. *O interior da bola fechada é sempre a bola aberta?*
2. *Pode ocorrer que $B_r(x)$ e $\bar{B}_r(x)$ coincidem?*

Solução:

1. **Não!** Basta tomar $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, com a métrica induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}^2$, e notar que $X = \bar{B}_1((0, 0))$ é aberto. Portanto $(\bar{B}_1((0, 0)))^o = \bar{B}_1((0, 0)) \neq B_1((0, 0))$.
2. **Sim!** Basta considerar um conjunto não vazio X qualquer com a métrica zero um. Já vimos que $B_r(x) = \bar{B}_r(x)$ para todo $x \in X$ e $r < 1$. No contra-exemplo do item 1. $B_r((0, 0)) = \bar{B}_r((0, 0))$, para todo $r > 1$.

Definição (Convergência de seqüências)

Seja (X,ρ) um espaço métrico. Uma seqüência em X é uma função $f:\mathbb{N}\to X$. Denotamos o valor de f em $n\in\mathbb{N}$ por x_n e f por $\{x_n\}$. Diremos que uma seqüência $\{x_n\}$ em (X,ρ) converge para $x\in X$ se, e somente se, a seqüência numérica $\{\rho(x_n,x)\}$ convergir para zero $(\rho(x_n,x)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0)$. Escreveremos

$$\boxed{x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x}$$

para denotar que $\{x_n\}$ converge para x.

Recorde que: Uma seqüência $\{r_n\}$ de números reais converge para $r\in\mathbb{R}$ se, e somente se, dado $\epsilon>0$, existir $n_\epsilon\in\mathbb{N}$, tal que

$$|r_n - r| < \epsilon, \qquad \text{para todo } n\geqslant n_\epsilon.$$

Proposição (1)

Se (X, ρ) *é um espaço métrico e* $E \subset X$*, são equivalentes:*

(1) $x \in E^{-}$

(2) $B_r(x) \cap E \neq \varnothing$*, para todo* $r > 0$,

(3) *existe uma seqüência* $\{x_n\}$ *em* E *tal que* $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Provaremos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

Prova: Se existir $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^c$ então $x \in E^{co}$. Como E^{coc} é fechado e contém E temos que $x \notin E^-$. Segue que, se $x \in E^-$, então $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$, para todo $r > 0$.

Se $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, ou $x \in E$ e tomamos $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $x \notin E$ e tomamos $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$, $x_n \neq x$, em ambos os casos $\{x_n\}$ converge para x.

Se existe uma seqüência $\{x_n\}$ em E, $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $x \notin E^-$, então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^{-c}$ e portanto $x_n \in E^{-c}$ para n grande o que é um absurdo. Segue que $x \in E^-$. $\square$

Definição (Pontos isolado e ponto de acumulação)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico.*

(a) *Um ponto* $x \in X$ *é chamado* **ponto de acumulação de** $E \subset X$ *se, e somente se,* $(B_r(x) \cap E) \backslash \{x\} \neq \varnothing$*, para todo* $r > 0$.

(b) *Um ponto* $x \in E \subset X$ *é chamado* **ponto isolado de** E *se, e somente se, existir* $r >$ *tal que* $B_r(x) \cap E = \{x\}$.

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se $E \subset X$, denotamos por E' (derivado de E) o conjunto dos pontos te acumulação de E. Então

(a) $E^{-} = E^{o} \cup \partial E$,

(b) $E^{-} = E \cup (\partial E \cap E')$ *e*

(c) $E^{o} = E \backslash \partial E$.

(d) ∂E *é fechada.*

Prova: Se $E \subset X$, então $X = E^o \cup \partial E \cup E^{co}$ com união disjunta.

Como $E^{coc} = E^o \cup \partial E$ é fechado e contém E, $E^- \subset E^0 \cup \partial E$.

Claramente $E^o \subset E \subset E^-$. Se $x \in \partial E$ e $x \notin E$, $B_r(x) \cap E \neq \varnothing$, $\forall\, r > 0$.

Seja $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$ e $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Logo $x \in E^-$ e $E^o \cup \partial E \subset E^-$.

Isto prova (a).

Note que $E \cup (\partial E \cap E') \subset E^-$. Se $x \in E^- \backslash E$, da Proposição 1 (3),

existe seqüência $\{x_n\}$ em E tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Logo $B_r(x) \cap E \neq \varnothing \neq B_r(x) \cap E^c$, $\forall\, r > 0$, e $x \in \partial E \cap E'$.

Disto segue que $E^- \subset E \cup (\partial E \cap E')$ e a prova (b) está completa.

É claro que $E \subset E^o \cup \partial E$. Isto prova (c).

A prova de (d) segue de $\partial E = (E^o \cup E^{co})^c$. $\square$