Espaços Métricos
Interior e Fecho
Aula 03

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

24 de Agosto de 2022

Segundo Semestre de 2022

Interior e Fecho

Definição (Interior e fecho)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico*

(i) *O interior* E^o *de um conjunto* $E \subset X$ *é a união de todos os abertos de* (X, ρ) *contidos em* E.

(ii) *O fecho* E^- *de um conjunto* $E \subset X$ *é a interseção de todos os fechados de* (X, ρ) *contendo* E. *É claro que* E *é fechado se, e somente se,* $E = E^-$.

(iii) *Um conjunto* $E \subset X$ *é dito denso em* X *se* $E^- = X$ *e nunca denso se* $E^{-o} = \emptyset$.

(iv) *Um ponto* $x \in E$ *é dito um ponto de fronteira de* E *se* $B_r(x) \cap E \neq \varnothing \neq B_r(x) \cap E^c$. *O conjunto dos pontos de fronteira de* E *é denotado por* ∂E.

Exemplo

Seja (X, ρ) um espaço métrico

1. *O interior da bola fechada é sempre a bola aberta?*
2. *Pode ocorrer que $B_r(x)$ e $\bar{B}_r(x)$ coincidem?*

Solução:

1. **Não!** Basta tomar $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, com a métrica induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}^2$, e notar que $X = \bar{B}_1((0,0))$ é aberto. Portanto $(\bar{B}_1((0,0)))^o = \bar{B}_1((0,0)) \neq B_1((0,0))$.
2. **Sim!** Basta considerar um conjunto não vazio X qualquer com a métrica zero um. Já vimos que $B_r(x) = \bar{B}_r(x)$ para todo $x \in X$ e $r < 1$. No contra-exemplo do item 1. $B_r((0,0)) = \bar{B}_r((0,0))$, para todo $r > 1$.

Definição (Convergência de seqüências)

Seja (X,ρ) *um espaço métrico. Uma seqüência em* X *é uma função* $f:\mathbb{N}\to X$. *Denotamos o valor de* f *em* $n\in\mathbb{N}$ *por* x_n *e* f *por* $\{x_n\}$. *Diremos que uma seqüência* $\{x_n\}$ *em* (X,ρ) *converge para* $x\in X$ *se, e somente se, a seqüência numérica* $\{\rho(x_n,x)\}$ *convergir para zero* $(\rho(x_n,x)\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0)$. *Escreveremos*

$$\boxed{x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x}$$

para denotar que $\{x_n\}$ *converge para* x.

Recorde que: Uma seqüência $\{r_n\}$ de números reais converge para $r\in\mathbb{R}$ se, e somente se, dado $\epsilon>0$, existir $n_\epsilon\in\mathbb{N}$, tal que

$$|r_n-r|<\epsilon, \qquad \text{para todo } n\geqslant n_\epsilon.$$

Proposição (1)

Se (X, ρ) é um espaço métrico e $E \subset X$, são equivalentes:

(1) $x \in E^-$

(2) $B_r(x) \cap E \neq \varnothing$, *para todo* $r > 0$,

(3) *existe uma seqüência* $\{x_n\}$ *em* E *tal que* $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Provaremos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

Prova: Se existir $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^c$ então $x \in E^{co}$. Como E^{coc} é fechado e contém E temos que $x \notin E^-$. Segue que, se $x \in E^-$, então $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$, para todo $r > 0$.

Se $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, ou $x \in E$ e tomamos $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $x \notin E$ e tomamos $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$, $x_n \neq x$, em ambos os casos $\{x_n\}$ converge para x.

Se existe uma seqüência $\{x_n\}$ em E, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ e $x \notin E^-$, então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^{-c}$ e portanto $x_n \in E^{-c}$ para n grande o que é um absurdo. Segue que $x \in E^-$. $\square$

Definição (Pontos isolado e ponto de acumulação)

Seja (X,ρ) *um espaço métrico.*

(a) *Um ponto* $x\in X$ *é chamado* **ponto de acumulação de** $E\subset X$ *se, e somente se,* $(B_r(x)\cap E)\backslash\{x\}\neq\varnothing$, *para todo* $r>0$.

(b) *Um ponto* $x\in E\subset X$ *é chamado* **ponto isolado de** E *se, e somente se, existir* $r>$ *tal que* $B_r(x)\cap E=\{x\}$.

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se $E \subset X$, denotamos por E' (derivado de E) o conjunto dos pontos te acumulação de E. Então

(a) $E^{-} = E^{o} \cup \partial E$,

(b) $E^{-} = E \cup (\partial E \cap E')$ *e*

(c) $E^{o} = E \backslash \partial E$.

(d) ∂E *é fechada.*

Prova: Se $E \subset X$, então $X = E^o \cup \partial E \cup E^{co}$ com união disjunta.

Como $E^{coc} = E^o \cup \partial E$ é fechado e contém E, $E^- \subset E^0 \cup \partial E$.

Claramente $E^o \subset E \subset E^-$. Se $x \in \partial E$ e $x \notin E$, $B_r(x) \cap E \neq \varnothing$, $\forall\, r > 0$.

Seja $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$ e $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Logo $x \in E^-$ e $E^o \cup \partial E \subset E^-$.

Isto prova (a).

Note que $E \cup (\partial E \cap E') \subset E^-$. Se $x \in E^- \backslash E$, da Proposição 1 (3), existe seqüência $\{x_n\}$ em E tal que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Logo $B_r(x) \cap E \neq \varnothing \neq B_r(x) \cap E^c$, $\forall\, r > 0$, e $x \in \partial E \cap E'$.

Disto segue que $E^- \subset E \cup (\partial E \cap E')$ e a prova (b) está completa.

É claro que $E \subset E^o \cup \partial E$. Isto prova (c).

A prova de (d) segue de $\partial E = (E^o \cup E^{co})^c$. $\square$

Distância entre conjuntos

Definição

Distância entre conjuntos Seja (X, ρ) um espaço métrico.

(a) *Seja $x \in X$ e $E \subset X$, a* **distância** *de x a E é definida por*

$$\mathrm{dist}(x, E) = \inf\{\rho(x, e) : e \in E\}.$$

(b) *Sejam $E, F \subset X$, a* **distância** *entre E e F é definida por*

$$\mathrm{dist}(E, F) = \inf\{\mathrm{dist}(e, F) : e \in E\},$$

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico e $E \subset X$. Então

$$|\mathrm{dist}(x, E) - \mathrm{dist}(y, E)| \leqslant \rho(x, y), \qquad \textit{para todo } x, y \in X.$$

Prova: Note que,

$$\mathrm{dist}(x, E) \leqslant \rho(x, e) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, e), \quad \forall\, e \in E.$$

Tomando o ínfimo, $\mathrm{dist}(x, E) \leqslant \rho(x, y) + \mathrm{dist}(y, E)$. De maneira idêntica obtemos também que $\mathrm{dist}(y, E) \leqslant \rho(x, y) + \mathrm{dist}(x, E)$. Logo

$$-\rho(x, y) \leqslant \mathrm{dist}(x, E) - \mathrm{dist}(y, E) \leqslant \rho(x, y)$$

e o resultado segue. $\square$

Corolário

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y), \quad \forall\, x, y, z \in X.$$

Definição (Vizinhança de um conjunto)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Dado $\epsilon > 0$, uma ϵ-vizinhança aberta de $\varnothing \neq E \subset X$ é o conjunto $\mathcal{O}_\epsilon(E)$ definido por

$$\mathcal{O}_\epsilon(E) := \{x \in X : \mathrm{dist}(x, E) < \epsilon\}.$$

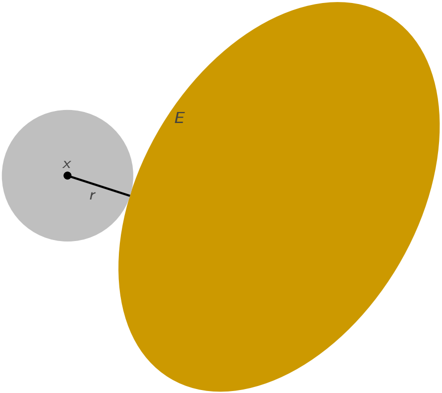
uma ϵ-vizinhança fechada de $E \subset X$ é o conjunto $\bar{\mathcal{O}}_\epsilon(E)$ definido por

$$\bar{\mathcal{O}}_\epsilon(E) := \{x \in X : \mathrm{dist}(x, E) \leqslant \epsilon\}.$$

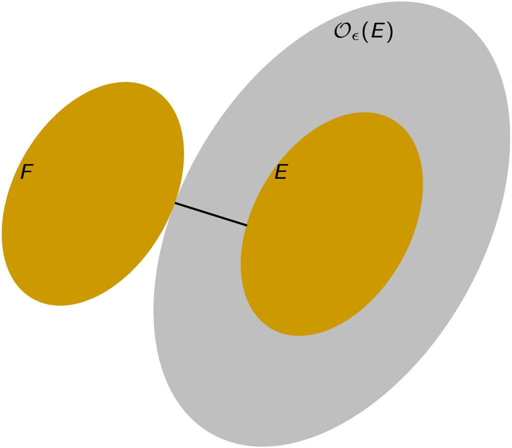
Exercício

Se (X, ρ) é um espaço métrico e $\varnothing \neq E \subset X$, mostre que $\bar{\mathcal{O}}_\epsilon(E)$ é fechado e que $\mathcal{O}_\epsilon(E) = \bigcup_{e \in E} B_\epsilon(e)$.

Note que, se $r = \mathrm{dist}(x, E)$, é raio da maior bola aberta centrada em x que não intersepta E.



A distância $\operatorname{dist}(E, F)$ entre dois conjuntos E e F é o raio da maior vizinhança aberta de E que não intersepta F. Note que $\operatorname{dist}(E, F) = \operatorname{dist}(F, E)$ (exercício).



Distância de Hausdorff

Definição (Distância de Hausdorff)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

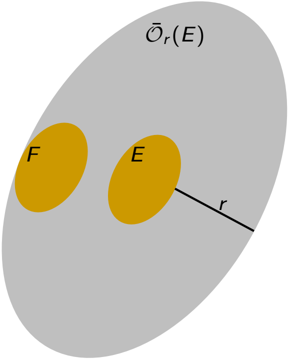
(a) *Sejam $E, F \subset X$, a* **semi-distância de Hausdorf** *entre E e F é definida por*

$$\delta_H(E, F) = \sup\{\mathrm{dist}(e, F) : e \in E\}$$

(b) *Sejam $E, F \subset X$, a* **distância de Hausdorf** *entre E e F é definida por*

$$\mathrm{dist}_H(E, F) = \max\{\delta_H(E, F), \delta_H(F, E)\}$$

A semi-distância de Hausdorff $\delta_H(F,E)$ entre dois conjuntos F e E é o raio da menor vizinhança fechada de E que contém F. Note que, em geral, $\delta_H(E,F) \neq \delta_H(F,E)$ (exercício).



Observe que, se $\delta_H(F,E)$ é pequeno, F está 'quase dentro de E'.

Exercício

Seja (X,ρ) um espaço métrico. Mostre que, se $\delta_H(F,E)=0$, então $F \subset E^-$.

Exemplo

Seja (X, ρ) *um espaço métrico. Considere o conjunto*

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é fechado e limitado}\}.$$

Defina $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ *por* $\rho_{\mathcal{F}}(F, G) = \mathrm{dist}_H(F, G)$. *Então,* $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ *é um espaço métrico.*

Solução: Sejam E, F e G subconjuntos fechados de X. Note que

(i) $\rho_{\mathcal{F}}(E, F) = \mathrm{dist}_H(E, F) = \delta_H(E, F) + \delta_H(F, E) = 0$ e, do exercício anterior, $E \subset F$ e $F \subset G$, logo $E = F$.

(ii) É claro da definição que $\rho_{\mathcal{F}}(E, F) = \rho_{\mathcal{F}}(F, E)$.

(iii) Resta mostrar que

$$\rho_{\mathcal{F}}(E, G) \leqslant \rho_{\mathcal{F}}(E, F) + \rho_{\mathcal{F}}(F, G)$$

Note que, se $e \in E$, $f \in F$ e $g \in G$,

$$\rho(e,g) \leqslant \rho(e,f) + \rho(f,g).$$

Tomando o ínfimo para $g \in G$, $\mathrm{dist}(e,G) \leqslant \rho(e,f) + \mathrm{dist}(f,G)$.
Como $\mathrm{dist}(f,G) \leqslant \delta_H(F,G)$, segue que

$$\mathrm{dist}(e,G) \leqslant \rho(e,f) + \delta_H(F,G).$$

Como o lado esquerdo não depende de f, tomando o ínfimo para $f \in F$ no lado direito resulta $\mathrm{dist}(e,G) \leqslant \mathrm{dist}(e,F) + \delta_H(F,G)$.
Agora, tomando o supremo para $e \in E$,

$$\delta_H(E,G) \leqslant \delta_H(E,F) + \delta_H(F,G) \leqslant \mathrm{dist}_H(E,F) + \mathrm{dist}_H(F,G).$$

Do mesmo modo $\delta_H(G,E) \leqslant \mathrm{dist}_H(E,F) + \mathrm{dist}_H(F,G)$ e

$$\mathrm{dist}_H(E,G) \leqslant \mathrm{dist}_H(E,F) + \mathrm{dist}_H(F,G). \quad \square$$

Definição

Uma pseudo-métrica ou semi-distância em um conjunto não vazio X é uma função $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tal que (i) $\rho(x,x) = 0$, (ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ e (iii) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$, para todo $x, y, z \in X$.

Exercício

Seja (X, ρ) um espaço métrico limitado. Considere o conjunto

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é fechado}\}.$$

Defina $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ por $\rho_{\mathcal{F}}(F,G) = \delta_H(F,G)$. Então, $\rho_{\mathcal{F}}$ satisfaz (i) e (iii) mas não satisfaz (ii) da defincão acima. Mostre ainda que, $\rho_{2^X} : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+$ definida por $\rho_{2^X}(A,B) = \mathrm{dist}_H(A,B)$, $A, B \subset X$ é uma pseudo-métrica.