

ESPAÇOS MÉTRICOS

Abertos e Fechados

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Segundo Semestre de 2022

Abertos e fechados

Vamos estudar alguns subconjuntos especiais de um espaço métrico. Começamos com as bolas abertas

Definição (bola aberta)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Dados $x \in X$ e $r > 0$, o conjunto

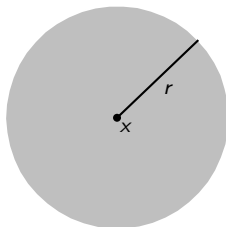
$$B_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

é chamado **bola aberta** de centro em x e raio r e o conjunto

$$\bar{B}_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

é chamado **bola fechada** de centro em x e raio r .

Embora, frequentemente, representemos a bola aberta como na figura abaixo, é preciso tomar o cuidado de não utilizar a representação geométrica para tirar conclusões.



No que se segue, vamos exibir alguns exemplos para enfatizar a necessidade dos cuidados mencionados acima.

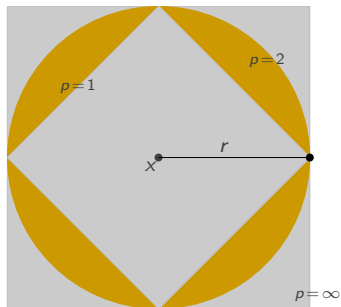
Observação

No *Exemplo (3)*, com $N=2$, isto é, (\mathbb{R}^2, ρ_p) onde

$$\rho_p(x, y) = ((x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

temos as seguintes representações para as bolas de centro em $x \in \mathbb{R}^2$ e raio r , com $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$.



Observação

Se considerarmos o *Exemplo (1)*, isto é, um conjunto não vazio X e a métrica dada por $\rho(x, x) = 0$ e $\rho(x, y) = 1$ se $x \neq y$, então

$$\begin{aligned} \bar{B}_r(x) &= \{x\}, \quad \text{se } r < 1, & B_1(x) &= \{x\}, \\ \bar{B}_1(x) &= X \quad \text{e} & B_r(x) &= X, \quad \text{se } r > 1. \end{aligned}$$

Observação

Considere $X = \mathbb{R}$ com a métrica usual, isto é, $\rho(x, y) = |x - y|$, então $B_1(0) = (-1, 1)$ e, se considerarmos $X = [0, 2]$, com métrica induzida pela métrica usual de \mathbb{R} , então $B_1(0) = [0, 1)$.

Definição (conjuntos limitados)

Dado um subconjunto M de um espaço métrico (X, ρ) o seu **diâmetro** $\text{diam}(M)$ é definido por

$$\text{diam}(M) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in M\}.$$

Diremos que M é limitado se $\text{diam}(M)$ é finito e que M é ilimitado caso contrário.

Observe que a noção de subconjunto limitado é uma função da métrica. Com a métrica do [Exemplo \(1\)](#), X é limitado. Por outro lado \mathbb{R}^n com as métricas definidas no [Exemplo \(3\)](#) possui diversos subconjuntos ilimitados.

Exemplo (6)

A função

$$\tilde{\rho}_p(x, y) = \frac{\|x - y\|_p}{1 + \|x - y\|_p}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

é uma métrica em \mathbb{R}^n .

De fato: Note que a função $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ é crescente. Como $\|x - y\|_p \leq \|x - z\|_p + \|z - y\|_p$ segue que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_p(x, y) &= f(\|x - y\|_p) = \frac{\|x - y\|_p}{1 + \|x - y\|_p} \\
 &\leq f(\|x - z\|_p + \|z - y\|_p) = \frac{\|x - z\|_p + \|z - y\|_p}{1 + \|x - z\|_p + \|z - y\|_p} \\
 &= \frac{\|x - z\|_p}{1 + \|x - z\|_p + \|z - y\|_p} + \frac{\|z - y\|_p}{1 + \|x - z\|_p + \|z - y\|_p} \\
 &\leq \frac{\|x - z\|_p}{1 + \|x - z\|_p} + \frac{\|z - y\|_p}{1 + \|z - y\|_p} \\
 &= f(\|x - z\|_p) + f(\|z - y\|_p) = \tilde{\rho}_p(x, z) + \tilde{\rho}_p(z, y). \quad \square
 \end{aligned}$$

Observação

Todo subconjunto do espaço métrico $(\mathbb{R}^n, \tilde{\rho}_p)$ é limitado. De fato, neste espaço métrico, $B_1(0) = \mathbb{R}^n$. Desta forma, a noção de limitação está fortemente associada à métrica. Apesar disso, como veremos mais tarde, a métrica ρ_p do Exemplo (3) da aula passada e a métrica $\tilde{\rho}_p$ do exemplo anterior (Exemplo (3-Métrica Limitada)) induzem a mesma topologia.

Exercício

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Defina $\hat{\rho} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$\hat{\rho}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Mostre que $\hat{\rho}$ é uma métrica em X .

Alerta!

Vamos precisar tomar muito cuidado para não utilizar argumentos geométricos nas demonstrações. Todos os detalhes, ainda que inspirados por argumentos geométricos, precisarão ser verificados analiticamente.

Exercício

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Mostre que:

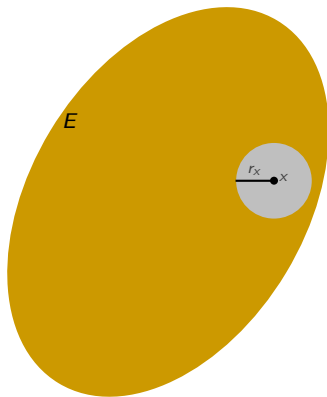
1. Um subconjunto E de X é limitado se, e somente se, existir $R > 0$ e $x \in X$ tal que $E \subset B_R(x)$.
2. Se $E \subset X$ é limitado e não vazio, $\text{diam}(E) = \inf\{r > 0 : E \subset B_r(x), \text{ para todo } x \in E\}$.

Definição (abertos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Um subconjunto E de X ($E \subset X$) será dito aberto em (X, ρ) se, para cada $x \in E$, existir $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset E$.

A representação geométrica desta definição será

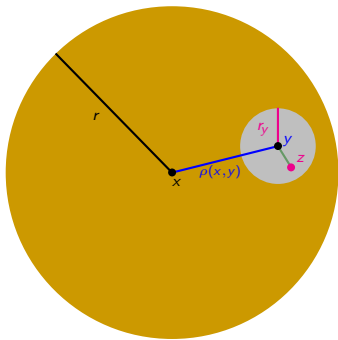


Proposição (propriedades dos abertos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então,

- (a) X e \emptyset são abertos.
- (b) Dados $x \in X$ e $r > 0$ a bola aberta $B_r(x)$ é um conjunto aberto.
- (c) A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- (d) A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Prova: A prova de (a) é imediata. Vamos fazer a prova de (b).



Dado $y \in B_r(x)$ escolha $r_y < r - \rho(x, y)$. Assim, se $z \in B_{r_y}(y)$ temos que

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + r_y < r.$$

Isto mostra que $B_{r_y}(y) \subset B_r(x)$ e que $B_r(x)$ é aberta.

Prova de (c). Seja I um conjunto de índices qualquer e $\{E_i : i \in I\}$ uma coleção de subconjuntos de X onde cada E_i é aberto. Se $E := \bigcup_{i \in I} E_i$, dado $x \in E$, existe $i \in I$ tal que $x \in E_i$.

Como E_i é aberto, existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset E_i \subset E$. Segue que E é aberto.

Prova de (d). Seja $N \in \mathbb{N}^*$ e $E_i, i = 1, \dots, N$, abertos de X .

Então, se $x \in E := \bigcap_{i=1}^N E_i$, então $x \in E_i$ para todo $i = 1, \dots, N$.

Como E_i é aberto, para cada i , existe $r_x^i > 0$ tal que $B_{r_x^i}(x) \subset E_i$.

Tomando $r_x = \min\{r_x^i : i = 1, \dots, N\}$ temos que $B_{r_x}(x) \subset E_i$,

para todo $i = 1, \dots, N$. Logo $B_{r_x}(x) \subset E$ e E é aberto. \square

Dado um conjunto X e $E \subset X$ o complementar de E em X é o conjunto $E^c = \{x \in X : x \notin E\}$.

Definição (fechados)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Um subconjunto F de X ($F \subset X$) será dito **fechado em (X, ρ)** se F^c é aberto em (X, ρ) .

Recorde, se I é um conjunto de índices qualquer e $\{E_i : i \in I\}$ é uma coleção de conjuntos, então valem as **leis de deMorgan**, isto é,

$$\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} E_i^c \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} E_i^c.$$

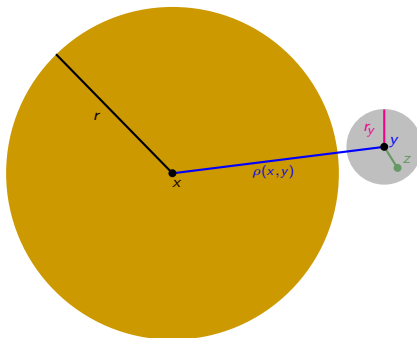
Disto, da Definição 4 e da Proposição 1 obtemos, facilmente, o resultado a seguir (exercício).

Proposição (propriedades dos fechados)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então,

- (a) X e \emptyset são fechados.
- (b) Dados $x \in X$ e $r > 0$ a bola fechada $\bar{B}_r(x)$ é fechada.
- (c) A interseção qualquer de fechados é fechada.
- (d) A união de um número finito de fechados é fechada.

Faremos apenas a prova de (b) pois (a), (c) e (d) são corolários imediatos das propriedades dos abertos e das **Leis de deMorgan**.



Para concluir que $\bar{B}_r(x)$ é fechado, mostremos que $(\bar{B}_r(x))^c$ é aberto.

Se $y \notin \bar{B}_r(x)$, então $\rho(x, y) > r$. Escolha $0 < r_y < \rho(x, y) - r$. Se $z \in B_{r_y}(y)$, da desigualdade triangular,

$$\rho(x, z) \geq \rho(x, y) - \rho(z, y) \geq \rho(x, y) - r_y > r.$$

Logo $z \notin \bar{B}_r(x)$ e $B_{r_y}(y) \subset (\bar{B}_r(x))^c$. Segue que $(\bar{B}_r(x))^c$ é aberto.