Espaços Métricos
Mais Exemplos, Abertos e Fechados
Aula 02

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

22 de Agosto de 2022

Segundo Semestre de 2022

Exemplos - Continuação

Sejam, $\mathbb{N} \ni N \geq 2$ e (X_i, ρ_i) espaços métricos, $1 \leqslant i \leqslant N$. O produto carteziano

$$\boxed{Z = \prod_{i=1}^{N} X_i}$$

é o conjunto das $N-$uplas ordenadas $z = (x_1, \cdots, x_N)$ com $x_i \in X_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$.

Exemplo (4)

Fixado $p \in [1, \infty]$, *no produto cartesiano* $Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$ *podemos definir uma métrica fazendo*

$$\rho_p(z, z') = \left[\sum_{i=1}^{N} (\rho_i(x_i, x_i'))^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty \quad e \tag{1}$$

$$\rho_\infty(z, z') = \max\{\rho_i(x_i, x_i') : 1 \leqslant i \leqslant N\},$$

onde $z = (x_1, \cdots, x_N)$ *e* $z' = (x_1', \cdots, x_N')$ *são dois elementos quaisquer de* Z. *O espaço métrico* (Z, ρ_p) *é chamado* **espaço produto** *de* (X_i, ρ_i), $1 \leqslant i \leqslant N$.

Exercício

Sejam, $\mathbb{N} \ni N \geq 2$ *e* (X_i, ρ_i) *espaços métricos,* $1 \leqslant i \leqslant N$*,* $Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$ *e* $p \in [1, \infty]$*. Recorde o que fizemos no Exemplo (3) da aula passada e mostre que*

$$\rho_p : Z \times Z \to \mathbb{R}^+$$

é uma métrica.

Definição

Seja X *um conjunto não vazio e* $\rho, \tilde{\rho} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *duas métricas em* X. *Diremos que* ρ *e* $\tilde{\rho}$ *são métricas equilvalentes se existirem constantes* $k > 0$ *e* $\tilde{k} > 0$ *tais que*

$$\rho(x,y) \leqslant \tilde{k}\,\tilde{\rho}(x,y) \leqslant k\,\rho(x,y), \quad \textit{para todo } x,y \in X.$$

Exercício

Sejam, $\mathbb{N} \ni N \geq 2$ *e* (X_i, ρ_i) *espaços métricos,* $1 \leqslant i \leqslant N$, $Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$, $p \in [1, \infty]$ *e* $\rho_p : Z \times Z \to \mathbb{R}^+$ *a métrica definida em* (1). *Mostre que , para todo* $z, z' \in Z$ *e* $p \in (1, \infty)$,

$$\rho_\infty(z, z') \leqslant \rho_p(z, z') \leqslant \rho_1(z, z') \leqslant N\rho_\infty(z, z').$$

Ou seja, todas as métricas ρ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *no espaço produto* Z *são equivalentes. Mostre também que, para cada par* $z, z' \in Z$,

$$\lim_{p \to \infty} \rho_p(z, z') = \rho_\infty(z, z').$$

Exemplo (5)

Seja (X, ρ) *um epaço métrico e* $M \subset X$*. De maneira natural,* ρ *restrita a* $M \times M$ *define uma métrica* $\rho_M = \rho_{|_{M \times M}}$ *em* M*.*

Quando fazemos isto M *é chamado subespaço métrico de* X *e* ρ_M *é chamada métrica induzida em* M *pela métrica de* X*.*

Exercício

Seja

$$\ell_p = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (ou\ \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \ e$$

$$\ell_\infty = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (ou\ \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$$

Em ℓ_p, definimos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ se\ 1 \leqslant p < \infty \ e \ \|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se $\rho_p : \ell_p \times \ell_p \to [0, \infty)$ é definida por $\rho_p(x,y) = \|x - y\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, mostre que (ℓ_p, ρ_p) é um espaço métrico.

Exercício

Seja $X = C([a,b],\mathbb{R})$ *o conjunto das funções contínuas definidas em* $[a,b]$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$. *Em* X *defina a* **métrica da convergência uniforme**

$$\rho(x,y) = \|x-y\|_\infty, \quad x,y \in C([a,b],\mathbb{R}),$$

onde $\|\cdot\|_\infty : X \to \mathbb{R}^+$ *é definda por* $\|\xi\|_\infty = \sup\{|\xi(t)| : t \in [a,b]\}$, *para todo* $\xi \in C([a,b],\mathbb{R})$. *Mostre que* $\|\cdot\|_\infty : X \to \mathbb{R}^+$ *é uma norma.*

Abertos e fechados

Vamos estudar alguns subconjuntos especiais de um espaço métrico. Começamos com as bolas abertas

Definição (bola aberta)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico. Dados* $x \in X$ *e* $r > 0$, *o conjunto*

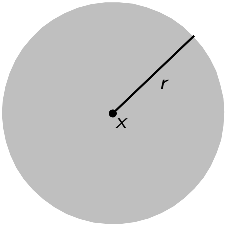
$$B_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

é chamado **bola aberta** *de centro em* x *e raio* r *e o conjunto*

$$\bar{B}_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) \leqslant r\}$$

é chamado **bola fechada** *de centro em* x *e raio* r.

Embora, frequentemente, representemos a bola aberta como na figura abaixo, é preciso tomar o cuidado de não utilizar a representação geométrica para tirar conclusões.



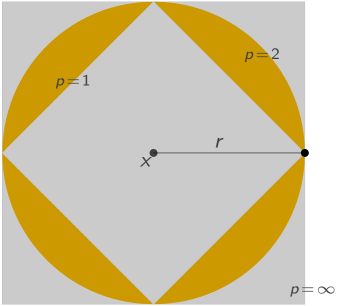
No que se segue, vamos exibir alguns exemplos para enfatizar a necessidade dos cuidados mencionados acima.

Observação

No Exemplo (3), com $N = 2$*, isto é,* $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$ *onde*

$$\rho_p(x,y) = ((x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad se\ 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\rho_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

temos as seguintes representações para as bolas de centro em $x \in \mathbb{R}^2$ *e raio* r*, com* $p = 1$*,* $p = 2$ *e* $p = \infty$*.*



Observação

Se considerarmos o Exemplo (1), isto é, um conjunto não vazio X e a métrica dada por $\rho(x,x) = 0$ e $\rho(x,y) = 1$ se $x \neq y$, então

$$\bar{B}_r(x) = \{x\}, \quad se\ r < 1, \quad B_1(x) = \{x\},$$
$$\bar{B}_1(x) = X \ \ e \ \ B_r(x) = X, \quad se\ r > 1.$$

Observação

Considere $X = \mathbb{R}$ com a métrica usual, isto é, $\rho(x,y) = |x-y|$, então $B_1(0) = (-1,1)$ e, se considerarmos $X = [0,2]$, com métrica induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}$, então $B_1(0) = [0,1)$.

Definição (conjuntos limitados)

Dado um subconjunto M de um espaço métrico (X, ρ) o seu **diâmetro** $\mathrm{diam}(M)$ *é definido por*

$$\mathrm{diam}(M) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in M\}.$$

Diremos que M é limitado se $\mathrm{diam}(M)$ é finito e que M é ilimitado caso contrário.

Observe que a noção de subconjunto limitado é uma função da métrica. Com a métrica do Exemplo (1), X é limitado. Por outro lado $\mathbb{R}^n$ com as métricas definidas no Exemplo (3) possui diversos subconjuntos ilimitados.

Exemplo (6)

A função

$$\boxed{\tilde{\rho}_p(x, y) = \frac{\|x - y\|_p}{1 + \|x - y\|_p}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n}$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

De fato: Note que a função $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ é crescente. Como $\|x-y\|_p \leqslant \|x-z\|_p + \|z-y\|_p$ segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_p(x,y) &= f(\|x-y\|_p) = \frac{\|x-y\|_p}{1+\|x-y\|_p} \\
&\leqslant f(\|x-z\|_p + \|z-y\|_p) = \frac{\|x-z\|_p + \|z-y\|_p}{1+\|x-z\|_p + \|z-y\|_p} \\
&= \frac{\|x-z\|_p}{1+\|x-z\|_p + \|z-y\|_p} + \frac{\|z-y\|_p}{1+\|x-z\|_p + \|z-y\|_p} \\
&\leqslant \frac{\|x-z\|_p}{1+\|x-z\|_p} + \frac{\|z-y\|_p}{1+\|z-y\|_p} \\
&= f(\|x-z\|_p) + f(\|z-y\|_p) = \tilde{\rho}_p(x,z) + \tilde{\rho}_p(z,y). \quad \square
\end{aligned}$$

Observação

Todo subconjunto do espaço métrico $(\mathbb{R}^n, \tilde{\rho}_p)$ *é limitado. De fato, neste espaço métrico,* $B_1(0) = \mathbb{R}^n$*. Desta forma, a noção de limitação está fortemente associada à métrica. Apesar disso, como veremos mais tarde, a métrica* ρ_p *do Exemplo (3) da aula passada e a métrica* $\tilde{\rho}_p$ *do exemplo anterior (Exemplo (3-Métrica Limitada)) induzem a mesma topologia.*

Exercício

Seja (X,ρ) *um espaço métrico. Defina* $\hat{\rho}: X \times X \to \mathbb{R}^+$ *por*

$$\hat{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \quad x, y \in X.$$

Mostre que $\hat{\rho}$ *é uma métrica em* X.

Alerta !

Vamos precisar tomar muito cuidado para não utilizar argumentos geométricos nas demonstrações. Todos os detalhes, ainda que inspirados por argumentos geométricos, precisarão ser verificados analiticamente.

Exercício

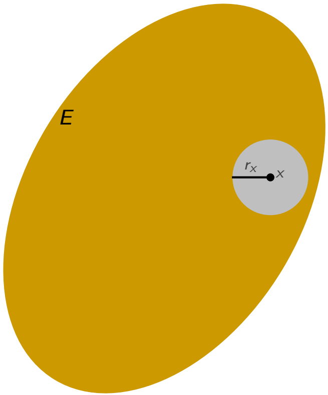
Seja (X, ρ) *um espaço métrico. Mostre que:*

1. *Um subconjunto* E *de* X *é limitado se, e somente se, existir* $R > 0$ *e* $x \in X$ *tal que* $E \subset B_R(x)$.
2. *Se* $E \subset X$ *é limitado e não vazio,* $\mathrm{diam}(E) = \inf\{r > 0 : E \subset B_r(x),\ \textit{para todo } x \in E\}$.

Definição (abertos)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico.*
Um subconjunto E *de* X $(E \subset X)$ *será dito aberto em* (X, ρ) *se, para cada* $x \in E$, *existir* $r_x > 0$ *tal que* $B_{r_x}(x) \subset E$.

A representação geométrica desta definição será



Proposição (propriedades dos abertos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então,

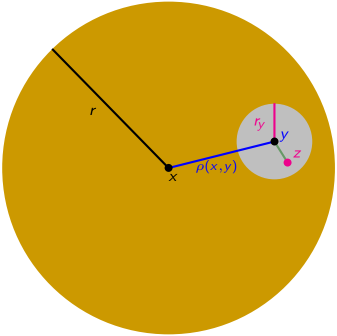
(a) *X e $\varnothing$ são abertos.*

(b) *Dados $x \in X$ e $r > 0$ a bola aberta $B_r(x)$ é um conjunto aberto.*

(c) *A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

(d) *A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Prova: A prova de (a) é imediata. Vamos fazer a prova de (b).



Dado $y \in B_r(x)$ escolha $r_y < r - \rho(x,y)$. Assim, se $z \in B_{r_y}(y)$ temos que

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) < \rho(x,y) + r_y < r.$$

Isto mostra que $B_{r_y}(y) \subset B_r(x)$ e que $B_r(x)$ é aberta.

Prova de (c). Seja I um conjunto de índices qualquer e $\{E_i : i \in I\}$ uma coleção de subconjuntos de X onde cada E_i é aberto. Se $E := \bigcup_{i \in I} E_i$, dado $x \in E$, existe $i \in I$ tal que $x \in E_i$. Como E_i é aberto, existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset E_i \subset E$. Segue que E é aberto.

Prova de (d). Seja $N \in \mathbb{N}^*$ e E_i, $i = 1, \cdots, N$, abertos de X. Então, se $x \in E := \bigcap_{i=1}^{N} E_i$, então $x \in E_i$ para todo $i = 1, \cdots, N$. Como E_i é aberto, para cada i, existe $r_x^i > 0$ tal que $B_{r_x^i}(x) \subset E_i$. Tomando $r_x = \min\{r_x^i : i = 1, \cdots, N\}$ temos que $B_{r_x}(x) \subset E_i$, para todo $i = 1, \cdots, N$. Logo $B_{r_x}(x) \subset E$ e E é aberto. $\square$

Dado um conjunto X e $E \subset X$ o complementar de E em X é o conjunto $E^c = \{x \in X : x \notin E\}$.

Definição (fechados)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Um subconjunto F de X ($F \subset X$) será dito fechado em (X, ρ) se F^c é aberto em (X, ρ).

Recorde, se I é um conjunto de índices qualquer e $\{E_i : i \in I\}$ é uma coleção de conjuntos, então valem as **leis de deMorgan**, isto é,

$$\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} {E_i}^c \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} {E_i}^c.$$

Disto, da Definição 5 e da Proposição 1 obtemos, facilmente, o resultado a seguir (exercício).

Proposição (propriedades dos fechados)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico. Então,*

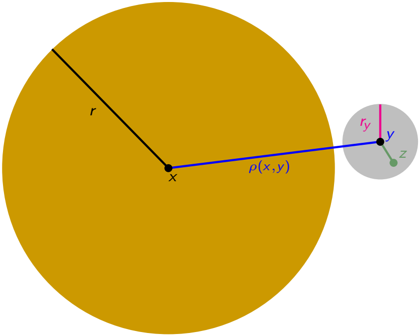
(a) *X e $\varnothing$ são fechados.*

(b) *Dados $x \in X$ e $r > 0$ a bola fechada $\bar{B}_r(x)$ é fechada.*

(c) *A interseção qualquer de fechados é fechada.*

(d) *A união de um número finito de fechados é fechada.*

Faremos apenas a prova de (b) pois (a), (c) e (d) são corolários imediatos das propriedades dos abertos e das **Leis de deMorgan**.



Para concluir que $\bar{B}_r(x)$ é fechado, mostremos que $(\bar{B}_r(x))^c$ é aberto.

Se $y \notin \bar{B}_r(x)$, então $\rho(x,y) > r$. Escolha $0 < r_y < \rho(x,y) - r$. Se $z \in B_{r_y}(y)$, da desigualdade triangular,

$$\rho(x,z) \geq \rho(x,y) - \rho(z,y) \geq \rho(x,y) - r_y > r.$$

Logo $z \notin \bar{B}_r(x)$ e $B_{r_y}(y) \subset (\bar{B}_r(x))^c$. Segue que $(\bar{B}_r(x))^c$ é aberto.