Espaços Métricos
Definição e Exemplos

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Segundo Semestre de 2022

Definições e Exemplos

Começamos com a definição de espaço métrico.

Recorde que, se X é um conjunto não vazio, $X \times X$ denota o conjunto dos pares ordenados (x, y) de elementos de X, isto é,

$$X \times X = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in X\}.$$

Definição

Seja X um conjunto não vazio. Uma **métrica ou distância** *em X é uma função $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ satisfazendo*

$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$, *para todo* $x, y \in X$,

$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$, *para todo* $x, y, z \in X$.

O conjunto X munido da métrica ρ é chamado espaço métrico e é denotado por (X, ρ).

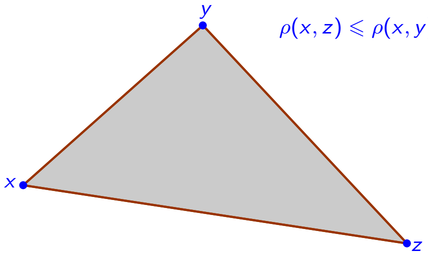
Uma métrica ρ em X associa a cada par ordenado de elementos de X a distância entre eles.

Os axiomas que definem uma métrica capturam as propriedades essenciais da noção intuitiva de distância.

A terceira propriedade da métrica é conhecida como

desigualdade triangular

e estabelece que: o comprimento de um dos lados de um triângulo sempre não excede a soma dos comprimentos dos demais lados.



$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

Quando não houver possiblidade de dúvida nos referiremos ao espaço métrico (X,ρ) simplesmente por X. Muitas vezes nos referiremos aos elementos de um espaço métrico como pontos.

Exemplo (1)

Se X é um conjunto não vazio definimos $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq y \\ 0, & se\ x = y. \end{cases}$$

A função ρ é uma métrica chamada **métrica discreta** *e (X, ρ) é um espaço métrico.*

De fato: $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ está bem definida e é imediato, da definição de ρ, que

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x), \text{ para todo } x, y \in X,$$

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z), \text{ para todo } x, y, z \in X.$$

Definição (Norma)

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma **norma** *em V é uma função $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ que satizfaz as seguinte propriedades*

$\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0,$

$\|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V$ *e*

$\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$, *para todo $v, w \in V$.*

Definição

Um espaço vetorial V munido de uma norma é chamado **espaço vetorial normado**, *isto é, um espaço vetorial normado é um par $(V, \|\cdot\|_V)$ onde $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ é uma norma.*

Exemplo (2)

É imediato que, se $(V, \|\cdot\|_V)$ *é um espaço vetorial normado e* $\rho_V : V \times V \to \mathbb{R}^+$ *é definida por* $\rho_V(v, w) = \|v - w\|_V$*, então* (V, ρ_V) *é um espaço métrico (exercício).*

Neste caso diremos que a métrica é proveniente da norma e **todo espaço vetorial normado é um espaço métrico** *com a métrica proveniente da norma.*

Exemplo (3)

Para $p \in [1, \infty]$, *seja* $(\mathbb{R}^N, \rho_p)$, *com* $\rho_p(x, y) := \|x - y\|_p$, $x, y \in \mathbb{R}^N$, *onde*

$$\|\xi\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|\xi\|_\infty = \sup\{|\xi_i| : 1 \leqslant i \leqslant N\}, \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Então $(\mathbb{R}^N, \rho_p)$ *é um espaço métrico,* $1 \leq p \leqslant \infty$.

Prova: Vamos apenas fazer os casos $1 < p < \infty$. Os casos remanescentes são mais simples e a sua prova será deixada para o leitor. Basta mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma. É claro da definição de ρ_p que

$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e que

$\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Resta mostrar que $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Para este fim, primeiramente, vamos necessitar provar alguns resultados auxiliares.

Desigualdade de Young

Lema (Desigualdade de Young)

Se $p \in (1, \infty)$, $q \in (1, \infty)$ é tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b \in [0, \infty)$, então

$$\boxed{a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.}$$

Prova: Suponha que $b > 0$ (o caso $b = 0$ é trivial). A desigualdade acima pode então ser reescrita da seguinte forma

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{q}$$

fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$, obtemos

$$t^{\alpha} \leqslant \alpha t + 1 - \alpha$$

Logo, basta mostrar que, para todo $\alpha \in (0,1)$, a função $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \alpha t - t^{\alpha} + 1 - \alpha$, satisfaz

$$f(t) \geq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^{+}.$$

$f(t) = \alpha t - t^{\alpha} + 1 - \alpha$

De fato,

$$f'(t) = \alpha(1 - t^{\alpha-1}) \begin{cases} < 0, & \text{se } t \in [0,1) \\ = 0, & \text{se } t = 1 \\ > 0, & \text{se } t \in (1,\infty). \end{cases}$$

Desta forma, $t = 1$ é um ponto de mínimo global para f e $f(1) = 0$, mostrando o resultado. $\square$

Desigualdade de Hölder

Lema (Desigualdade de Hölder)

Se $p \in (1, \infty)$ *e* $q \in (1, \infty)$ *é tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *então*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right]^{\frac{1}{q}},}$$

para todo $x = (x_1, \cdots, x_N), y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$.

Prova: Se $x = 0$ ou $y = 0$ a desigualdade é trivial. Suponha que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Fazendo

$$a_j = \frac{|x_j|^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p} \quad \text{e} \quad b_j = \frac{|y_j|^q}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q},$$

e aplicando a Desigualdade de Young obtemos

$$a_j^{\frac{1}{p}} b_j^{\frac{1}{q}} = \frac{|x_j y_j|}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} a_j + \frac{1}{q} b_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

notando que $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_j = \sum_{j=1}^{N} b_j = 1$, obtemos

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |x_j y_j|}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

e o resultado segue. $\square$

Observação

Esta desigualdade é chamada Desigualdade de Cauchy-Schwarz, se $p=2$*. Recorde a prova da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e compare com a prova acima.*

Desigualdade de Minkowski

Lema (Desigualdade de Minkowski)

Se $p \in [1, \infty]$, *então*

$$\left[\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

para todo $x = (x_1, \cdots, x_N), y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$.

Prova: Os casos $p = 1, \infty$ são triviais (exercício). Se $p \in (1, \infty)$, é claro que

$$\left[\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Agora,

$$(|x_i| + |y_i|)^p = (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|x_i| + (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|y_i|$$

e, somando as igualdades acima,

$$\sum_{i=1}^{N} (|x_i| + |y_i|)^p = \sum_{i=1}^{N} (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{N} (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|y_i|.$$

Agora, usando a Desigualdade de Hölder e notando que $(p-1)q = p$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{p-1}|x_i| &\leqslant \left[\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}|\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{p}|\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{p-1}|y_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{p}|\right]^{\frac{1}{q}}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^p \leqslant \left[\left[\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^p|\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Disto segue que, se $\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^p \neq 0$ (o caso restante é trivial),

$$\left[\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

e a prova está completa.$\square$

Sejam, $\mathbb{N} \ni N \geq 2$ e (X_i, ρ_i) espaços métricos, $1 \leqslant i \leqslant N$. O produto carteziano

$$Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$$

é o conjunto das $N-$uplas ordenadas $z = (x_1, \cdots, x_N)$ com $x_i \in X_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$.

Espaço produto

Exemplo (4)

Fixado $p \in [1, \infty]$, no produto cartesiano $Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$ podemos definir uma métrica fazendo

$$\rho_p(z, z') = \left[\sum_{i=1}^{N} (\rho_i(x_i, x_i'))^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty \quad e \tag{1}$$

$$\rho_\infty(z, z') = \max\{\rho_i(x_i, x_i') : 1 \leqslant i \leqslant N\},$$

onde $z = (x_1, \cdots, x_N)$ e $z' = (x_1', \cdots, x_N')$ são dois elementos quaisquer de Z. O espaço métrico (Z, ρ_p) é chamado **espaço produto** *de (X_i, ρ_i), $1 \leqslant i \leqslant N$.*

Exercício

Sejam, $\mathbb{N} \ni N \geq 2$ *e* (X_i, ρ_i) *espaços métricos,* $1 \leqslant i \leqslant N$*,* $Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$ *e* $p \in [1, \infty]$*. Recorde o que fizemos no Exemplo 3 e mostre que*

$$\rho_p : Z \times Z \to \mathbb{R}^+$$

é uma métrica.

Definição

Seja X *um conjunto não vazio e* $\rho, \tilde{\rho} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *duas métricas em* X*. Diremos que* ρ *e* $\tilde{\rho}$ *são métricas equilvalentes se existirem constantes* $k > 0$ *e* $\tilde{k} > 0$ *tais que*

$$\rho(x, y) \leqslant \tilde{k}\, \tilde{\rho}(x, y) \leqslant k\, \rho(x, y), \quad \textit{para todo } x, y \in X.$$

Exercício

Sejam, $\mathbb{N} \ni N \geq 2$ *e* (X_i, ρ_i) *espaços métricos,* $1 \leqslant i \leqslant N$, $Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$, $p \in [1, \infty]$ *e* $\rho_p : Z \times Z \to \mathbb{R}^+$ *a métrica definida em* (1). *Mostre que , para todo* $z, z' \in Z$ *e* $p \in (1, \infty)$,

$$\rho_\infty(z, z') \leqslant \rho_p(z, z') \leqslant \rho_1(z, z') \leqslant N\rho_\infty(z, z').$$

Ou seja, todas as métricas ρ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *no espaço produto* Z *são equivalentes. Mostre também que, para cada par* $z, z' \in Z$,

$$\lim_{p\to\infty} \rho_p(z, z') = \rho_\infty(z, z').$$

Exemplo (5)

Seja (X, ρ) *um epaço métrico e* $M \subset X$*. De maneira natural,* ρ *restrita a* $M \times M$ *define uma métrica* $\rho_M = \rho_{|_{M \times M}}$ *em* M*.*

Quando fazemos isto M *é chamado subespaço métrico de* X *e* ρ_M *é chamada métrica induzida em* M *pela métrica de* X*.*

Exercício

Seja

$\ell_p = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (ou\ \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \ e$

$\ell_\infty = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (ou\ \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$

Em ℓ_p*, definimos*

$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \ se\ 1 \leqslant p < \infty \ e \ \|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$

Se $\rho_p : \ell_p \times \ell_p \to [0, \infty)$ *é definida por* $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p, 1 \leqslant p \leq \infty$*, mostre que* (ℓ_p, ρ_p) *é um espaço métrico.*

Exercício

Seja $X = C([a,b],\mathbb{R})$ *o conjunto das funções contínuas definidas em* $[a,b]$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$*. Em* X *defina a* **métrica da convergência uniforme**

$$\rho(x,y) = \|x-y\|_\infty, \quad x,y \in C([a,b],\mathbb{R}),$$

onde $\|\cdot\|_\infty : X \to \mathbb{R}^+$ *é definda por* $\|\xi\|_\infty = \sup\{|\xi(t)| : t \in [a,b]\}$, *para todo* $\xi \in C([a,b],\mathbb{R})$*. Mostre que* $\|\cdot\|_\infty : X \to \mathbb{R}^+$ *é uma norma.*