Espaços Métricos
Introdução, Definição e Exemplos
Aula 01

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

17 de Agosto de 2022

Segundo Semestre de 2022

Acesso ao ambiente de aprendizado eletrônico

E-DISCIPLINAS

Todas as informações e material do curso estão disponíveis em hhttps://edisciplinas.usp.br/acessar/

Para o seu primeiro acesso

ID do Usuário: ID ou Mail USP

Senha: Sua senha

Você também poderá acessar diversas informações da disciplina em https://sites.icmc.usp.br/andcarva/EMetricos/Espacos_Metricos.html

Provas e Calendário de Aulas

Provas

Prova 1 no dia 17/Outubro às 08:10–9:50hs

Prova 2 no dia 14/Dezembro às 08:10–9:50hs

Prova Substitutiva 21/Dezembro às 08:10–9:50hs

Horário das Aulas: 08:10–9:50hs (segunda-feira e quarta-feira)
Local das Aulas: Sala 3-009 - ICMC

Calendário de Aulas

Mês	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua
Ago						17	22	24	29	31
Set			**05**	**07**	12	14	19	21	26	28
Out	03	05	10	**12**	**17**	19	24	26	31	
Nov		**02**	07	09	**14**	16	21	23	28	30
Dez	05	07	12	**14**	19	**21**				

Atendimento

Atendimento com o professor

Quando: *Segunda-feira*, das 14:00hs às 16:00hs

Onde: Sala 3-123.

Ementa e bibliografia

1. **Introdução**
   - Espaços métricos e suas aplicações
2. **Definições, Exemplos e Propriedades Elementares**
   - Definição e Exemplos
   - Abertos e fechados
3. **Continuidade**
   - Funções Contínuas
   - Homeomorfismos
   - Exemplos e Aplicações

4. **Espaços métricos conexos**
   - Conexos: definição e propriedades elementares
   - Conexos por caminhos: definição e propriedades
   - Conexidade como invariante topológico
   - Exemplos e Aplicações
5. **Espaços métricos completos**
   - Definição
   - Propriedades (Princípio da Contração de Banach)
   - Completamento
   - Categorias: O Lema de Baire
   - Exemplos e Aplicações

6. **Espaços métricos compactos**
   - Definição
   - Propriedades
   - Compacidade e continuidade
   - Conjuntos totalmente limitados
   - Propriedades de Bolzano-Weierstrass e Heine-Borel
   - Dimensão
   - Exemplos e Aplicações
7. **Separabilidade**
   - Definição e exemplos
   - O espaço das funções contínuas de um espaço métrico compacto em um métrico separável
   - O Teorema de Aproximação de Weierestrass
   - Separabilidade de C([0,1],R)

Bibliografia

(*a*) Elon L. Lima - Espaços Métricos, Projeto Euclides, CNPq-IMPA (1977) (livro texto)

(*b*) Higino H. Domingues - Espaços Métricos e Introdução à Topologia, Atual Editora, (1983) (livro texto)

(*c*) G. F. Simons - Introduction to Topology and Modern Analysis, Mc Graw-Hill (1963) (complementar)

(*d*) Chaim S. Hönig - Aplicações da Topologia à Análise, Projeto Euclides, CNPq-IMPA (1976) (complementar)

(*e*) C. Goffman and G. Pedrick - First course in Functional Analysis, Chelsea, 1983.

Introdução

Vamos começar mencionando um texto famoso de David Hilbert

... Ich möchte ... darauf hinweisen, wie sehr es im We sen der mathematischen Wissenschaft liegt, daß jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theo rien erleichtern und umständliche ältere Entwicklungen beseitigen, und daß es daher dem einzelnen Forscher, in dem er sich diese schärferen Hilfsmittel und einfacheren Methoden zu eigen macht, leichter gelingt, sich in den verschiedenen Wissenszweigen der Mathematik zu orien tieren, als dies für irgendeine andere Wissenschaft der Fall ist.

David Hilbert 1862-1943

Que eu tomei a liberdade de traduzir da seguinte forma

... Eu gostaria de salientar, o quanto é da natureza da ciência matemática, que um progresso real sempre ande de mãos dadas com a descoberta de ferramentas mais poderosas e métodos mais simples que, ao mesmo tempo, facilitam o entendimento de teorias anteriores e eliminam desenvolvimentos mais antigos enrredados. Desta forma, o pesquisador individual, ao adotar essas ferramentas e métodos, familiarizar-se-á mais facilmente com um dos vários ramos desta ciência do que em qualquer outra.

David Hilbert 1862-1943

Pois bem, os espaços métricos (um conjunto com uma noção de distância) são um exemplo da forma como a matemática avança.

Por um lado, dentre todas as ciências, a Matemática é talvez a única para a qual cada evolução faz parte do conjunto de conhecimentos, para sempre.

Por outro lado, avanços do tipo mencionado por Hilbert proporcionam colapsos de áreas da matemática tornando factível alcançar a fronteira do conhecimento.

Os espaços métricos foram introduzidos por Maurice Fréchet em sua tese sobre análise funcional (Veja, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) **22**, 1-72 (1906)).

Naqueles dias, uma abordagem matemática axiomática e abstrata ainda não era tão rotineira quanto nos dias de hoje.

Os matemáticos daquela época estavam estudando vários espaços (principalmente espaços de funções) e haviam várias noções de convergência (associadas aos diferentes espaços estudados).

... Havia uma necessidade enorme de unificação.

Neste contexto, a genialidade, da contribuição de Frechét, foi axiomatizar a noção de distância e provar que muitos dos espaços estudados eram espaços métricos.

Desta forma, provando o resultado para um espaço abstrato, este automaticamente valia para todos os espaços estudados.

Esta é a motivação histórica. Na visão moderna, o conceito de espaço métrico é apenas uma axiomatização da noção de distância.

Esta é uma das axiomatizações mais simples, em particular, para estudantes que vêem sistemas axiomáticos desde o início, comum nos dias de hoje.

A noção de distância é muito importante, por exemplo, ela é usada na definição de limite. Além disso, muitas noções geométricas dependem da noção de distância (por exemplo, círculos).

É natural destilar algumas propriedades comuns das distâncias em vários contextos e defini-las como axiomas.

... Disto resultam os espaços métricos.

As aplicações dos **espaços métricos** são inúmeras. A mais importante delas sendo a grande unificação de idéas que permitem rapidamente compreender diversas áreas da matemática.

Vou citar mais algumas

- Do **Princípio da Contração de Banach,** que faremos mais tarde, quando estudarmos espaços métricos completos:
  - O método de Newton para encontrar zeros de funções.
  - Os Teoremas das funções implícitas e inversas.
  - O Teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias e integrais.
  - A Propriedade do ponto de sela, as variedades inerciais e a robusteza das dicotomias exponenciais sob perturbação, para equações diferenciais.

- Do **Lema de Baire** que faremos quando falarmos de categorias, em espaços métricos completos, seguem
  - Os teoremas fundamentais da análise funcional: Os Teoremas da Aplicação Aberta, do Gráfico Fechado e o Princípio da Limitação Uniforme.
- A conexidade é muito aplicada à teoria espectral (localização do espectro) e aos semigrupos de operadores lineares.
- Boa parte da Teoria de Sistemas Dinâmicos pode ser construída sobre espaços métricos gerais. Em particular, os espaços métricos compactos e os espaços métricos conexos aparecem de forma decisiva aí.
- A teoria de dimensão encontra também aplicações aos Sistemas Dinâmicos.

Definições e Exemplos

Começamos com a definição de espaço métrico.

Recorde que, se X é um conjunto não vazio, $X \times X$ denota o conjunto dos pares ordenados (x, y) de elementos de X, isto é,

$$X \times X = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in X\}.$$

Definição

Seja X um conjunto não vazio. Uma **métrica ou distância** *em X é uma função $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ satisfazendo*

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x), \text{ para todo } x, y \in X,$$

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z), \text{ para todo } x, y, z \in X.$$

O conjunto X munido da métrica ρ é chamado espaço métrico e é denotado por (X, ρ).

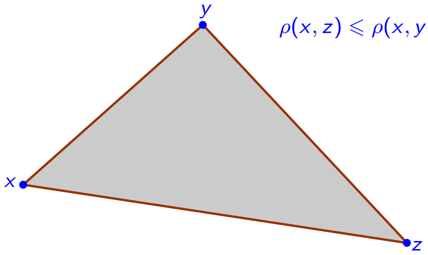
Uma métrica ρ em X associa a cada par ordenado de elementos de X a distância entre eles.

Os axiomas que definem uma métrica capturam as propriedades essenciais da noção intuitiva de distância.

A terceira propriedade da métrica é conhecida como

desigualdade triangular

e estabelece que: o comprimento de um dos lados de um triângulo sempre não excede a soma dos comprimentos dos demais lados.



$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Quando não houver possiblidade de dúvida nos referiremos ao espaço métrico (X, ρ) simplesmente por X. Muitas vezes nos referiremos aos elementos de um espaço métrico como pontos.

Exemplo (1)

Se X é um conjunto não vazio definimos $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq y \\ 0, & se\ x = y. \end{cases}$$

A função ρ é uma métrica chamada **métrica discreta** *e (X, ρ) é um espaço métrico.*

De fato: $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ está bem definida e é imediato, da definição de ρ, que

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x), \text{ para todo } x, y \in X,$$

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z), \text{ para todo } x, y, z \in X.$$

Definição (Norma)

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma **norma** *em V é uma função $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ que satizfaz as seguinte propriedades*

$\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0,$

$\|\lambda v\|_V = |\lambda|\|v\|_V$ *e*

$\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$, *para todo* $v, w \in V$.

Definição

Um espaço vetorial V munido de uma norma é chamado **espaço vetorial normado**, *isto é, um espaço vetorial normado é um par $(V, \|\cdot\|_V)$ onde $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ é uma norma.*

Exemplo (2)

É imediato que, se $(V, \| \cdot \|_V)$ é um espaço vetorial normado e $\rho_V : V \times V \to \mathbb{R}^+$ é definida por $\rho_V(v, w) = \|v - w\|_V$, então (V, ρ_V) é um espaço métrico (exercício).

Neste caso diremos que a métrica é proveniente da norma e **todo espaço vetorial normado é um espaço métrico** *com a métrica proveniente da norma.*

Exemplo (3)

Para $p \in [1, \infty]$, *seja* $(\mathbb{R}^N, \rho_p)$, *com* $\rho_p(x, y) := \|x - y\|_p$, $x, y \in \mathbb{R}^N$, *onde*

$$\|\xi\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|\xi\|_\infty = \sup\{|\xi_i| : 1 \leqslant i \leqslant N\}, \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Então $(\mathbb{R}^N, \rho_p)$ *é um espaço métrico*, $1 \leq p \leqslant \infty$.

Prova: Vamos apenas fazer os casos $1 < p < \infty$. Os casos remanescentes são mais simples e a sua prova será deixada para o leitor. Basta mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma. É claro da definição de ρ_p que

$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e que

$\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Resta mostrar que $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Para este fim, primeiramente, vamos necessitar provar alguns resultados auxiliares.

Desigualdade de Young

Lema (Desigualdade de Young)

Se $p \in (1, \infty)$, $q \in (1, \infty)$ *é tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $a, b \in [0, \infty)$, *então*

$$\boxed{a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.}$$

Prova: Suponha que $b > 0$ (o caso $b = 0$ é trivial). A desigualdade acima pode então ser reescrita da seguinte forma

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{q}$$

fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$, obtemos

$$t^{\alpha} \leqslant \alpha t + 1 - \alpha$$

Logo, basta mostrar que, para todo $\alpha \in (0, 1)$, a função $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \alpha t - t^{\alpha} + 1 - \alpha$, satisfaz

$$f(t) \geq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^{+}.$$

$f(t) = \alpha t - t^\alpha + 1 - \alpha$

De fato,

$$\boxed{f'(t) = \alpha(1 - t^{\alpha-1})} \begin{cases} < 0, & \text{se } t \in [0,1) \\ = 0, & \text{se } t = 1 \\ > 0, & \text{se } t \in (1,\infty). \end{cases}$$

Desta forma, $t = 1$ é um ponto de mínimo global para f e $f(1) = 0$, mostrando o resultado.$\square$

Desigualdade de Hölder

Lema (Desigualdade de Hölder)

Se $p \in (1, \infty)$ *e* $q \in (1, \infty)$ *é tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *então*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right]^{\frac{1}{q}},}$$

para todo $x = (x_1, \cdots, x_N), y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$.

Prova: Se $x = 0$ ou $y = 0$ a desigualdade é trivial. Suponha que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Fazendo

$$a_j = \frac{|x_j|^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p} \quad \text{e} \quad b_j = \frac{|y_j|^q}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q},$$

e aplicando a Desigualdade de Young obtemos

$$a_j^{\frac{1}{p}} b_j^{\frac{1}{q}} = \frac{|x_j y_j|}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} a_j + \frac{1}{q} b_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

notando que $\sum_{j=1}^{N} a_j = \sum_{j=1}^{N} b_j = 1$, obtemos

$$\frac{\sum_{j=1}^{N} |x_j y_j|}{\left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

e o resultado segue.$\square$

Observação

Esta desigualdade é chamada Desigualdade de Cauchy-Schwarz, se $p = 2$. Recorde a prova da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e compare com a prova acima.

Desigualdade de Minkowski

Lema (Desigualdade de Minkowski)

Se $p \in [1, \infty]$, *então*

$$\left[\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

para todo $x = (x_1, \cdots, x_N), y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$.

Prova: Os casos $p = 1, \infty$ são triviais (exercício). Se $p \in (1, \infty)$, é claro que

$$\left[\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Agora,

$$(|x_i| + |y_i|)^p = (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|x_i| + (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|y_i|$$

e, somando as igualdades acima,

$$\sum_{i=1}^{N}(|x_i| + |y_i|)^p = \sum_{i=1}^{N}(|x_i| + |y_i|)^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{N}(|x_i| + |y_i|)^{p-1}|y_i|.$$

Agora, usando a Desigualdade de Hölder e notando que $(p-1)q = p$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{p-1}|x_i| &\leqslant \left[\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}|\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{p}|\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{p-1}|y_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^{p}|\right]^{\frac{1}{q}}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^p \leqslant \left[\left[\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Disto segue que, se $\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^p \neq 0$ (o caso restante é trivial),

$$\left[\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

e a prova está completa.$\square$