

SMA 5878 Análise Funcional II

Alexandre Nolasco de Carvalho

Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

14 de Junho de 2023

Exemplo ([2], veja [1, Page 150])

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ considere o espaço de Hilbert $\ell_n^2 = \mathbb{C}^n$ com o produto interno usual. Seja $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert cujos elementos são seqüências $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \in \prod_{n=1}^{\infty} \ell_n^2$, com $x_n \in \ell_n^2$ e

$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\ell_n^2}^2 < \infty$ e produto interno $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n \rangle_{\ell_n^2}$. Se

$B_n \in \mathcal{L}(\ell_n^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$, for tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\|B_n\|_{\mathcal{L}(\ell_n^2)} : n \in \mathbb{N}^*\} < \infty$, e

$$\mathbf{B}(x) = (B_1(x_1), B_2(x_2), B_3(x_3), \dots)$$

então, $\|\mathbf{B}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\|B_n\|_{\mathcal{L}(\ell_n^2)} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Agora considere

$A_n \in \mathcal{L}(\ell_n^2)$ dados pelas matrizes cujas entradas $A_{n:i,j}$ são todas nulas exceto $A_{n:p,p+1} = 1$, $1 \leq p < n$.

É claro que $\sigma(A_n) = \{0\}$ e $\|A_n\|_{\mathcal{L}(\ell_n^2)} = 1$. Seja $\Xi_n = inI_n + A_n$. Logo

$$\|e^{\Xi_n t}\|_{\mathcal{L}(\ell_n^2)} = \|e^{A_n t}\|_{\mathcal{L}(\ell_n^2)} \leq e^{|t|}$$

Mostremos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|e^{\Xi_n t}\|_{\mathcal{L}(\ell_n^2)} = e^{|t|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Faremos apenas o caso $t > 0$. Tomando

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \ell_n^2,$$

temos

$$e^{tA_n} u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ \vdots \\ 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 \\ 1 + t \\ 1 \end{pmatrix} \in \ell_n^2.$$

Portanto, usando a expansão de Taylor de e^t ,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_n}u_n - e^t u_n\|_{\ell_n^2} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} - e^t \\ 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} - e^t \\ \vdots \\ 1 + t - e^t \\ 1 - e^t \end{pmatrix} \right\|_{\ell_n^2} \\ &\leq \frac{e^t}{\sqrt{n}} \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{n!}t^n \\ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2!}t^2 \\ t \end{pmatrix} \right\|_{\ell_n^2} \leq \frac{e^{t+\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Dado $t > 0$ existe uma seqüência de pares de números inteiros positivos (n_k, q_k) com $q_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ tais que

$$\left| \frac{2\pi}{t} - \frac{n_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2} \text{ (veja [3, página 112])}.$$

Segue que, se $\tau_k + 2\pi q_k = n_k t$,

$$|\tau_k| < \frac{t}{q_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Assim, $e^{in_k t} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$ e temos que

$$\|e^{t\Xi_{n_k}} u_{n_k} - e^t u_{n_k}\|_{\ell_{n_k}^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Consequentemente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|e^{t\Xi_n}\|_{\mathcal{L}(\ell_{n_k}^2)} = e^{|t|}$$

Agora definimos $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $t \in \mathbb{R}$, por

$$T(t)(x_1, x_2, x_3, \dots) = (e^{t\Xi_1}x_1, e^{t\Xi_2}x_2, e^{t\Xi_3}x_3, \dots).$$

Segue que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um grupo de operadores lineares e que $\|T(t)\| = e^{|t|}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostremos que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é fortemente contínuo.

De fato, dado $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{H}$ e $\epsilon > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|_{\ell_n^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\|_{\mathcal{H}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|e^{\Xi_n t} x_n - x_n\|_{\ell_n^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^N \|e^{\Xi_n t} x_n - x_n\|_{\ell_n^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|e^{\Xi_n t} x_n - x_n\|_{\ell_n^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^N \|e^{\Xi_n t} x_n - x_n\|_{\ell_n^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (e^{|t|} + 1) \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|_{\ell_n^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Segue que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon$$

e que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é fortemente contínuo.

A seguir exibiremos o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e determinaremos o seu espectro. Seja

$$\mathcal{D} = \{x \in \prod_{n=1}^{\infty} \ell_n^2 : x_n = 0 \text{ exceto para finitos } n's\}.$$

Defina $\Xi : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ por $\Xi x = \{\Xi_1 x_1, \Xi_2 x_2, \Xi_3 x_3, \dots\}$. Se $x \in \mathcal{D}$ então,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \Xi x.$$

Exercício: Sabemos que $\mathcal{D}$ é denso em $\mathcal{H}$ e que $T(t)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que, se $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ for o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ então $\sigma(\Xi) = \sigma(\mathcal{A})$. Sugestão: Mostre que $\mathcal{A}$ é o fecho de Ξ e use o Lemma 2.1.1.

Se $\lambda \neq in$, $n \in \mathbb{N}^*$, então $\lambda \in \rho(\Xi_n)$ e

$$(\lambda I_n - \Xi_n)^{-1} = ((\lambda - in) - A_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda - in} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(\lambda - in)^j} A_n^j.$$

Se n for tal que $|\lambda - in| \geq k > 1$ teremos

$$\|(\lambda I_n - \Xi_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ell_n^2)} \leq \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{1}{k-1}$$

e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|(\lambda I_n - \Xi_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ell_n^2)} < \infty.$$

Seja $\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ o operador definido por

$$\Delta = ((\lambda I_1 - \Xi_1)^{-1}, (\lambda I_2 - \Xi_2)^{-1}, (\lambda I_3 - \Xi_3)^{-1}, \dots).$$

Segue que $\Delta(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ e $(\lambda I - \Xi)\Delta x = \Delta(\lambda I - \Xi)x = x$, para todo $x \in \mathcal{D}$. Consequentemente, $\rho(\mathcal{A}) \supset \mathbb{C} \setminus \{in : n \in \mathbb{N}^*\}$. Por outro lado, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\Xi) = \{in : n \in \mathbb{N}^*\}$ pois, dado $k \in \mathbb{N}^*$ e $v = \{\underbrace{0_1, \dots, 0_{k-1}}_{k-1 \text{ vezes}}, v_k, 0_{k+1}, \dots\} \in \mathcal{D}$ onde

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \ell_k^2$$

temos

$$\mathcal{A}v_k = \Xi v_k = ikv_k.$$

Isto mostra que $\sigma(\mathcal{A}) = \{in : n \in \mathbb{N}^\}$ está contido no eixo imaginário enquanto que*

$$\|e^{\mathcal{A}t}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = e^t$$

Exercício

Mostre que $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ é um operador compacto.

-  Edoardo Vesentini, *Introduction to continuous semigroups*, Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1996.
-  J. Zabczyk, *A note on C_0 -semigroups*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **23** (1975), no. 8, 895–898.
-  V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **250** Second Edition, Springer Verlag, 1988.

O TEOREMA DA APLICAÇÃO ESPECTRAL

Segue do Teorema da Aplicação Espectral que $\sigma(f(A)) = f(\sigma_e(A))$, sempre que A for um operador fechado, com resolvente não vazio e $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$. Quando A for um operador ilimitado e $f \notin \mathcal{U}_\infty(A)$ este resultado não é válido, em geral.

Como $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto e^{\lambda t} \in \mathbb{C}$ não pertence a $\mathcal{U}_\infty(A)$ para A ilimitado, em geral, não podemos afirmar que $\sigma(e^{At}) = e^{\sigma_e(A)t}$.

Vamos estudar a seguir as relações entre o espectro de um semigrupo e o espectro de seu gerador.

Lemma

Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Se

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} e^{As} x \, ds \quad (1)$$

então

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - e^{At}x, \quad \forall x \in X \quad (2)$$

e

$$B_\lambda(t)(\lambda - A)x = e^{\lambda t}x - e^{At}x, \quad \forall x \in D(A). \quad (3)$$

Prova: Para todo λ e t fixos, $B_\lambda(t) \in \mathcal{L}(X)$. Além disso, para todo $x \in X$ temos

$$\begin{aligned} \frac{e^{Ah} - I}{h} B_\lambda(t)x &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^t e^{\lambda(t-s)} e^{As} x ds + \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-s)} e^{As} x ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-s)} e^{As} x ds \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \lambda B_\lambda(t)x + e^{At}x - e^{\lambda t}x. \end{aligned}$$

Consequentemente, $B_\lambda(t)x \in D(A)$ e
 $AB_\lambda(t)x = \lambda B_\lambda(t)x + e^{At}x - e^{\lambda t}x$, provando (2).

É claro, para $x \in D(A)$, $AB_\lambda(t)x = B_\lambda(t)Ax$ e (3) segue. $\square$

Teorema

Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então,

$$\sigma(e^{At}) \supset e^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Prova: Seja $e^{\lambda t} \in \rho(e^{At})$ e seja $Q = (e^{\lambda t} - e^{At})^{-1}$. De (2) e (3) deduzimos que

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)Qx = x, \quad \forall x \in X$$

e

$$QB_\lambda(t)(\lambda - A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Como $B_\lambda(t)$ e Q comutam também temos que

$$B_\lambda(t)Q(\lambda - A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Portanto, $\lambda \in \rho(A)$, $B_\lambda(t)Q = (\lambda - A)^{-1}$.

Esta mesma argumentação implica que $\lambda + \frac{2k\pi i}{t} \in \rho(A)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, o que implica $e^{\lambda t} \notin e^{t\sigma(A)}$ e prova (4). $\square$

O espectro de um operador linear fechado A consiste de três partes mutualmente exclusivas cuja união é $\sigma(A)$: o espectro pontual $\sigma_p(A)$; o espectro residual $\sigma_r(A)$ e o espectro contínuo $\sigma_c(A)$.

Estas partes são definidas da seguinte forma: $\lambda \in \sigma_p(A)$ se $(\lambda - A)$ não é injetor; $\lambda \in \sigma_c(A)$ se $(\lambda - A)$ é injetor, tem imagem densa em X mas não é sobrejetor e, finalmente, $\lambda \in \sigma_r(A)$ se $(\lambda - A)$ é injetor e não tem imagem densa em X .

A seguir estudaremos as relações entre cada parte do espectro de A e a sua parte correspondente no espectro de e^{At} . Começamos com o espectro pontual.

Teorema

Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então

$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(e^{At}) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\},$$

isto é, se $\lambda \in \sigma_p(A)$ então, $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ e, se $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ então, existe um inteiro k tal que $\lambda_k = \lambda + 2\pi i k/t \in \sigma_p(A)$.

Prova: Se $\lambda \in \sigma_p(A)$ existe um $x \in D(A)$, $x \neq 0$ tal que $(\lambda - A)x = 0$. De (3) segue que $(e^{\lambda t} - e^{At})x = 0$ e portanto $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ o que prova a primeira inclusão.

Para provar a segunda inclusão seja $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ e seja $x \neq 0$ tal que $(e^{\lambda t}I - e^{At})x = 0$. Isto implica que a função contínua $s \mapsto e^{-\lambda s}T(s)x$ é periódica com período t e como ela não é identicamente nula, um de seus coeficientes de Fourier deve ser diferente de zero.

Portanto, existe k tal que

$$x_k = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-(2\pi ik/t)s} (e^{-\lambda s} T(s)x) ds \neq 0.$$

Mostraremos que $\lambda_k = \lambda + 2\pi ik/t$ é um autovalor de A .

Seja $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. Mostremos que $\operatorname{Re} \lambda \leq \omega$. De fato, como $e^{n\lambda t}x = e^{Ant}x$ temos que $e^{nt\operatorname{Re} \lambda} \|x\| \leq Me^{nt\omega} \|x\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e o resultado segue.

Para $\operatorname{Re} \mu > \omega$ temos

$$\begin{aligned}
 (\mu - A)^{-1}x &= \int_0^\infty e^{-\mu s} e^{As} x \, ds = \sum_{n=0}^\infty \int_{nt}^{(n+1)t} e^{-\mu s} e^{As} x \, ds \\
 &= \sum_{n=0}^\infty e^{n(\lambda-\mu)t} \int_0^t e^{-\mu s} e^{As} x \, ds \\
 &= \frac{1}{1 - e^{(\lambda-\mu)t}} \int_0^t e^{-\mu s} e^{As} x \, ds
 \end{aligned} \tag{5}$$

onde usamos a t -periodicidade da função $s \mapsto e^{-\lambda s} e^{As} x$ e que $\operatorname{Re} \lambda \leq \omega$.

A integral do lado direito de (5) é claramente uma função inteira e portanto $(\mu - A)^{-1}x$ pode ser estendida a uma função analítica com possíveis polos em $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Usando (5) é fácil mostrar que (já que $e^{(\lambda-\mu)t} = e^{(\lambda_k-\mu)t}$)

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda_k} (\mu - \lambda_k)(\mu - A)^{-1}x = \lim_{\mu \rightarrow \lambda_k} \frac{\lambda_k - \mu}{e^{(\lambda-\mu)t} - 1} \int_0^t e^{-\mu s} e^{As} x \, ds = x_k$$

e, como $\int_0^t e^{-\mu s} e^{As} x \, ds \in D(A)$, da t -periodicidade de
 $s \mapsto e^{-\lambda s} e^{As} x$,

$$\begin{aligned}
 (\lambda_k - A)(\mu - A)^{-1}x &= (\lambda_k - \mu)(\mu - A)^{-1}x + x \\
 &= \frac{(\lambda_k - \mu)}{1 - e^{(\lambda - \mu)t}} \int_0^t e^{-\mu s} e^{As} x \, ds + x,
 \end{aligned}$$

segue que

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda_k} (\lambda_k - A)[(\mu - \lambda_k)(\mu - A)^{-1}]x = 0.$$

Como A é fechado, segue que $x_k \in D(A)$ e $(\lambda_k - A)x_k = 0$; isto é, $\lambda_k \in \sigma_p(A)$. $\square$

Agora lidamos com o espectro residual de A .

Teorema

Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então,

- ❶ Se $\lambda \in \sigma_r(A)$ e $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap \sigma_p(A) = \emptyset$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$.
- ❷ Se $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$ então, $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap \sigma_p(A) = \emptyset$ e $\lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_r(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Prova: De (2) segue que $R(e^{\lambda t} - e^{At}) \subset R(\lambda - A)$.

Além disso, do Teorema 2, se $e^{\lambda t} - e^{At}$ não é um-a-um, então $\lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_p(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, se $\lambda \in \sigma_r(A)$ e $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap \sigma_p(A) = \emptyset$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$. Isto conclui a prova de 1.

Agora vamos provar 2. Do Teorema 2, se $\lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_p(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$.

Resta mostrar que, se $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$, então $R(\lambda_k - A)$ não é densa em X para algum k .

Basta mostrar que, se $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$, então $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\}$ não está contido em $\rho(A) \cup \sigma_c(A)$.

De (3), se $\lambda_n := \lambda + 2\pi in/t$,

$$(e^{\lambda_n t} - e^{At})x = B_{\lambda_n}(t)(\lambda_n - A)x, \quad x \in D(A), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Como por hipótese $e^{\lambda t} = e^{\lambda_n t} \in \sigma_r(e^{At})$ o lado esquerdo de (6) pertence a um subespaço fixo Y que não é denso em X .

Por outro lado, se $\lambda_n \in \rho(A) \cup \sigma_c(A)$, então a imagem de $\lambda_n - A$ é densa em X o que implica, por (6), que a imagem de $B_{\lambda_n}(t)$ está em $\bar{Y}$ para todo n .

Escrevendo a série de Fourier da função contínua $s \mapsto e^{-\lambda s} e^{As} x$, $x \in X$ temos

$$e^{-\lambda s} e^{As} x \sim \frac{e^{-\lambda t}}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i n/t)s} B_{\lambda_n}(t) x \quad (7)$$

e cada termo da série do lado direito de (7) pertence a $\bar{Y}$.

Como a série é Cesàro convergente para $e^{-\lambda s} e^{As} x$, $0 < s < t$, temos que $e^{-\lambda s} e^{As} x \in \bar{Y}$ para $0 < s < t$. Fazendo $s \rightarrow 0^+$ temos $x \in \bar{Y}$ e $\bar{Y} = X$, o que é absurdo. $\square$

Teorema

Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Se $\lambda \in \sigma_c(A)$ e $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap [\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)] = \emptyset$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_c(e^{At})$.

Prova: Do Teorema 1, se $\lambda \in \sigma_c(A)$ então, $e^{\lambda t} \in \sigma(e^{At})$.

Do Teorema 2, se $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ então, $\lambda_k \in \sigma_p(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, provando que $e^{\lambda t} \notin \sigma_p(e^{At})$.

Do Teorema 3, se $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$ então, $\lambda_n \notin \sigma_p(A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\lambda_k \in \sigma_r(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, provando que $e^{\lambda t} \notin \sigma_r(e^{At})$. $\square$

Teorema

Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um C^0 -semigrupo. Se $e^{\lambda t} \in \sigma_c(e^{At})$ então, $\{\lambda_n := \lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap [\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)] = \emptyset$. É possível que $e^{\lambda t} \in \sigma_c(e^{At})$ e que $\lambda_n = \lambda + 2n\pi i/t \in \rho(A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Prova: É claro dos Teoremas 2 e 3 que, se $e^{\lambda t} \in \sigma_c(e^{At})$, então $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Para o restante da afirmativa considere o seguinte exemplo: Seja $H = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ e defina $A : D(A) \subset \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ por

$$D(A) = \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : \{nx_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \}$$

$$A\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{inx_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \text{para todo } \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in D(A).$$

Então A gera o semigrupo fortemente contínuo dado por

$$e^{At}\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{e^{int}x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad t \geq 0.$$

É claro que $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{in : n \in \mathbb{Z}\}$. Por outro lado $\sigma_p(e^A) = \{e^{in} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Este conjunto é denso na circunferência unitária e, se $|\mu| \neq 1$, é fácil ver que $\mu \in \rho(e^A)$. Segue que $\sigma(e^A) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\}$.

Se $e^\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\} \setminus \{e^{in} : n \in \mathbb{Z}\}$, então $\overline{R(e^\lambda - e^A)} = X$ (contém as seqüências quase nulas).

Assim $\sigma_r(e^A) = \emptyset$, $e^\lambda \in \sigma_c(e^A)$ e $\lambda_n = \lambda + 2n\pi i \in \rho(A) \forall n \in \mathbb{Z}$. $\square$