SMA 5878 Análise Funcional II

Alexandre Nolasco de Carvalho

Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

03 de Maio de 2023

Seja X_ϵ uma família de espaços de Banach, $\epsilon \in [0,1]$, e suponha que exista uma família de operadores lineares limitados $E_\epsilon : X \to X_\epsilon$ com a propriedade ($X := X_0$)

$$\|E_\epsilon u\|_{X_\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \to 0} \|u\|_X, \qquad \text{para todo } u \in X. \tag{1}$$

Exercício

Mostre que existe $M \geq 1$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\|E_\epsilon\|_{\mathcal{L}(X,X_\epsilon)} \leq M, \quad \forall\, \epsilon \in [0, \epsilon_0].$$

Sugestão: *Mostre uma versão do Princípio da Limitação Uniforme que se aplique a esta situação.*

Definição (E-convergência)

Diremos que uma seqüência $\{u_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}$, *com* $u_\epsilon \in X_\epsilon$ *para todo* $\epsilon \in [0,1]$, *E−converge para* u *se* $\|u_\epsilon - E_\epsilon u\|_{X_\epsilon} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$. *Escrevemos* $u_\epsilon \xrightarrow{E} u$ *para dizer que* $\{u_\epsilon\}_{\epsilon\in[0,1]}$ *E-converge para* u *quando* ϵ *tende a zero.*

Exercício (Unicidade do E-limite)

Mostre que, se $u_\epsilon \xrightarrow{E} u$ *e* $u_\epsilon \xrightarrow{E} v$*, então* $u = v$*.*

Com esta noção de convergência apresentamos a definição de seqüência E-relativamente compacta.

Definição (Convergência Compacta)

Uma seqüência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *com* $u_n \in X_{\epsilon_n}$ *e* $\epsilon_n \to 0$, *é dita* E*-relativamente compacta se, para cada subseqüência* $\{u_{n'}\}$ *de* $\{u_n\}$, *existe uma subseqüência* $\{u_{n''}\}$ *de* $\{u_{n'}\}$ *e um elemento* $u \in X$ *tal que* $u_{n''} \xrightarrow{E} u$. *A família* $\{u_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}$ *é dita* E*-relativamente compacta se cada seqüência* $\{u_{\epsilon_n}\}$, $\epsilon_n \to 0$, *é* E*-relativamente compacta.*

Definição (EE-convergência)

Diremos que a família de operadores $\{B_\epsilon \in \mathcal{L}(X_\epsilon)\}_{\epsilon\in[0,1]}$ *EE-converge para* B_0 *quando* $\epsilon \to 0$, *se* $B_\epsilon u_\epsilon \xrightarrow{E} B_0 u$ *sempre que* $u_\epsilon \xrightarrow{E} u \in X$. *Escreveremos* $B_\epsilon \xrightarrow{EE} B_0$ *para denotar que* $\{B_\epsilon \in \mathcal{L}(X_\epsilon)\}_{\epsilon\in[0,1]}$ *EE-converge para* B_0 *quando* $\epsilon \to 0$.

Definição (CC-convergência)

Diremos que uma família de operadores compactos $\{B_\epsilon \in \mathcal{K}(X_\epsilon) : \epsilon \in [0,1]\}$ *converge compactamente para* B_0 *se, para qualquer família* $\{u_\epsilon\}$ *com* $u_\epsilon \in X_\epsilon$, $\|u_\epsilon\|_{X_\epsilon} = 1$, $\epsilon \in (0,1]$, *a família* $\{B_\epsilon u_\epsilon\}$ *é* E*-relativamente compacta e* $B_\epsilon \xrightarrow{EE} B_0$.

Escreveremos $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$ *para denotar que* $\{B_\epsilon \in \mathcal{K}(X_\epsilon)\}_{\epsilon\in[0,1]}$ *converge compactamente para* B_0 *quando* $\epsilon \to 0$.

Exercício

Se $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$, $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *e* $\{u_{\epsilon_n}\}$ *é tal que* $u_{\epsilon_n} \in X_{\epsilon_n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\{\|u_{\epsilon_n}\|_{X_{\epsilon_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada, mostre que* $\{B_{\epsilon_n} u_{\epsilon_n}\}$ *é* E*-relativamente compacta.*

Lema (Lema Fundamental)

Seja $\{B_\epsilon \in \mathcal{K}(X_\epsilon)\}_{\epsilon\in[0,1]}$ *tal que* $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$. *Então,*

i) existe $\epsilon_0 \in (0,1]$ *tal que* $\sup_{\epsilon\in(0,\epsilon_0]} \|B_\epsilon\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} < \infty$.

ii) se $\mathcal{N}(I + B_0) = \{0\}$, *existe* $\epsilon_0 > 0$ *e* $M > 0$ *tal que* $\mathcal{N}(I + B_\epsilon) = \{0\}$ *para todo* $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ *e*

$$\|(I + B_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} \leqslant M, \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon_0]. \tag{2}$$

Em geral, os operadores B_ϵ são inversas de operadores ilimitados A_ϵ.

Assim, suponha que $\{A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon,\ \epsilon \in [0,1]\}$ seja uma família de operadores fechados e que, para todo $\epsilon \in [0,1]$,

$$\boxed{A_\epsilon \ \text{ tenha resolvente compacto, } 0 \in \rho(A_\epsilon) \text{ e } A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}}. \quad (3)$$

Lema

Suponha que $\{A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon,\ \epsilon \in [0,1]\}$ *satisfaz* (3).

Então, para cada $\lambda \in \rho(A_0)$*, existe* $\epsilon_\lambda > 0$ *tal que* $\lambda \in \rho(A_\epsilon)$ *para todo* $\epsilon \in [0, \epsilon_\lambda]$ *e existe uma constante* $M_\lambda > 0$ *tal que*

$$\|(\lambda - A_\epsilon)^{-1}\| \leqslant M_\lambda, \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon_\lambda]. \tag{4}$$

Além disso, $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (\lambda - A_0)^{-1}$ *quando* $\epsilon \to 0$.

Prova: De (3) e do fato que $\lambda \in \rho(A_0)$ é fácil ver que $(\lambda - A_0)^{-1} = -A_0^{-1}(I - \lambda A_0^{-1})^{-1}$.

Como $A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$, aplicando o Lema 1 i) e ii), obtemos que o operador $-A_\epsilon^{-1}(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1}$ está bem definido e é limitado.

Cálculos simples mostram que $-A_\epsilon^{-1}(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1} = (\lambda - A_\epsilon)^{-1}$. Logo $\lambda \in \rho(A_\epsilon)$ e obtemos (4).

Para provar a convergência compacta de $(\lambda - A_\epsilon)^{-1}$ para $(\lambda - A_0)^{-1}$ procedemos da seguinte maneira:

Como A_ϵ^{-1} converge compactamente para A_0^{-1} e como $\{(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1} : 0 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon_\lambda\}$ é limitado, concluímos que

- Se $\|u_\epsilon\|_{X_\epsilon} = 1$ então $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} u_\epsilon = -A_\epsilon^{-1} w_\epsilon$ com $w_\epsilon = (I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1} u_\epsilon$ que é uniformemente limitado em ϵ. Logo $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} u_\epsilon$ tem uma subseqüência E-convergente.

- Se $u_\epsilon \xrightarrow{E} u$ então $A_\epsilon^{-1} u_\epsilon \xrightarrow{E} A_0^{-1} u$. Agora, para qualquer subseqüência de $\{(\lambda - A_\epsilon)^{-1} u_\epsilon\}$ existe uma subseqüência (que novamente denotamos por $\{(\lambda - A_\epsilon)^{-1} u_\epsilon\}$) e $y \in X$ tal que,

$$\begin{aligned}(\lambda - A_\epsilon)^{-1} u_\epsilon &= -(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1} A_\epsilon^{-1} u_\epsilon \\ &= -A_\epsilon^{-1}(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1} u_\epsilon = z_\epsilon \xrightarrow{E} y.\end{aligned}$$

- Logo,

$$A_0^{-1} u \xleftarrow{E} A_\epsilon^{-1} u_\epsilon = -(I - \lambda A_\epsilon^{-1}) z_\epsilon \xrightarrow{E} -(I - \lambda A_0^{-1}) y$$

e isto implica que $y = (\lambda - A_0)^{-1} u$.

- Em particular, y é independente da subseqüência tomada. Isto implica que a seqüência inteira $(\lambda - A_\epsilon)^{-1}u_\epsilon$ E-converge para $y = (\lambda - A_0)^{-1}u$ quando $\epsilon \to 0$. Portanto, $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{EE} (\lambda - A_0)^{-1}$ quando $\epsilon \to 0$.

- Disto segue que $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (\lambda - A_0)^{-1}$ quando $\epsilon \to 0$ e o resultado está provado.$\square$

Exercício

Dada uma seqüência $\{u_n\}$ *com* $u_n \in X_{\epsilon_n}$ *e* $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *se toda subseqüência de* $\{u_n\}$ *possui uma subseqüência* $E-$*convergente para um vetor* u *independente da subseqüência tomada, então* $u_n \xrightarrow{E} u$.

Exercício

Seja $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *e suponha que* $B_{\epsilon_n} \xrightarrow{CC} B_0$ *e que* $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_0$ *em* $\mathbb{C}$ *e mostre que* $\lambda_n B_{\epsilon_n} \xrightarrow{CC} \lambda_0 B_0$.

Exercício

Se $X_\epsilon = X$ *e* $E_\epsilon = I_X$, $\forall\ \epsilon \in [0,1]$ *e* $\mathcal{K}(X) \ni B_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{L}(X)} B_0 \in \mathcal{K}(X)$, *então* $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$. *Reciprocamente, se* X *é reflexivo,* $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$ *e* $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow B_{\epsilon_n} x_n \xrightarrow{n\to\infty} B_0 x$ *sempre que* $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, *então* $B_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{L}(X)} B_0$.

Exercício (Δ)

Seja $X = L^2(0,\pi)$, $\epsilon \in [0,1]$, $a_\epsilon : [0,\pi] \to (0,\infty)$ *continuamente diferenciável para cada* $\epsilon \in [0,1]$, $D(A_\epsilon) = H^2(0,\pi) \cap H^1_0(0,\pi)$ *e defina* $A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X \to X$ *por*

$$(A_\epsilon \phi)(x) = -(a_\epsilon(x)\phi'(x))', \quad x \in (0,\pi).$$

Mostre que A_ϵ *é auto-adjunto e satisfaz* $\langle A_\epsilon \phi, \phi \rangle \geq \alpha_\epsilon \frac{2}{\pi^2} \|\phi\|_X^2$ *para todo* $\phi \in D(A_\epsilon)$, *onde* $\alpha_\epsilon = \min\limits_{x \in [0,\pi]} a_\epsilon(x)$. *Conclua que* $0 \in \rho(A_\epsilon)$ *e mostre que* $A_\epsilon^{-1} \in \mathcal{K}(X)$ $\epsilon \in [0,1]$.

Supondo que $a_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} a_0$ *uniformemente em* $[0,\pi]$ *e que* $E_\epsilon = I$ *para todo* $\epsilon \in [0,1]$, *prove que* $A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$.

Lema

Suponha que $\{A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon,\ \epsilon \in [0,1]\}$ *satisfaça* (3). *Se* Σ *é um subconjunto compacto de* $\rho(A_0)$, *existe* $\epsilon_\Sigma > 0$ *tal que* $\Sigma \subset \rho(A_\epsilon)$ *para todo* $\epsilon \leqslant \epsilon_\Sigma$ *e*

$$\sup_{\epsilon \in [0,\epsilon_\Sigma]} \sup_{\lambda \in \Sigma} \|(\lambda - A_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} < \infty. \tag{5}$$

Além disso, para cada $u \in X$ *temos que*

$$\sup_{\lambda \in \Sigma} \|(\lambda - A_\epsilon)^{-1} E_\epsilon u - E_\epsilon(\lambda - A_0)^{-1} u\|_{X_\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0. \tag{6}$$

Prova: Primeiramente mostremos que existe $\hat{\epsilon}_\Sigma > 0$ tal que $\Sigma \subset \rho(A_\epsilon)$ para todo $\epsilon \in [0, \hat{\epsilon}_\Sigma)$.

Se este não fosse o caso, existiriam seqüências $\epsilon_n \to 0$, $\lambda_n \in \Sigma$ (que podemos supor convergente para um $\lambda \in \Sigma$) e $u_{\epsilon_n} \in X_{\epsilon_n}$, $\|u_{\epsilon_n}\| = 1$ tais que $A_{\epsilon_n} u_{\epsilon_n} - \lambda_n u_{\epsilon_n} = 0$ ou, equivalentemente, $\lambda_n (A_{\epsilon_n})^{-1} u_{\epsilon_n} = u_{\epsilon_n}$.

Da convergência compacta $\{u_{\epsilon_n}\}$ tem uma subseqüência E-convergente para $u \in X$, $\|u\|_X = 1$ e $A_0 u = \lambda u$ o que está em contradição com $\sigma(A_0) \cap \Sigma = \emptyset$.

Mostremos que existe $\epsilon_\Sigma \in (0, \hat{\epsilon}_\Sigma)$ tal que (5) vale. Basta provar que existe $\epsilon_\Sigma \in (0,1]$ tal que

$$\{\|(I-\lambda A_\epsilon^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} : \epsilon \in [0,\epsilon_\Sigma] \text{ e } \lambda \in \Sigma\} \text{ é limitado.}$$

Se este não fosse o caso, existiria uma seqüência $\{\lambda_n\}$ em Σ (que podemos supor convergente para um certo $\tilde{\lambda} \in \Sigma$) e uma seqüência $\{\epsilon_n\}$ em $(0,1]$ com $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que

$$\|(I-\lambda_n (A_{\epsilon_n})^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{\epsilon_n})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Do Lema 1, já que $-\lambda_n(A_{\epsilon_n})^{-1} \xrightarrow{CC} -\tilde{\lambda}(A_0)^{-1}$, obtemos uma contradição.

Também provaremos (6) por contradição. Suponha que existem seqüências $\epsilon_n \to 0$, $\Sigma \ni \lambda_n \to \bar{\lambda} \in \Sigma$, $u \in X$ e $\eta > 0$ tal que

$$\|(\lambda_n - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u - E_{\epsilon_n}(\lambda_n - A_0)^{-1} u\|_{X_{\epsilon_n}} \geqslant \eta. \tag{7}$$

Usando a identidade do resolvente, temos que

$$\begin{aligned}(\lambda_n - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u &- (\bar{\lambda} - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u \\ &= (\bar{\lambda} - \lambda_n)(\lambda_n - A_{\epsilon_n})^{-1} (\bar{\lambda} - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u.\end{aligned}$$

Disto e de (5) segue que

$$\|(\lambda_n - A_{\epsilon_n})^{-1}E_{\epsilon_n}u - (\bar{\lambda} - A_{\epsilon_n})^{-1}E_{\epsilon_n}u\|_{X_{\epsilon_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8}$$

Do Lema 2 temos que

$$\|(\bar{\lambda} - A_{\epsilon_n})^{-1}E_{\epsilon_n}u - E_{\epsilon_n}(\bar{\lambda} - A_0)^{-1}u\|_{X_{\epsilon_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{9}$$

Finalmente, da continuidade do resolvente que

$$\|(\lambda_n - A_0)^{-1}u - (\bar{\lambda} - A_0)^{-1}u\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{10}$$

Agora, (8), (9) e (10) estão em contradição com (7) e o resultado está provado. $\square$

Para cada $\delta > 0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ defina $S_\delta(\lambda_0) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda_0| = \delta\}$.

A um ponto isolado $\lambda \in \sigma(A_0)$ associamos o seu auto-espaço generalizado $W(\lambda, A_0) = Q(\lambda, A_0)X$ onde

$$Q(\lambda, A_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - \lambda| = \delta} (\xi I - A_0)^{-1} d\xi$$

e δ é escolhido de forma que não haja nenhum outro ponto de $\sigma(A_0)$ no disco $\overline{B}_\delta^{\mathbb{C}}(\lambda) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda| \leqslant \delta\}$.

Segue do Lema 3 que existe $\epsilon_{S_\delta(\lambda)}$ tal que $\rho(A_\epsilon) \supset S_\delta(\lambda)$ para todo $\epsilon \leqslant \epsilon_{S_\delta(\lambda)}$. Seja $W(\lambda, A_\epsilon) := Q(\lambda, A_\epsilon)X_\epsilon$ onde

$$Q(\lambda, A_\epsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-\lambda|=\delta}(\xi I - A_\epsilon)^{-1}d\xi.$$

Exercício

Seja X um espaço de Banach. Se M, N são subespaços de X com $\dim(M) > \dim(N)$, mostre que existe $u \in M$, $\|u\| = 1$ tal que $\mathrm{dist}(u, N) = 1$ (Lemma IV.2.3 em [Kato-Perturbation Theory]).

Exercício

Seja X um espaço de Banach. Mostre que, se P e Q são projeções e $\dim(R(P)) > \dim(R(Q))$, então $\|P - Q\|_{\mathcal{L}(X)} \geq 1$.

O resultado a seguir diz que o espectro de A_ϵ *se aproxima* do espectro de A_0 quando ϵ tende a zero.

Já sabemos que o espectro de A_ϵ ou A_0 contém apenas auto-valores isolados de multiplicidade finita.

Teorema

Seja $\{A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon,\ \epsilon \in [0,1]\}$ *uma família de operadores satisfazendo* (3)*. Então, valem as seguintes afirmativas:*

(i) *Se* $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$*, existe seqüência* $\{\epsilon_n\}$ *em* $(0,1]$ *com* $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *e seqüência* $\{\lambda_n\}$ *em* $\mathbb{C}$ *com* $\lambda_n \in \sigma(A_{\epsilon_n})$*, para* $n = 1, 2, 3\cdots$*, e* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$*.*

(ii) *Se* $\{\epsilon_n\}$ *é uma seqüência em* $(0,1]$ *com* $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*, e* $\{\lambda_n\}$ *é uma seqüência em* $\mathbb{C}$ *com* $\lambda_n \in \sigma(A_{\epsilon_n})$*,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$*, então* $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$*.*

(iii) *Se* $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$*, existe* $\epsilon_1 \in (0,1]$ *tal que* $\dim W(\lambda_0, A_\epsilon) = \dim W(\lambda_0, A_0)$ *para todo* $0 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon_1$*.*

(iv) *Se* $u \in W(\lambda_0, A_0)$*, então existe uma seqüência* $\{\epsilon_n\}$ *em* $(0,1]$ *com* $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*,* $u_{\epsilon_n} \in W(\lambda_0, A_{\epsilon_n})$ *e tal que* $u_{\epsilon_n} \stackrel{E}{\longrightarrow} u$ *quando* $n \to \infty$*.*

(v) *Se* $\{\epsilon_n\}$ *é uma seqüência em* $(0,1]$ *com* $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*, e* $\{u_n\}$ *é uma seqüência com* $u_n \in W(\lambda_0, A_{\epsilon_n})$*,* $\|u_n\|_{X_{\epsilon_n}} = 1$*, então* $\{u_n\}$ *tem uma subseqüência* $E-$*convergente para um vetor* u *em* $W(\lambda_0, A_0)$*.*

Prova:
(i) Seja $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$ e $\delta_0 > 0$ tal que $\overline{B}^{\mathbb{C}}_{\delta_0}(\lambda_0) \cap \sigma(A_0) = \{\lambda_0\}$.

Segue, de um resultado anterior, que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\{\|(\lambda - A_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} : \epsilon \in [0, \epsilon_0]$ e $\lambda \in S_{\delta_0}(\lambda_0)\}$ é limitado.

Suponha agora que, existe $0 < \delta < \delta_0$ e seqüência $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que, $\overline{B}_\delta(\lambda_0) \subset \rho(A_{\epsilon_n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{B}_\delta(\lambda_0) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A_{\epsilon_n})^{-1} \in \mathcal{L}(X_{\epsilon_n})$ é analítica para cada $n \in \mathbb{N}$, da prova de um lema anterior e do Teorema do Máximo Módulo temos que

$$\|(I - \lambda_0 A_{\epsilon_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{\epsilon_n})} \leqslant \sup_{\substack{|\lambda-\lambda_0|=\delta \\ n\in\mathbb{N}}} \|(I - \lambda A_{\epsilon_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{\epsilon_n})} < \infty.$$

Portanto, se $u \in X$, segue que

$$\|(\lambda_0 A_0^{-1} - I)u\|_X = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda_0 A_{\epsilon_n}^{-1} - I)E_{\epsilon_n}u\|_{X_{\epsilon_n}} \geqslant c\|u\|_X,$$

para algum $c > 0$ e, consequentemente, $\lambda_0 \in \rho(A_0)$.

Isto contradiz a escolha de λ_0 e prova que, para cada $\delta > 0$, $\overline{B}_\delta(\lambda_0)$ contém algum ponto de $\sigma(A_\epsilon)$, para todo ϵ suficientemente pequeno.

(ii) Sejam $\{\epsilon_n\}$ uma seqüência em $(0,1]$ com $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\{\lambda_n\}$ uma seqüência em $\mathbb{C}$ com $\lambda_n \in \sigma(A_{\epsilon_n})$ tal que $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ e $\{u_n\}$ uma seqüência com $u_n \in X_{\epsilon_n}$, $(I-\lambda_n(A_{\epsilon_n})^{-1})u_n = 0$ e $\|u_n\| = 1$.

Então

$$\begin{aligned}&\|(I-\lambda(A_{\epsilon_n})^{-1})u_n\|_{X_{\epsilon_n}}\\ &=\|(I-\lambda_n(A_{\epsilon_n})^{-1})u_n-(\lambda-\lambda_n)(A_{\epsilon_n})^{-1}u_n\|_{X_{\epsilon_n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Uma vez que $\|u_n\|_{X_{\epsilon_n}} = 1$, tomando subseqüências se necessário, $\lambda(A_{\epsilon_n})^{-1}u_n \xrightarrow{E} u$ e $u_n \xrightarrow{E} u$ com $\|u\|=1$. Portanto $u-\lambda A_0^{-1}u=0$, $u \neq 0$ e $\lambda \in \sigma(A_0)$.

(*iii*) Como $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{EE} (\lambda - A_0)^{-1}$ uniformemente para $\lambda \in S_\delta(\lambda_0)$ (veja Lema anterior) segue que $Q_\epsilon(\lambda_0) \xrightarrow{EE} Q(\lambda_0)$ quando $\epsilon \to 0$.

Se $v_1, \cdots, v_k$ é uma base para $W(\lambda_0, A_0) = Q_0(\lambda_0)X$, é fácil ver que, para todo ϵ suficientemente pequeno,

$$\{Q_\epsilon(\lambda_0)E_\epsilon v_1, \cdots, Q_\epsilon(\lambda_0)E_\epsilon v_k\}$$

é um conjunto linearmente independente em $Q_\epsilon(\lambda_0)X_\epsilon$.

Disto segue que $\dim(Q_\epsilon(\lambda_0)(X_\epsilon)) \geqslant \dim(Q(\lambda_0)(X))$.

Provamos a igualdade supondo que $Q_\epsilon(\lambda_0) \xrightarrow{CC} Q(\lambda_0)$.

Suponha, por redução ao absurdo que, para alguma seqüência $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

$$\dim(Q_{\epsilon_n}(\lambda_0)(X_{\epsilon_n})) > \dim(Q(\lambda_0)(X)).$$

De um exercício anterior segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in W(\lambda_0, A_{\epsilon_n})$ com $\|u_n\|=1$ tal que $\mathrm{dist}(u_n, E_{\epsilon_n} W(\lambda_0, A_0))=1$.

Da convergência compacta podemos supor que

$$Q_{\epsilon_n}(\lambda_0)u_n = u_n \xrightarrow{E} Q_0(\lambda_0)u_0 = u_0$$

e temos um absurdo, já que

$$1 \leqslant \|u_n - E_{\epsilon_n}Q_0(\lambda_0)u_0\|_{X_{\epsilon_n}} = \|Q_{\epsilon_n}(\lambda_0)u_n - E_{\epsilon_n}Q_0(\lambda_0)u_0\|_{X_{\epsilon_n}} \to 0.$$

Assim precisamos apenas provar a convergência compacta $Q_\epsilon(\lambda_0) \xrightarrow{CC} Q(\lambda_0)$ quando $\epsilon \to 0$.

Isto segue de $Q_\epsilon(\lambda_0) \xrightarrow{EE} Q(\lambda_0)$, da convergência compacta $A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$ quando $\epsilon \to 0$, da limitação uniforme de $\|(\zeta A_\epsilon^{-1} - I)^{-1}\|$ para $\zeta \in S_\delta(\lambda_0)$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, dada na prova de um resultado anterior, e da fórmula

$$
\begin{aligned}
Q_\epsilon(\lambda_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\lambda_0|=\delta} (\zeta I - A_\epsilon)^{-1} d\zeta \\
&= A_\epsilon^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\lambda_0|=\delta} (\zeta A_\epsilon^{-1} - I)^{-1} d\zeta.
\end{aligned}
$$

(iv) Segue tomando $u_\epsilon = Q_\epsilon(\lambda_0)E_\epsilon u$.
(v) Segue da convergência compacta de Q_ϵ para Q_0 provada em (iii). $\square$

Exercício

No Exercício Δ, mostre que os auto-valores e auto-funções de A_ϵ convergem para auto-valores e auto-funções de A_0. Conclua que a convergência de auto-funções ocorre na norma de $H^1(0,\pi)$.

Exercício (*)

No Exercício Δ, se λ_ϵ é um auto-valor de A_ϵ, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ e $\lambda_\epsilon \to \lambda_0$ quando $\epsilon \to 0$, mostre que existe $C > 0$ tal que

$$|\lambda_\epsilon - \lambda_0| \leq C\|a_\epsilon - a_0\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Semigrupos e Seus Geradores

Neste capítulo apresentamos os fatos básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares e contínuos indispensáveis ao entendimento das técnicas de solução de EDPs parabólicas e hiperbólicas semilineares.

Grande parte da exposição estará concentrada na **caracterização dos geradores de semigrupos lineares**, uma vez que, nas aplicações da teoria, em geral, conhecemos a equação diferencial e não o operador solução.

Semigrupos

Definição

Um **semigrupo** *de operadores lineares em* X *é uma família* $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tal que*

(i) $T(0) = I_X$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geqslant 0$.

Se, além disso,

(iii) $\|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{t \to 0^+} 0$, *diremos que o semigrupo é uniformemente contínuo*

(iv) $\|T(t)x - x\|_X \xrightarrow{t \to 0^+} 0$, *para cada* $x \in X$, *diremos que o semigrupo é fortemente contínuo.*

O estudo dos semigrupos de operadores lineares está associado ao estudo de problemas de Cauchy lineares da forma

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \\ &x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{11}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é linear (em geral ilimitado).

O semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é o operador solução de (11); isto é, dado $x_0 \in X$, $t \mapsto T(t)x_0$ é a solução (em algum sentido) de (11).

Para explicar melhor esta observação consideremos primeiramente o caso $A \in \mathcal{L}(X)$. Neste caso, o semigrupo $t \mapsto T(t)$ é o operador solução (no sentido usual) do problema

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}T(t) = AT(t), \ t > 0, \\ &T(0) = B \in \mathcal{L}(X). \end{aligned} \tag{12}$$

com $B = I$. Esta solução será denotada por $T(t) =: e^{tA}$.

Vamos mostrar que existe uma única solução para (12) e que as propriedades de semigrupo estão satisfeitas.

Isto segue do princípio da contração de Banach que enunciamos a seguir.

Lema

Seja X um espaço métrico completo e $d_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$ sua métrica. Se $F : X \to X$ satisfizer $d_X(F^n(x), F^n(y)) \leqslant \kappa\, d_X(x, y)$ para algum inteiro positivo n e $\kappa < 1$ (F^n é uma contração), então F terá um único ponto fixo $\bar{x} \in X$, isto é, um ponto $\bar{x} \in X$ tal que $F(\bar{x}) = \bar{x}$.

Vamos procurar soluções de (12) que sejam funções pertencentes a $K = \{U(\cdot) \in C([0,\tau], \mathcal{L}(X)) : U(0) = B\}$, a $C^1((0,\tau], \mathcal{L}(X))$ e que verifiquem (12). Em K considere a métrica induzida pela norma

$$\|U(\cdot)\|_{C([0,\tau],\mathcal{L}(X))} = \max_{t\in[0,\tau]} \|U(t)\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

K é um espaço métrico completo e se $F : K \to K$ por

$$F(U)(t) = B + \int_0^t AU(s)ds.$$

Note que $U(\cdot)$ é uma solução de (12) se, e somente se, é um ponto fixo de F em K.

Queremos mostrar que existe um inteiro positivo n tal que F^n é uma contração. De fato:

$$\begin{aligned}\|F(U)(t)-F(V)(t)\| &\leqslant \left|\int_0^t \|AU(s)-AV(s)\|ds\right| \\ &\leqslant |t|\|A\| \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t)-V(t)\| \\ &\leqslant \tau\|A\| \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t)-V(t)\|\end{aligned}$$

Se, para $t \in [0, \tau]$,

$$\|F^{n-1}U(t) - F^{n-1}V(t)\| \leqslant \frac{|t|^{n-1}\|A\|^{n-1}}{(n-1)!} \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t) - V(t)\|,$$

deduzimos que

$$\begin{aligned}\|F^n(U)(t) - F^n(V)(t)\| &\leqslant \left|\int_0^t \|AF^{n-1}U(s) - AF^{n-1}V(s)\| ds\right| \\ &\leqslant \frac{|t|^n\|A\|^n}{n!} \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t) - V(t)\| \\ &\leqslant \frac{|\tau|^n\|A\|^n}{n!} \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t) - V(t)\|.\end{aligned}$$

Como $\frac{|\tau|^n \|A\|^n}{n!} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F^{n_0} é uma contração. Do Princípio da Contração de Banach, F tem um único ponto fixo.

É fácil ver que este ponto fixo é uma função contínuamente diferenciável e que satisfaz (12).

Como a argumentação acima vale para todo $\tau \in \mathbb{R}$ obtemos que toda solução de (12) está globalmente definida.

Vamos agora verificar que a propriedade de semigrupo está satisfeita para a solução $T(t)$ de (12) com $B = I$.

Note que $U(t) = T(t+s)$ e $V(t) = T(t)T(s)$ são soluções de (12) satisfazendo $U(0) = V(0) = T(s)$.

Segue da unicidade de soluções que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Portanto, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados.

É claro que estaremos interessados em situações mais gerais, já que em muitas aplicações o operador A não é limitado.

Reciprocamente, dado um semigrupo de operadores lineares qualquer podemos associá-lo a uma equação differencial, como explicaremos a seguir.

Geradores

Definição

Se $\{T(t), t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu* **gerador infinitesimal** *é o operador definido por* $A : D(A) \subset X \to X$, *onde*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Exemplo

Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ *e defina* $e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$. *Então* $\{e^{At} : t \in \mathbb{R}\}$ *define um grupo uniformemente contínuo com gerador* A *e satisfazendo* $\|e^{A\,t}\| \leqslant e^{|t|\|A\|}$.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$ *converge absolutamente, uniformemente em subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}$, *visto que* $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$, *portanto*

$$\|e^{At}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n t^n}{n!} \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|\,\|A\|)^n}{n!} = e^{|t|\,\|A\|}, \quad t \in \mathbb{R} \quad e$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!}\right\| \leqslant \|A\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|t|\,\|A\|)^n}{n!} = \|A\|e^{|t|\,\|A\|}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Também

$$\|e^{At}-I\| \leqslant |t|\|A\|e^{|t|\|A\|} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Segue que $\{T(t) : t\in\mathbb{R}\}$ *é a única solução de* $\dot{x} = Ax$ *com* $x(0) = I$. *O resultado agora segue das considerações anteriores.*

Alguns resultados fundamentais

O resultado a seguir é extremamente útil na obtenção de propriedades de regularidade de semigrupos.

Lema

Seja ϕ uma função contínua e diferenciável a direita no intervalo $[a, b)$. Se $D^+\phi$ é contínua em $[a, b)$, então ϕ é continuamente diferenciável em $[a, b)$.

Prova: Exercício.

Todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial que é dada no teorema a seguir.

Teorema

Se $\{T(t), t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ for um semigrupo fortemente contínuo, existirão $M \geqslant 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\beta t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Fixado $\ell > 0$, escolhemos $\beta \geqslant \frac{1}{\ell} \log\|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e determinamos M.

Prova: Primeiramente note que existe $\eta > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,\eta]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Isto segue do fato que, para cada sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,\infty)$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0^+$, $\{T(t_n)x\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada para todo $x \in X$ e, do Princípio da Limitação Uniforme, $\{\|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Da propriedade de semigrupo, para qualquer $\ell > 0$,

$$\sup_{t\in[0,\ell]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Escolha $\ell > 0$ e sejam $\sup\{\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, 0 \leqslant t \leqslant \ell\} = M$, $\beta \geqslant \frac{1}{\ell}\log\{\|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}\}$, ou seja, $\|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{\beta\ell}$. Logo

$$\begin{aligned}\|T(n\ell + t)\| = \|T(\ell)^n T(t)\| \leqslant \|T(\ell)\|^n \|T(t)\| &\leqslant Me^{\beta n\ell} \\ &\leqslant Me^{|\beta|\ell} e^{\beta(n\ell+t)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \ell;\ n = 0, 1, 2, \cdots\end{aligned}$$

e a afirmativa segue.$\square$

O teorema a seguir caracteriza completamente os semigrupos uniformemente contínuos de operadores através de seus geradores.

Teorema

Dado um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$, as seguintes afirmativas são equivalentes:

(a) *O semigrupo é uniformemente contínuo,*

(b) *O seu gerador infinitesimal está definido em todo X,*

(c) *Para algum A em $\mathcal{L}(X)$, $T(t) = e^{tA}$.*

Prova: Se $T(t) = e^{tA}$ para algum $A \in \mathcal{L}(X)$ as demais afirmativas foram provadas no Exemplo 1.

Se o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ está globalmente definido, então $\left\{ \left\| \frac{T(t)x - x}{t} \right\|_X \right\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ é limitado para cada x e pelo Princípio da Limitação Uniforme temos que $\left\{ \left\| \frac{T(t) - I}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \right\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ é limitado e portanto $T(t) \to I$ quando $t \to 0^+$.

Resta mostrar que, se $T(t) \overset{t \to 0^+}{\longrightarrow} I$ em $\mathcal{L}(X)$, existe $A \in \mathcal{L}(X)$ com $T(t) = e^{At}$.

Assumindo que $T(t) \to I$ quando $t \to 0^+$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1/2$, $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Ainda, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} \|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(T(h) - I)T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0, \\ \|T(t) - T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(T(h) - I)T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0 \end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$, já que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada em intervalos limitados de $[0, \infty]$.

Portanto $t \to T(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é contínua e a integral $\displaystyle\int_0^t T(s)ds$ está bem definida. Além disso,

$$\left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s)ds - I \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1/2$$

e portanto $\displaystyle\left(\int_0^\delta T(s)ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Defina

$$A = (T(\delta) - I) \left(\int_0^\delta T(s)ds \right)^{-1}.$$

Para cada $h > 0$,

$$h^{-1}(T(h)-I)\int_0^\delta T(s)ds = h^{-1}\left\{\int_h^{\delta+h} T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds\right\}$$
$$= h^{-1}\int_\delta^{\delta+h} T(s)ds - h^{-1}\int_0^h T(s)ds \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} T(\delta) - I.$$

Logo

$$\frac{T(h)-I}{h} \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} A \ \text{ e}$$
$$\frac{T(t+h)-T(t)}{h} = T(t)\frac{T(h)-I}{h} = \frac{T(h)-I}{h}T(t) \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} T(t)A = AT(t).$$

Portanto $t \to T(t)$ tem uma derivada a direita

$$\frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A = AT(t)$$

que é contínua para $t \geqslant 0$.

Segue do Lema 5 que $t \mapsto T(t)$ é continuamente diferenciável e, da unicidade de soluções para o problema $\dot{x} = Ax$, com $x(0) = I$, que $T(t) = e^{At}$, $t \geqslant 0$. $\square$

Em vista desse teorema a teoria de semigrupos concentra-se no estudo dos semigrupos fortemente contínuos e seus geradores.

O resultado a seguir coleta alguns fatos importantes sobre semigrupos fortemente contínuos que serão utilizados com freqüência no restante do capítulo.

Teorema

Seja $\{T(t)\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então,

1. *Para qualquer $x \in X$, $t \to T(t)x$ é contínua para $t \geqslant 0$.*
2. *$t \to \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é semicontínua inferiormente e portanto mensurável.*
3. *Se A é o gerador de $T(t)$; então, A é densamente definido e fechado. Para $x \in D(A)$, $t \mapsto T(t)x$ é cont. diferenciável e*
$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$
4. *$\bigcap_{m\geqslant 1} D(A^m)$ é denso em X.*
5. *Para $\mathrm{Re}\lambda > \beta$, $\lambda \in \rho(A)$ e*
$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt, \quad \forall x \in X$$

Proof: 1. A continuidade de $t \mapsto T(t)x$ é uma consequência da limitação exponencial de $\|T(t)\|$ e, para $t > 0$ e $x \in X$,

$$\|T(t+h)x - T(t)x\|_X = \|(T(h) - I)T(t)x\|_X \stackrel{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

$$\|T(t)x - T(t-h)x\|_X \leq \|T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T(h)x - x\|_X \stackrel{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

2. Mostremos que $\{t \geq 0 : \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} > b\}$ é aberto em $[0, \infty)$ para cada b. Isto implicará o resultado.

Como $\|T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} > b$, existe $x \in X$, $\|x\|_X = 1$ tal que $\|T(t_0)x\| > b$.

Segue de 1. que $\|T(t)x\| > b$ para todo t suficientemente próximo a t_0, logo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} > b$ para t em uma vizinhança de t_0 e o resultado segue.

3. Seja $x \in X$ e, para $\epsilon > 0$, $x_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T(t)x\,dt$. Então $x_\epsilon \stackrel{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} x$ e, para $h > 0$,

$$h^{-1}(T(h)x_\epsilon - x_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon h}\left\{\int_\epsilon^{\epsilon+h} T(t)x\,dt - \int_0^h T(t)x\,dt\right\}$$
$$\stackrel{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{\epsilon}(T(\epsilon)x - x).$$

Logo $x_\epsilon \in D(A)$. Seguirá diretamente de 5. que A é fechado pois $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Se $x \in D(A)$ é claro que

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \{T(t+h)x - T(t)x\} = AT(t)x = T(t)Ax$$

é contínua e qualquer função com derivada a direita contínua é continuamente diferenciável.

4. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $C^\infty(\mathbb{R})$ com $\phi(t) = 0$ em uma vizinhança de $t = 0$ e para todo t sufficientemente grande, seja $x \in X$ e $f = \displaystyle\int_0^\infty \phi(t) T(t) x \, dt$.

Segue facilmente de

$$h^{-1}(T(h)f - f) = h^{-1} \int_h^\infty (\phi(t-h) - \phi(t)) T(t) x \, dt$$

que $f \in D(A)$ e que $Af = -\displaystyle\int_0^\infty \phi'(t) T(t) x \, dt$.

Como $-\phi'$ satisfaz as mesmas condições que ϕ,

$$A^m f = (-1)^m \int_0^\infty \phi^{(m)}(t) T(t)x \, dt$$

para todo $m \geq 1$ e $f \in \cap_{m\geq 1} D(A^m)$.

Para mostrar que $\cap_{m\geq 1} D(A^m)$ é denso em X, escolha ϕ como acima e também satisfazendo que $\displaystyle\int_0^\infty \phi(t)dt = 1$. Assim, se

$$f_n = \int_0^\infty n\phi(nt)T(t)xdt = \int_0^\infty \phi(s)T(s/n)xds,\ \ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

temos que $f_n \in \cap_{m\geq 1} D(A^m)$ e $f_n \to x$ quando $n \to \infty$.

5. Recorde que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\beta t}$. Defina $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ por

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt, \ \mathrm{Re}\lambda > \beta,$$

e note que $\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \beta}$.

Seja $x \in X$ e $h > 0$

$$
\begin{aligned}
h^{-1}(T(h)-I)R(\lambda)x &= R(\lambda)\frac{T(h)x-x}{h} \\
&= h^{-1}\Big[\int_h^\infty e^{-\lambda t+\lambda h}T(t)x\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\Big] \\
&= h^{-1}\Big[-\int_0^h e^{\lambda(h-t)}T(t)x\,dt + \int_0^\infty (e^{\lambda h}-1)e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\Big] \\
&\overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -x+\lambda R(\lambda)x.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Portanto $R(\lambda)x \in D(A)$ e $(\lambda - A)R(\lambda)x = x$, e $\lambda - A$ é sobrejetor. Também, se $x \in D(A)$ então, $R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - x = AR(\lambda)x$.

Segue que $(\lambda - A)R(\lambda)x = x = R(\lambda)(\lambda - A)x$ para todo $x \in D(A)$ e $\lambda - A$ é também um-a-um. Logo $(\lambda - A)$ é uma bijeção de $D(A)$ sobre X com inversa limitada $R(\lambda)$ e a prova está completa.$\square$

Teorema

Sejam $\{T(t), t \geqslant 0\}$ *e* $\{S(t), t \geqslant 0\}$ *semigrupos fortemente contínuos com geradores infinitesimais* A *e* B *repectivamente. Se* $A = B$ *então* $T(t) = S(t)$, $t \geqslant 0$.

Prova: Seja $x \in D(A) = D(B)$. Do Teorema 4 segue facilmente que a função $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é diferenciável e que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.\end{aligned}$$

Portanto $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante e em particular seus valores em $s=0$ e $s=t$ são os mesmos, isto é $T(t)x = S(t)x$.

Isto vale para todo $x \in D(A)$ e como $D(A)$ é denso em X e $S(t)$, $T(t)$ são limitados, $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$.$\square$

Soluções fracas e fortes

Se o semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ for fortemente contínuo, $A : D(A) \subset X \to X$ o seu gerador e $x_0 \in D(A)$ então, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto x(t) := T(t)x_0 \in X$ será continuamente diferenciável e

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), t > 0, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{14}$$

No caso em que $x_0 \in X$ não pertence a $D(A)$, também podemos dar sentido para $x(\cdot)$ como solução de (14). A seguir definimos soluções fracas e fortes.

Definição

a) *Uma função* $x \in C([0,\infty), X) \cap C^1(0,\infty), X)$ *é dita uma* **solução forte** *de* (14) *se* $x(t) \in D(A)$, $\forall\, t > 0$ *e* (14) *vale.*

b) *Uma* **solução fraca** *de* (14) *é uma função* $x \in C([0,\infty), X)$ *tal que* $x(0) = x_0$, *para todo* $x^* \in D(A^*)$, $[0,\infty) \ni t \mapsto \langle x(t), x^* \rangle \in \mathbb{K}$ *é diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), x^* \rangle = \langle x(t), A^* x^* \rangle, \quad t \geqslant 0. \tag{15}$$

O teorema a seguir caracteriza as soluções fracas e fortes de (14).

Teorema

1. *Uma solução forte de (14) é também uma solução fraca.*
2. *Uma função $x : [0, \infty) \to X$ é solução fraca de (14) se, e somente se,*
$$x(t) = T(t)x_0, \quad t \geqslant 0. \tag{16}$$
Em particular, existe uma única solução fraca de (14) e, se $x_0 \in D(A)$, a solução fraca de (14) é também uma solução forte.

Prova: $1.$ e a última parte de $2.$ são triviais.

Vamos provar $2.$ provando que a função dada por (16) é uma solução fraca de (14) e que soluções fracas são únicas.

Defina $x : [0, \infty) \to X$ por (16) e seja $x^* \in D(A^*)$. Para qualquer $x_0 \in D(A)$ $t \mapsto \langle T(t)x_0, x^* \rangle$ é diferenciável com derivada $\langle T(t)x_0, A^*x^* \rangle$ e

$$\langle T(t)x_0, x^* \rangle - \langle x_0, x^* \rangle = \int_0^t \langle T(s)x_0, A^*x^* \rangle ds.$$

Por continuidade a expressão acima vale para todo $x_0 \in X$. Consequentemente, $t \mapsto \langle T(t)x_0, x^* \rangle$ é diferenciável com derivada $\langle T(t)x_0, A^*x^* \rangle$ para todo $x_0 \in X$ e $x(\cdot)$ é uma solução fraca de (14).

A diferença de duas soluções fracas de (14) é uma função contínua $u : [0, \infty) \to X$ que satisfaz $\frac{d}{dt}\langle u(t), x^* \rangle = \langle u(t), A^* x^* \rangle$ para todo $t \geqslant 0$, $u(0) = 0$ e para todo $x^* \in D(A^*)$.

Se $U(t) = \int_0^t u(s)ds$ então,

$$\langle u(t), x^* \rangle = \int_0^t \langle u(s), A^* x^* \rangle ds$$

ou

$$\langle \frac{d}{dt} U(t), x^* \rangle = \langle U(t), A^* x^* \rangle.$$

Note que $(T(t))^* D(A^*) \subset D(A^*)$ para $t \geqslant 0$, pois

$$\langle Ax, (T(t))^* x^* \rangle = \langle T(t)x, A^* x^* \rangle \text{ para } x^* \in D(A^*),\ x \in D(A).$$

Logo, para qualquer $t^* > 0$

$$\langle T(t^* - t) \frac{d}{dt} U(t), x^* \rangle = \langle T(t^* - t) U(t), A^* x^* \rangle$$

e $\frac{d}{dt} \langle T(t^* - t) U(t), x^* \rangle = 0$ para $0 \leqslant t \leqslant t^*$, onde utilizamos que $t \mapsto T(t) u_0$ é uma solução fraca.

Como $U(0) = 0$, $\langle U(t^*), x^* \rangle = 0$, para todo $x^* \in D(A^*)$, portanto (do fato que $D(A^*)$ é total - Exercício) $U(t^*) = 0$ e $u(s) = 0$ para $0 \leqslant s < \infty$. $\square$

Exercício

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado, densamente definido e com* $1 \in \rho(A)$*. Defina em* $D(A)$ *a norma* $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_X$*. Mostre que*

1. $\overline{D(A^2)}^X = X$
2. $Y := (D(A), \|\cdot\|_1)$ *é um espaço de Banach.*
3. $\overline{D(A^2)}^Y = Y$ *(Sugestão: tome* $D(A) \ni f_n \to Ax \in X$*,* $x_n = (I - A)^{-1}(x - f_n)$ *e mostre que* $x_n \to x$ *e* $Ax_n \to Ax$*).*