Análise Funcional II

Prof. Alexandre Nolasco de Carvalho

São Carlos, Abril de 2022

Conteúdo

1 Cálculo de Funções Vetoriais **11**

1.1 Funções analíticas vetoriais 11

1.2 Curvas retificáveis 14

1.3 Integral de Riemann-Stieltjes de funções contínuas 17

1.4 Teoremas de Cauchy e expansão em séries 21

1.5 O Teorema do Máximo Módulo 23

2 Análise Espectral de Operadores Lineares **25**

2.1 O operador resolvente 25

2.2 Operadores lineares limitados 31

2.2.1 Raio espectral 32

2.3 Operadores duais 37

2.4 Operadores compactos 40

2.5 Operadores adjuntos, simétricos e auto-adjuntos 47

2.6 Carateriização minimax de autovalores 53

2.7 Operadores dissipativos e a imagem numérica 56

2.8 Cálculo operacional 62

2.8.1 Cálculo operacional para operadores limitados 62

2.8.2 Cálculo operacional para operadores fechados 65

2.9 Conjuntos espectrais 68

2.10 Pontos isolados do espectro 71
2.11 O Teorema da Aplicação Espectral 75
2.12 Decomposição espectral: $A \in \mathcal{K}(H)$ e auto-adjunto 78
2.13 Continuidade do espectro 80
2.13.1 Perturbação 92
2.14 Primeira prova 94

3 Semigrupos e Seus Geradores **99**
3.1 Definições e resultados básicos 99
3.2 Soluções fracas e fortes 115
3.2.1 Semigrupos fracamente contínuos 117
3.3 O Teorema de Hille-Yosida 120
3.4 O Teorema de Lumer-Phillips 126
3.5 Fórmulas exponenciais 141
3.6 Pseudo-resolventes 145
3.7 O semigrupo dual e o Teorema de Stone 148
3.8 Transformada inversa de Laplace 155
3.9 Operadores setoriais e analiticidade 159

4 Potências Fracionárias **165**
4.1 Introdução 165
4.2 Operadores de tipo positivo 168
4.3 Interpolação e potências fracionárias 175
4.4 Potências fracionárias e semigrupos 182

5 Teoremas de Aproximação **193**
5.1 Teoremas de aproximação de Trotter 193

6 Teoremas Espectrais e Dicotomias **201**

6.1 Decomposição espectral de semigrupos 201

6.2 Teoremas espectrais para semigrupos 204

6.3 Decomposição espectral de operadores setoriais 213

7 Teoremas de Perturbação de Geradores **217**

7.1 Geradores de semigrupos fortemente contínuos 217

7.2 Perturbação de operadores setoriais 222

7.3 Teoremas de representação 224

7.4 Segunda Prova 226

A Redes e Compactos **231**

A.1 Redes 231

A.2 Espaços topológicos compactos 234

B Compacidade Fraca **239**

B.1 O Teorema de Eberlein-Šmulian 239

B.2 O Teorema de Krein-Šmulian 244

C Espaços de Sobolev - Dimensão Um **247**

C.1 Funções com uma derivada fraca 247

C.2 Funções com várias derivadas fracas 262

C.3 O Espaço $W_0^{1,p}(I)$ 263

C.4 Desigualdade de Poincaré 264

D Operadores Elípticos - Geração de Semigrupos Analíticos **267**

E Potências fracionárias: Tópicos adicionais **269**

E.1 Algumas propriedades adicionais interessantes 269

E.2 Potências fracionárias em espaços de Hilbert 278
E.3 Potências de potências fracionárias 280
E.4 Potências imaginárias limitadas 285

Introdução

O objetivo dessas notas é apresentar a teoria espectral de operadores fechados e densamente definidos com o objetivo de resolver equações diferenciais lineares e autônomas em espaços de Banach; isto é, dados um espaço de Banach X, sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, e um operador linear fechado e densamente definido $A : D(A) \subset X \to X$ que $(\overline{D(A)} = X)$, dar condições para que o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax, \quad t > 0, \\ &x(0) = x_0 \in X, \end{aligned} \tag{1}$$

tenha uma única *solução* para cada $x_0 \in X$ e que esta solução dependa continuamente do estado inicial x_0.

Vamos considerar o caso particular $X = \mathbb{C}^n$ e A uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais. Na tentativa de resolver o problema (1) procuramos por soluções da forma $x_\lambda(t) = e^{\lambda t} x_0$. Substituindo esta candidata a solução na equação em (1) temos que x_λ é uma solução se, e somente se, $(\lambda - A)x_0 = 0$, isto é, se, e somente se, λ é um auto-valor de A e x_0 um auto-vetor associado a λ. Assim, a determinação do espectro de A nos leva ao conhecimento de algumas soluções de (1). Um estudo mais detalhado nos permite concluir que todas as soluções podem ser obtidas das propriedades de $(\lambda - A)$. De fato, esta é a maneira como este problema é abordado nos cursos de equações diferenciais ordinárias. Como X é um espaço de Banach de dimensão finita, este tratamento é bastante bem sucedido. Se o espaço X tem dimensão infinita, o operador A pode não ter auto-valores e, mesmo quando tenha, estes podem não oferecer toda a informação sobre as soluções de (1). Precisaremos abordar o problema de uma outra maneira.

Vamos agora tratar este mesmo problema a partir de outra perspectiva. Observe que, da fórmula integral de Cauchy, se $a \in \mathbb{C}$,

$$e^{at} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} e^{\lambda t}(\lambda - a)^{-1} d\lambda$$

onde γ_a é uma curva fechada, retificável e simples em torno de a. Mais geralmente, veremos que

$$e^{At}x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_A} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \, x_0,$$

onde γ_A é uma curva fechada, retificável e simples em torno do zero e com raio $r > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$. A função $x(t) = e^{At}x_0$ é a solução de (1). Veremos, mais adiante, que estas duas formas de abordar o problema são completamente equivalentes.

A segunda forma de abordar o problema nos leva ao estudo dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais $(\lambda - A)$ é bijetor enquanto, na primeira forma de abordar o problema somos levados a estudar os $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais $(\lambda - A)$ deixa de ser injetor. A primeira maneira de abordar o problema está basicamente restrita a espaços de dimensão finita enquanto que a segunda pode ser utilizada para abordar situações mais gerais.

Em ambos os casos o objeto de estudo é a família de operadores $(\lambda - A)$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. O estudo desses operadores e suas propriedades é o que chamamos de teoria espectral para o operador A. Este estudo será o objeto da primeira parte destas notas. Nesta primeira parte também faremos o estudo do cálculo operacional; isto é, para um operador A dado e f em uma certa classe $\mathcal{U}(A)$ como avaliar $f(A)$. A classe $\mathcal{U}(A)$ somente contém $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ no caso $A \in \mathcal{L}(X)$.

A segunda parte do curso será devotada ao estudo da caracterização dos operadores A para os quais podemos estender o cálculo operacional da primeira parte do curso a uma classe de funções que inclua a função $f(\lambda) = e^{\lambda t}$. Para que isto seja possível, precisaremos colocar uma série de restrições sobre o operador A. Aqui o objeto principal de estudo será caracterizar os operadores para os quais podemos incluir $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ na classe dos operadores $\mathcal{U}(A)$.

Se $X = \mathbb{C}^n$ e A é uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais, então A tem $k \leq n$ auto-valores distintos $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ com multiplicidades $\{m_1, \cdots, m_k\}$ e existem subespaços $\{X_1, \cdots, X_k\}$ de X tais que:

- $AX_j \subset X_j$, $1 \leq j \leq k$.
- $(\lambda_j I - A)^{m_j} X_j = 0$, $1 \leq j \leq k$.
- $X_j = R(P_j)$ onde $P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$, onde γ_j é uma curva fechada, retificável e simples, orientada no sentido anti-horário, cujo traço não contém auto-valores e tal que λ_j é o único auto-valor de A no interior de γ_j.
- $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$, $1 \leq i, j \leq k$ e $\sum_{j=1}^k P_j = I$.

Com isto, dado $x_0 \in X$ temos que $x_0 = \sum_{j=1}^k P_j x_0$ e

$$\begin{aligned} e^{At} x_0 &= \sum_{j=1}^{k} e^{At} P_j x_0 = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t} e^{(A-\lambda_j)t} P_j x_0 \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=0}^{m_j - 1} (-1)^i (\lambda_j - A)^i \frac{t^i}{i!} \right) e^{\lambda_j t} P_j x_0 \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
e^{At}x_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_A} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\, x_0 \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} e^{\lambda t}(\lambda - \lambda_j + \lambda_j - A)^{-1}d\lambda\, P_j x_0 \\
&= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} e^{\mu t}(\mu - (A - \lambda_j))^{-1}d\mu\, P_j x_0 \\
&= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} e^{\mu t}\sum_{i=1}^{m_j-1} \mu^{-n-1}(A - \lambda_j)^i d\mu\, P_j x_0 \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{m_j-1}(-1)^i(\lambda_j - A)^i\frac{t^i}{i!}\right)e^{\lambda_j t}P_j x_0
\end{aligned}$$

e ambos os procedimentos nos levam ao mesmo resultado.

Capítulo 1

Cálculo de Funções Vetoriais

Início da Primeira Aula ↓

1.1 Funções analíticas vetoriais

Sejam X, Y espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y.$$

Em particular, se $Y = \mathbb{K}$ escrevemos $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ para denotar o espaço dual de X e $\mathcal{L}(X)$ para denotar $\mathcal{L}(X, X)$.

Se X é um espaço de Banach, $r > 0$ e $x \in X$, a bola aberta (fechada) de centro em x e raio r em X é denotada por $B_r^X(x)$ ($\overline{B}_r^X(x)$) ou simplesmente por $B_r(x)$ ($\overline{B}_r(x)$) quando estiver claro qual é o espaço de Banach envolvido.

Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, diremos que uma função $f : \Omega \to X$ é analítica em Ω se, para cada $\lambda_0 \in \Omega$

existe o limite

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} =: f'(\lambda_0).$$

O valor $f'(\lambda_0)$ do limite acima é chamado derivada de f em λ_0. Observe que, se $f : \Omega \to X$ é analítica e $x^* \in X^*$, então $h := x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica e $h'(\lambda_0) = x^*(f'(\lambda_0))$. Surpreendentemente (já que, em geral, convergência fraca não implica convergência forte), a recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.1.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to X$ uma função tal que $x^* \circ f : \Omega \to C$ é analítica para todo $x^* \in X^*$. Então $f : \Omega \to X$ é analítica.*

Prova: Seja $\lambda_0 \in \Omega$. Como X é completo, é suficiente provar que para cada $\lambda_0 \in \Omega$, a expressão

$$\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{f(\mu) - f(\lambda_0)}{\mu - \lambda_0}$$

tende a zero quando λ e μ tendem a λ_0.

Escolha $r > 0$ tal que o $\bar{B}_r^{\mathbb{C}}(\lambda_0) \subset \Omega$ e denote por γ fronteira de $\bar{B}_r^{\mathbb{C}}(\lambda_0)$ orientada no sentido anti-horário. Para cada $x^* \in X^*$ a função $x^* \circ f : \bar{B}_r \to \mathbb{C}$ é contínua e portanto limitada. Do Princípio da Limitação Uniforme, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|f(\xi)\|_X \leq M, \forall \xi \in \bar{B}_r. \tag{1.1}$$

Agora, se $x^* \in X^*$ e $\lambda, \mu \in \bar{B}_{\frac{r}{2}}$. Pela fórmula integral de Cauchy, se $\zeta \in \bar{B}_{\frac{r}{2}}$, temos

$$x^*(f(\zeta)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \zeta} d\xi. \tag{1.2}$$

Utilizando 1.2 para ζ igual a λ, μ e λ_0, obtemos

$$x^* \left[\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{f(\mu) - f(\lambda_0)}{\mu - \lambda_0} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\lambda - \mu)\ x^*(f(\xi))}{(\xi - \lambda)(\xi - \mu)(\xi - \lambda_0)} d\xi. \tag{1.3}$$

Nossa escolha de λ e μ assegura que $|\lambda-\xi|\geq\frac{r}{2}$ e $|\mu-\xi|\geq\frac{r}{2}$. Disto e de (1.1), segue de (1.3) que

$$\left|x^*\left[\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-\frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0}\right]\right|\leq 4r^{-2}M\|x^*\|_{X^*}|\lambda-\mu|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-\frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0}\right\|_X &= \sup_{\substack{x^*\in X^*\\ \|x^*\|_{X^*}=1}}\left|x^*\left[\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-\frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0}\right]\right|\\ &\leq 4r^{-2}M|\lambda-\mu|.\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.□

A seguir, consideramos funções definidas em subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ com valores no espaço dos operadores lineares e contínuos entre dois espaços de Banach.

Teorema 1.1.2. *Sejam X, Y, espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Se $T:\Omega\to\mathcal{L}(X,Y)$, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) *Para cada $x\in X$ e $y^*\in Y^*$, a função $\Omega\ni\lambda\mapsto y^*(T(\lambda)x)\in\mathbb{C}$ é analítica.*

(b) *Para cada $x\in X$, a função $\Omega\ni\lambda\mapsto T(\lambda)x\in Y$ é analítica.*

(c) *A função $\Omega\ni\lambda\mapsto T(\lambda)\in\mathcal{L}(X,Y)$ é analítica.*

Prova: A prova de $(a)\Rightarrow(b)$ segue diretamente do Teorema 1.1.1, a prova de $(b)\Rightarrow(c)$ é análoga à prova do Teorema 1.1.1 e a prova de $(c)\Rightarrow(a)$ é imediata.□

Estes teoremas permitem que uma parte significativa da teoria de funções de variáveis complexas possa ser transferida para funções com valores vetoriais sem muito esforço adicional.

1.2 Curvas retificáveis

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, uma partição P do intervalo $[a, b]$ é uma coleção de pontos $\{t_0, t_1, \cdots, t_{n_P}\}$, $n_P \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$, tal que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$. A malha $\|P\|$ de uma partição $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$ é o comprimento do maior dos sub-intervalos determinados por ela; isto é, $\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n_P\}$.

Definição 1.2.1.

- *Uma curva é uma função contínua* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.
- *Se* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *é diferenciável e* $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{C}$ *é contínua, diremos que* γ *é uma curva suave.*
- *Uma curva* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *é dita suave por partes se existe uma partição* $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$ *do intervalo* $[a, b]$ *tal que* $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{C}$ *dada por* $\gamma_i(t) = \gamma(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, *é suave* $i = 1, \cdots, n_P$.
- *Uma curva* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *é uma poligonal se existe uma partição* $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$ *do intervalo* $[a, b]$ *tal que*
$$\gamma(t) = \frac{\gamma(t_{i-1})(t_i - t) + \gamma(t_i)(t - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n_P.$$
- *Uma curva* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *é de variação limitada se existe uma constante* $M \geq 0$ *tal que, para toda partição* $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$ *do intervalo* $[a, b]$
$$v(\gamma, P) := \sum_{i=1}^{n_P} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq M.$$
Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *é de variação limitada, a variação de* γ *é definita por*
$$V(\gamma) := \sup\{v(\gamma, P) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}.$$

Quando for importante especificar o intervalo de definição da curva γ escreveremos $V(\gamma,[a,b])$ para denotar a variação da curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$.

Exercício 1.2.1. *Se $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ for de variação limitada $V(\gamma,[a,b])$ então $|\gamma|:[a,b]\to\mathbb{C}$ definida por $|\gamma|(t)=V(\gamma,[a,t])$ será de variação limitada e $V(\gamma,[a,b])=V(|\gamma|,[a,b])$.*

Proposição 1.2.1. *Sejam $\gamma,\sigma:[a,b]\to C$ curvas de variação limitada.*

(a) Se P,Q são partições de $[a,b]$ com $P\subset Q$, então

$$v(\gamma,P)\leq v(\gamma,Q).$$

(b) Se $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, então $\alpha\gamma+\beta\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ definida por $(\alpha\gamma+\beta\sigma)(t)=\alpha\gamma(t)+\beta\sigma(t)$, $t\in[a,b]$ é de variação limitada e $V(\alpha\gamma+\beta\sigma)\leq|\alpha|V(\gamma)+|\beta|V(\sigma)$.

Prova: Exercício.

Proposição 1.2.2. *Se $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ é suave por partes, então γ é de variação limitada e*

$$V(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|dt.$$

Prova: Faremos apenas a prova para o caso em que γ é suave. O caso geral é deixado como exercício para o leitor.

Note que, para toda partição $P:a=t_0<t_1<\cdots<t_{n_P}=b$ do intervalo $[a,b]$, temos que

$$\begin{aligned}v(\gamma,P)&=\sum_{i=1}^{n_P}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n_P}|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\gamma'(t)dt|\leq\sum_{i=1}^{n_P}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\gamma'(t)|dt\\&=\int_a^b|\gamma'(t)|dt.\end{aligned}$$

Consequentemente

$$V(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Como $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{C}$ é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $t, s \in [a,b]$ com $|t-s| < \delta_1$, temos que $|\gamma'(t)-\gamma'(s)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Seja $\delta_2 > 0$ tal que, para toda partição $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$ com malha $\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n_P\} < \delta_2$, temos que

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)|dt - \sum_{i=1}^{n_P} |\gamma'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \forall\, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Logo, se $\|P\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)|dt &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n_P} |\gamma'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n_P} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(\tau_i)dt \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n_P} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)dt \right| + \sum_{i=1}^{n_P} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(\tau_i) - \gamma'(t)]dt \right| \\ &\leq \epsilon + \sum_{i=1}^{n_P} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \epsilon + V(\gamma). \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \leq V(\gamma)$$

e a prova está completa.$\square$

Definição 1.2.2. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva. Diremos que γ é retificável se γ for de variação limitada, diremos que γ é fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e diremos γ é simples se $\gamma : [a,b) \to \mathbb{C}$ for injetiva.*

Observação 1.2.1. *O conjunto $\{\gamma\} = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ é chamado traço da curva $\gamma : [a,b] \to C$. Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é uma curva simples de variação* *limitada, a sua variação $V(\gamma)$ é comprimento de $\{\gamma\}$. O resultado anterior nos diz que, a noção usual de comprimento para o traço de uma curva simples suave por partes é estendida pela noção de variação às curvas de variação limitada.*

1.3 Integral de Riemann-Stieltjes de funções contínuas

Teorema 1.3.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}$ uma curva retificável e $f : [a,b] \to X$ uma função contínua. Então, existe um vetor I em X com a seguinte propriedade: Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|P\| < \delta$, então*

$$\left\| I - \sum_{i=1}^{n_P} f(\tau_i)[\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] \right\|_X < \epsilon, \tag{1.4}$$

para qualquer escolha de $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n_p$. Este vetor I é denotado por $\displaystyle\int_a^b f d\gamma$.

Prova: Seja $\{\delta_m\}$ uma seqüência estritamente decrescente em $(0,\infty)$ com a seguinte propriedade: se $t, s \in [a,b]$ e $|t-s| < \delta_m$, então $\|f(t) - f(s)\|_X < \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Para $m \in \mathbb{N}^*$ defina

$$\mathcal{P}_m = \{\text{partições de } [a,b] \text{ com malha } \|P\| < \delta_m\}.$$

Defina ainda

$$\mathcal{F}_m = \left\{ \sum_{i=1}^{n_P} f(\tau_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) : P \in \mathcal{P}_m \text{ e } \tau_i \in [t_{i-1}, t_i] \right\}.$$

Claramente $\mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \mathcal{P}_3 \supset \cdots$ e $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_2 \supset \cdots$.

Suponha que $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_m) \leq \frac{2}{m} V(\gamma)$ e seja I o único vetor em $\cap_{m\geq 1}\overline{\mathcal{F}_m}$. Dado $\epsilon > 0$ escolha $m > \frac{2}{\epsilon}V(\gamma)$. Como $I \in \overline{\mathcal{F}_m}$, se tomamos $P \in \mathcal{P}_m$, temos que

$$\left\| I - \sum_{i=1}^{n_P} f(\tau_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right\|_X \leq \operatorname{diam}(\overline{\mathcal{F}_m}) \leq \frac{2}{m}V(\gamma) < \epsilon,$$

para cada escolha de $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n_P$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $m > \frac{2}{\epsilon}V(\gamma)$ e $\delta = \delta_m$ temos que, se $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$ é uma partição de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$, então (1.4) vale.

Para concluir a prova, basta mostrar que $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_m) \leq \frac{2}{m}V(\gamma)$. Primeiramente mostremos que, se $P \in \mathcal{P}_m$ e $P \subset Q$, então

$$\|S(P) - S(Q)\|_X < \frac{1}{m}V(\gamma) \tag{1.5}$$

onde

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n_P} f(\tau_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})), \quad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

e

$$S(Q) = \sum_{i=1}^{n_Q} f(\sigma_i)(\gamma(s_i) - \gamma(s_{i-1})), \quad \sigma_i \in [s_{i-1}, s_i].$$

O vetor $S(P)$ é chamado uma soma de Riemann-Stieltjes associada à partição P.

Se $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_P} = b$ e $Q : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p-1} < t^* < t_p < \cdots < t_{n_P} = b$, temos que

$$\begin{aligned} S(Q) &:= \sum_{i=1}^{n_Q} f(\sigma_i)(\gamma(s_i) - \gamma(s_{i-1})) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p}}^{n_P} f(\sigma_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) + f(\sigma)[\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})] + f(\sigma')[\gamma(t_p) - \gamma(t^*)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(P) &:= \sum_{i=1}^{n_P} f(\tau_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n_P} f(\tau_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) + f(\tau_p)[\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})] + f(\tau_p)[\gamma(t_p) - \gamma(t^*)] \end{aligned}$$

e

$$\|S(Q) - S(P)\|_X \leq \sum_{i=1}^{n_Q} \frac{1}{m} |\gamma(s_i) - \gamma(s_{i-1})| = \frac{1}{m} v(\gamma, Q) \leq \frac{1}{m} V(\gamma).$$

Isto prova (1.5) para $P \in \mathcal{P}_m$ e $Q = P \cup \{t^*\}$. O caso geral em que $P \subset Q$ é deixado como exercício.

Se P e Q são duas partições quaisquer em $\mathcal{P}_m$, então

$$\|S(Q) - S(P)\|_X \leq \|S(Q) - S(P \cup Q)\|_X + \|S(P \cup Q) - S(P)\|_X \leq \frac{2}{m} V(\gamma).$$

Isto conclui a prova da estimativa $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_m) \leq \frac{2}{m} V(\gamma)$ e completa a prova do teorema.$\square$

Exercício 1.3.1. *Se $f, g : [a, b] \to X$ são funções contínuas e $\gamma, \sigma : [a, b] \to \mathbb{K}$ são curvas retificáveis, mostre que:*

(a) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, d\gamma = \alpha \int_a^b f\, d\gamma + \beta \int_a^b g\, d\gamma,$

(b) $\displaystyle\int_a^b f\, d(\alpha\gamma + \beta\sigma) = \alpha \int_a^b f\, d\gamma + \beta \int_a^b f\, d\sigma,$

(c) $\displaystyle\int_a^b f\, d\gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i - 1}^{t_i} f\, d\gamma,\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b.$

(d) $\displaystyle\int_a^b f\, d\gamma \leq \int_a^b \|f\|_X\, d|\gamma|$

Definição 1.3.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva retificável, e $f : \{\gamma\} \subset \mathbb{C} \to X$ uma função contínua. A integral de linha de f ao longo de γ é definida por*

$$\int_a^b f \circ \gamma \; d\gamma$$

e denotada por

$$\int_\gamma f(z)dz \quad \text{ou simplesmente} \quad \int_\gamma f.$$

Teorema 1.3.2. *Se X, Y são espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma curva retificável e $f : \{\gamma\} \to X$ é contínua, então*

$$T\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = \int_\gamma T(f(z))dz \tag{1.6}$$

Prova: Basta lembrar que ambas as integrais em (1.6) são limites de somas de Riemann-Stieltjes, que T é contínua e linear.□

Teorema 1.3.3. *Se Xé um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma curva suave por partes e $f : \{\gamma\} \to X$ é contínua, então*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$

Prova: Sabemos que o resultado é verdadeiro se $X = \mathbb{C}$. Consequentemente, usando o Teorema 1.3.2, temos que

$$\begin{aligned} y^*\left(\int_\gamma f(z)\, dz\right) &= \int_\gamma y^* \circ f(z)\, dz = \int_a^b y^*(f(\gamma(t))\gamma'(t))dt \\ &= y^*\left(\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right), \end{aligned}$$

para todo $y^* \in Y^*$. O resultado agora segue do Teorema de Hahn-Banach.□

1.4 Teoremas de Cauchy e expansão em séries

Definição 1.4.1. *Um subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ é chamado um domínio de Cauchy se é aberto, possui um número finito de componentes conexas e a fronteira de Ω é composta por um número finito de curvas fechadas, retificáveis e simples. A fronteira de Ω orientada positivamente é denotada por $+\partial\Omega$.*

Teorema 1.4.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Ω um domínio de Cauchy limitado e $f : \bar{\Omega} \to X$ uma função contínua que é analítica em Ω. Então*

$$\int_{+\partial\Omega} f(z)dz = 0.$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$, a $n-$ésima derivada $f^{(n)}$ de f é analítica em Ω e

$$f^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{n+1}} dz$$

Prova: Primeiramente note que, $z \mapsto x^*(f(z))$ é analítica e que sua derivada é $z \mapsto x^* \circ f'(z) = \frac{d}{dz}(x^* \circ f)(z)$. Como $z \mapsto \frac{d}{dz}(x^* \circ f)(z)$ é analítica, segue do Teorema 1.1.1 que $z \mapsto f'(z)$ é analítica. Segue por indução que $z \mapsto f^{(n)}(z)$ é analítica para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com isto, a prova do resultado é feita utilizando o resultado correspondente para funções a valores complexos; isto é, para todo $x^* \in X^*$ temos que

$$\int_{+\partial\Omega} x^* \circ f(z)\, dz = x^* \left(\int_{+\partial\Omega} f(z)dz \right) = 0$$

e para $n = 0, 1, 2, \cdots$, a $n-$ésima derivada $(x^* \circ f)^{(n)}$ de $x^* \circ f$ é analítica em Ω e

$$\begin{aligned} x^*(f^{(n)}(\lambda)) = (x^* \circ f)^{(n)}(\lambda) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} \frac{(x^* \circ f)(z)}{(z-\lambda)^{n+1}} dz \\ &= x^* \left(\frac{n!}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{n+1}} dz \right). \end{aligned}$$

O resultado agora segue como antes.□

Corolário 1.4.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to X$ uma função analítica, $\lambda_0 \in \Omega$ e $r_0 > 0$ tal que $\overline{B_{r_0}}(\lambda_0) \subset \Omega$. Se $M_{r_0} = \max\{\|f(z)\|_X : z \in \overline{B_{r_0}}(\lambda_0)\}$, então*

$$\|f^{(n)}(\lambda_0)\|_X \leq n! \frac{M_{r_0}}{r_0^n}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

e consequentemente, se $r < r_0$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}$$

converge uniformemente para λ em $\overline{B_r}(\lambda_0)$ e

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}.$$

Para $0 \leq a < b$ e $\zeta \in \mathbb{C}$, denote por $A(\zeta, a, b)$ o anel $\{\lambda \in C : 0 \leq a < |\lambda - \zeta| < b\}$.

Corolário 1.4.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, f uma função analítica em um anel $A = \{\lambda \in C : 0 \leq R_1 < |\lambda - \lambda_0| < R_2\}$. Sejam r, r_1, r_2 números reais positivos tais que $0 \leq R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$ e $\gamma(t) = \lambda_0 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$. Defina*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - \lambda_0)^{n+1}} d\xi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Se $M_{r_1,r_2} = \max\{\|f(z)\|_X : z \in \overline{A(\lambda_0, r_1, r_2)}\}$, então

$$\|a_n\|_X \leq \frac{M_{r_1,r_2}}{r^n}, n \in \mathbb{Z}$$

e consequentemente, se $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$, a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n a_n$$

converge uniformemente para λ em $\overline{A(\lambda_0, \rho_1, \rho_2)}$ e

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n a_n.$$

1.5 O Teorema do Máximo Módulo

Teorema 1.5.1. *Seja X um espaço de Banach complexo e Ω um sub-conjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$. Seja $f : \Omega \to X$ uma função analítica em Ω e suponha que $\|f(\lambda)\|_X$ não é constante em Ω. Então $\|f(\lambda)\|_X$ não pode atingir um máximo absoluto em nenhum ponto de Ω.*

Prova: Suponha que existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $\|f(\lambda_0)\|_X \geq \|f(\lambda)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$. Do Teorema de Hanh-Banach, existe $x^* \in X^*$ com $\|x^*\|_{X^*} = 1$ tal que $x^*(f(\lambda_0)) = \|f(\lambda_0)\|_X$. Segue que $g = x^* \circ f$ é uma função analítica em Ω com $|g(\lambda)| \leq |g(\lambda_0)|$ para todo $\lambda \in \Omega$. Do Teorema do Máximo Módulo para funções com valores em $\mathbb{C}$, g é constante em Ω e $x^*(f(\lambda)) = \|f(\lambda_0)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$. Por outro lado, $\|f(\lambda_0)\|_X = x^*(f(\lambda)) \leq \|f(\lambda)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$ e chegamos a uma contradição com o fato que $\|f(\lambda)\|_X$ não é constante.$\square$

Fim da Primeira Aula $\uparrow$

Capítulo 2

Análise Espectral de Operadores Lineares

Início da Segunda Aula ↓

2.1 O operador resolvente

Definição 2.1.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A é o subconjunto $\rho(A)$ de todos os λ em $\mathbb{C}$ tais que $\lambda - A$ é injetor, $\overline{R(\lambda - A)} = X$ e $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \to X$ é limitado. Para $\lambda \in \rho(A)$, o operador $(\lambda - A)^{-1}$ é chamado operador resolvente. O espectro do operador A é definido por $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.*

Antes de iniciarmos o estudo do conjunto resolvente e dos operadores resolventes de A demonstramos dois lemas auxiliares que nos motivam a restringir este estudo a operadores fechados.

Exercício 2.1.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.*

1. *Mostre que um operador $A : D(A) \subset X \to X$ é fechável (fechado) se, e*

somente se, para cada seqüência $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *(*$x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$*) com* $Ax_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$*, então* $y = 0$ *(*$x \in D(A)$ *e* $Ax = y$*).*

2. *Mostre que, se* $A : D(A) \subset X \to X$ *é um operador linear injetor, então* A *é fechado se, e somente se,* A^{-1} *fechado.*

3. *Mostre que, se* $A : D(A) \subset X \to X$ *é um operador linear injetor tal que* A^{-1} *é fechável e tem fecho injetivo, então* A *é fechável.*

4. *Mostre que se* $A : D(A) \subset X \to X$ *é um operador linear fechado, injetor e* $A^{-1} : R(A) \subset X \to X$ *é limitado, então* $R(A)$ *é fechado.*

O primeiro lema mostra que se um operador é fechável, então o seu conjunto resolvente e o de seu fecho coincidem.

Lema 2.1.1. *Se* $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ *é um operador fechável e* $A : D(A) \subset X \to X$ *é o seu fecho, então* $\rho(A_0) = \rho(A)$*.*

Prova: Suponha inicialmente que $\lambda \in \rho(A)$, então $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e consequentemente $(\lambda - A_0)^{-1} : R(\lambda - A_0) \to X$ é um operador limitado. Se $y \in X$ e $x = (\lambda - A)^{-1}y$, existe uma seqüência $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ com $(\lambda - A_0)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Logo y é limite de pontos $y_n = (\lambda - A_0)x_n \in R(\lambda - A_0)$. Isto Mostra que $\overline{R(\lambda - A_0)} = X$ e, consequentemente $\lambda \in \rho(A_0)$.

Por outro lado, se $\lambda \in \rho(A_0)$, então $(\lambda - A_0)^{-1} : R(\lambda - A_0) \to X$ é um operador limitado e $\overline{R(\lambda - A_0)} = X$. Mostremos que $(\lambda - A)$ é injetor. Se $x \in D(A)$ e $(\lambda - A)x = 0$, existe uma seqüência $\{x_n\}$ em $D(A_0)$ tal que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $(\lambda - A_0)x_n \to 0$. Como $(\lambda - A_0)^{-1}$ é limitada segue que $x = 0$ e $(\lambda - A)$ é injetor. Se $y \in R(\lambda - A)$, existe seqüência $\{y_n\}$ em $R(\lambda - A_0)$ tal que $y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ e $(\lambda - A_0)^{-1}y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (\lambda - A)^{-1}y$, logo $\|(\lambda - A)^{-1}y\|_X \leq c\|y\|_X$.

Segue do Exercício 2.1.1, parte *4*, que a imagem $R(\lambda - A)$ de $\lambda - A$ é fechada e do fato que $R(\lambda - A) \supset R(\lambda - A_0)$ temos que $R(\lambda - A) = X$.$\square$

O segundo lema da condições sob as quais um operador que tem conjunto resolvente não vazio é fechável.

Lema 2.1.2. *Suponha que um operador $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ tenha conjunto resolvente $\rho(A_0)$ não vazio.*

1. *Se para algum $\lambda_0 \in \rho(A_0)$, $\overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}$ é injetivo, então A_0 é fechável.*

2. *Se A_0 é fechável, então $\overline{(\lambda - A_0)^{-1}}$ é injetivo para todo $\lambda \in \rho(A_0)$.*

Prova: *1.* Como $\lambda_0 \in \rho(A_0)$, $x_n \in D(A_0)$, $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $(\lambda_0 - A_0)x_n \to y$, segue que $\overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}y = 0$ e $y = 0$. Logo $(\lambda_0 - A_0)$ é fechável.

2. Segue diretamente do Lemma 2.1.1 pois, para todo $\lambda \in \rho(A_0) = \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}$ é uma extensão fechada de $(\lambda - A_0)^{-1}$ (mostre que $\overline{(\lambda - A_0)^{-1}} = (\lambda - A)^{-1}$). $\square$

Observação 2.1.1. • *Existem operadores com resolvente não vazio que não são fecháveis. Considere $X = \ell^1(\mathbb{C}) = \left\{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}$ com a norma $\|\{x_n\}\|_{\ell^1(\mathbb{C})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Seja $T : D(T) \subset X \to X$ definido por*

$$D(T) = \{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \textit{ exceto para um número finito de } n's\}$$
$$T\{x_n\} = \left\{\sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} x_j\right\}.$$

É fácil ver que T é injetivo, ilimitado e que $T(D(T)) = D(T)$. Além disso $T^{-1} : D(T) \subset X \to X$ é dado por

$$T^{-1}\{x_n\} = \left\{x_n - \frac{(n+1)^2}{n^2} x_{n+1}\right\}, \textit{ para todo } \{x_n\} \in D(T).$$

e portanto claramente limitado Segue que $0 \in \rho(T)$. *O operador extensão* A *de* T^{-1} *a* X *é definido pela mesma regra acima e não é injetivo* $A\{\frac{1}{n^2}\} = 0$. *Segue da parte 2. do Lemma 2.1.2 que* T *não é fechável.*

- *Veremos mais adiante (Teorema 3.4.2) que os operadores densamente definidos que são dissipativos são fecháveis. É na classe dos operadores densamente definidos e dissipativos que se encontram todos os operadores para os quais* (1) *faz sentido.*

Em vista desses resultados restringiremos o nosso estudo aos operadores $A : D(A) \subset X \to X$ que são fechados e apenas em alguns casos específicos a operadores fecháveis.

Note que se $A : D(A) \subset X \to X$ é fechado e $\lambda \in \rho(A)$, então $R(\lambda - A) = X$. Ainda, se $\lambda - A : D(A) \to X$ é bijetor, segue do Teorema do Gráfico Fechado que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Com isto, a definição de conjunto resolvente pode ser reformulada da seguinte maneira.

Definição 2.1.2. *Seja* X *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado. O conjunto resolvente de* A *é o subconjunto* $\rho(A)$ *de todos os* λ *em* $\mathbb{C}$ *tais que* $\lambda - A$ *é bijetor.*

O espectro $\sigma(A)$ de um operador fechado $A : D(A) \subset X \to X$ pode ser decomposto em três partes disjuntas

(i) O conjunto dos auto-valores de A é chamado de espectro pontual $\sigma_p(A)$ de A; isto é, $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda - A) \text{ não é injetor}\}$.

(ii) O espectro residual $\sigma_r(A)$ de A é definido por $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda - A) \text{ é injetor e } \overline{R(\lambda - A)} \subsetneq X\}$.

(iii) O espectro contínuo $\sigma_c(A)$ de A é definido por $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda - A)$ é injetor, $R(\lambda - A) \subsetneq X$ e $\overline{R(\lambda - A)} = X\}$.

Claramente $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A)$ com união disjunta. Em espaços de dimensão finita, segue do Teorema do Núcleo e Imagem que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Em espaços de dimensão infinita $\sigma_r(A)$ e $\sigma_c(A)$ podem ser não vazios.

Exemplo 2.1.1. *Seja* $X = \ell^2(\mathbb{C}) = \big\{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty\big\}$ *com a norma* $\|\{x_n\}\|_{\ell^2(\mathbb{C})} = \big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\big)^{\frac{1}{2}}$ *e* $A : X \to X$ *definido por* $A\{x_n\} = \big\{\frac{x_n}{n+1}\big\}$. *Note que* A *é limitado, injetor, sua imagem é densa mas não existe seqüência* $\{x_n\}$ *em* $\ell^2(\mathbb{C})$ *tal que se* $A\{x_n\} = \{\frac{1}{n+1}\}$. *Logo* $0 \in \sigma_c(A)$.

Exemplo 2.1.2. *Seja* X *como no exemplo anterior e* $A : X \to X$ *definido por* $A\{x_n\} = \{0, x_1, x_2, x_2, \cdots\}$. *Note que* A *é injetor mas sua imagem não é densa. Logo* $0 \in \sigma_r(A)$.

Teorema 2.1.1. *Seja* X *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado. Então* $\rho(A)$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{C}$ *e consequentemente* $\sigma(A)$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{C}$. *De fato, se* $\mu \in \rho(A)$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é tal que* $|\mu - \lambda| \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, *então* $\lambda \in \rho(A)$ *e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-n-1} \tag{2.1}$$

Prova: Se $\mu \in \rho(A)$, então $(\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, escrevemos

$$(\lambda - A) = (\mu - A)[I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}]$$

e se $|\mu - \lambda| \, \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, segue que $\lambda \in \rho(A)$ e (2.1) está demonstrada. $\square$

Fim da Segunda Aula $\uparrow$

Início da Terceira Aula ↓

Teorema 2.1.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Se $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \tag{2.2}$$

e

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \tag{2.3}$$

Prova: Note que

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1} &= (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} \\ &= (\mu - A)^{-1}[(\mu - A) + (\lambda - \mu)I](\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1},\end{aligned}$$

o que prova (2.2). A prova de (2.3) é imediata de (2.2).□

Corolário 2.1.1. *Seja X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado. Então, a função $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é analítica e*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n!(\lambda - A)^{-n-1}.$$

Prova: Fixe $\lambda_0 \in \rho(A)$ e observe que, de (2.2) e do fato que (2.1) converge uniformemente para

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{2\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

$\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é contínua em λ_0. Novamente utilizando (2.2) temos que $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é derivável em λ_0 e

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1} = -(\lambda - A)^{-2}.$$

O caso geral segue da identidade

$$(\lambda-A)^{-n}-(\mu-A)^{-n}=$$
$$((\lambda-A)^{-1}-(\mu-A)^{-1})[(\mu-A)^{-n+1}+(\mu-A)^{-n+2}(\lambda-A)^{-1}+\cdots+(\lambda-A)^{-n+1}]$$

e de um simples argumento de indução.□

2.2 Operadores lineares limitados

Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Nesta seção estudamos algumas particularidades no estudo do espectro de operadores limitados.

Teorema 2.2.1. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n. \tag{2.4}$$

Consequentemente $\sigma(A)$ é compacto e, se $R > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, a série acima converge uniformemente em $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq R\}$.

Prova: O resultado segue simplesmente notando-se que $(\lambda - A) = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$.□

Teorema 2.2.2. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$, então $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Prova: Suponha que $\rho(A) = \mathbb{C}$. Então $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é inteira e, para $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Segue do Teorema 1.5.1 que $(\lambda - A)^{-1} = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ o que é um absurdo.□

2.2.1 Raio espectral

Se $A \in \mathcal{L}(X)$, vimos que $\sigma(A)$ é não vazio e compacto. O raio espectral $r_\sigma(A)$ de A é definido por

$$r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in \sigma(A)\}$$

Teorema 2.2.3. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$, então a série* (2.4) *é convergente para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > r_\sigma(A)$ e divergente se $|\lambda| < r_\sigma(A)$. Consequentemente*

$$r_\sigma(A) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}.$$

Prova: Como $(\lambda - A)^{-1}$ é analítica em $\rho(A)$, ela tem uma série de Laurent convergente para $|\lambda| > r_\sigma(A)$. Do Teorema 2.2.1, a série de Laurent de $(\lambda - A)^{-1}$ em $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\}$ é dada por (2.4) e segue da unicidade da unicidade da série de Laurent que (2.4) vale para $|\lambda| > r_\sigma(A)$.

Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$$

é convergente em $\mathcal{L}(X)$, é fácil ver que sua soma é $(\lambda - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{-n} A^{n-1}$ é convergente sempre que $|\mu| > |\lambda|$. Logo, o raio de convergência desta série é $r_\sigma(A)$ e a série é divergente para $|\lambda| < r_\sigma(A)$.$\square$

Teorema 2.2.4. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. Então a seqüência $\{\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}.$$

Se X é um espaço de Banach complexo então

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}.$$

Prova: Se $a_n = \log \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}$, devemos provar que

$$a_n/n \to b = \inf_{n\geq 1} a_n/n.$$

É fácil ver que $a_{m+n} \leq a_n + a_m$. Logo, se m é um inteiro positivo fixo, seja $n = mq + r$, onde q, r são inteiros não negativos com $0 \leq r < m$, temos que $a_n \leq q a_m + a_r$ e

$$a_n/n \leq q/n\, a_m + 1/n\, a_r.$$

Se $n \to \infty$ e m está fixo, $q/n \to 1/m$ pois a variação de r está restrita aos números $0, 1, 2, \cdots, m-1$. Logo, $\limsup_{n\to\infty} a_n/n \leq a_m/m$. Como m é arbitrário temos que $\limsup a_n/n \leq b$. Por outro lado, $a_n/n \geq b$ e $\liminf_{n\to\infty} a_n/n \geq b$. Isto prova o resultado.$\square$

Note que, de (2.1), se $|\xi - \xi_0| < \|(\xi_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^{-1}$ temos que $\xi \in \rho(A)$ e

$$(\xi - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_0 - \xi)^n (\xi_0 - A)^{-n-1} \tag{2.5}$$

e se $|\xi - \xi_0| > \|(\xi_0 - A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ temos que $\xi \in \rho(A)$ e

$$(\xi - A)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\xi_0 - \xi)^{-n-1} (\xi_0 - A)^n \tag{2.6}$$

Assim, o raio de convergência da série de Taylor em (2.5) é o recíproco do raio espectral do operador $(\xi_0 - A)^{-1}$ enquanto que o raio de convergência da série de Laurent em (2.5) é o raio espectral de $(\xi_0 - A)$. Portanto, nos círculos $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \xi_0| = (r_\sigma(\xi_0 - A)^{-1})^{-1}\}$ e $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \xi_0| = r_\sigma((\xi_0 - A))\}$ existem pontos de $\sigma(A)$.

A seguir vamos mostrar uma versão do Teorema da Aplicação Espectral para polinômios. Seja $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,\ a_i \in \mathbb{C}$,

$0 \leq i \leq n$. Se $A \in \mathcal{L}(X)$, definimos

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

e, se $B \subset \mathbb{C}$, definimos $p(B) := \{p(b) : b \in B\}$.

Teorema 2.2.5. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é um polinômio, então*

i) $\sigma_p(p(A)) = p(\sigma_p(A))$,

ii) $\sigma_r(p(A)) = p(\sigma_r(A)) \backslash p(\sigma_p(A))$,

iii) $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ *e*

iv) $\sigma_c(p(A)) = p(\sigma_c(A)) \backslash (p(\sigma_p(A)) \cup p(\sigma_r(A)))$.

Prova: Seja $p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq n$ um polinômio. É facil ver que para todo escalar $\alpha \in \mathbb{C}$, e $T \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(\alpha T) = \{\alpha\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(T)\} =: \alpha\sigma(T)$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $a_n = (-1)^n$.

Se $\beta_1, \cdots, \beta_n$ são as raízes do polinômio $q(\lambda) = \mu - p(\lambda)$, então

$$\mu - p(A) = q(A) = (\beta_1 - A) \cdots (\beta_n - A). \tag{2.7}$$

i) Se $\mu - p(A)$ não é injetor, segue de (2.7) que existe i_0 com $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $(\beta_{i_0} - A)$ não é injetor. Reciprocamente, se para algum i_0 com $1 \leq i_0 \leq n$ não é injetor, segue de (2.7) que $\mu - p(A)$ não é injetor. Isto mostra que $\sigma_p(p(A)) = p(\sigma_p(A))$.

ii) Se $\mu \in \sigma_r(p(A))$, $\mu - p(A)$ é injetor e, de (2.7), $(\beta_i - A)$ é injetor para todo $1 \leq i \leq n$. Além disso, $R(\mu - p(A))$ não é densa e consequentemente, para algum $1 \leq i_0 \leq n$ devemos ter que $R(\beta_{i_0} - A)$ não é densa. Segue que $\beta_{i_0} \in \sigma_r(A)$ e $p(\beta_{i_0}) = \mu$. Isto mostra que $\sigma_r(p(A)) \subset p(\sigma_r(A)) \backslash p(\sigma_p(A))$.

Por outro lado, se $\mu \in p(\sigma_r(A))\backslash p(\sigma_p(A))$, segue de (2.7) que $(\beta_i - A)$ é injetor para todo $1 \leq i \leq n$ (já que $\sigma_p(p(A)) = p(\sigma_p(A))$ e também que, para algum $1 \leq i_0 \leq n$, $R(\beta_{i_0} - A)$ não é densa. Disto segue que $\mu - p(A)$ é injetor mas $R(\mu - p(A))$ não é densa e $\mu \in \sigma_r(p(A))$. Segue que $p(\sigma_r(A))\backslash p(\sigma_p(A)) \subset \sigma_r(p(A))$ e a prova de $ii)$ está completa.

$iii)$ Note de (2.7) que $\mu \in \rho(p(A))$ se, e somente se, $\beta_i \in \rho(A)$ para todo $i \leq i \leq n$. Isto mostra que $p(\sigma(A)) = \sigma(p(A))$.

$iv)$ Segue de $i)$, $ii)$ e $iii)$ que

$$\sigma_c(p(A)) = p(\sigma(A))\backslash(p(\sigma_p(A)) \cup p(\sigma_r(A))) = p(\sigma_c(A))\backslash(p(\sigma_p(A)) \cup p(\sigma_r(A))).\square$$

Exemplo 2.2.1. *Sejam* $X = \ell^2(\mathbb{C})$, $T : \ell^2(\mathbb{C}) \mapsto \ell^2(\mathbb{C})$ *o operador linear definido por* $T(\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}) = \{x_1, 0, x_2, x_3, \ldots\}$ *e* $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$. *É fácil ver que* $0 \in \sigma_r(T)$ *e portanto* $p(0) = 0 \in p(\sigma_r(T))$. *Por outro lado, vemos que* $p(0) = 0 \notin \sigma_r(p(T))$, *pois*

$$p(T)(\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}) = (\{0, 0, -x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \cdots\})$$

e $p(T)$ *não é um operador injetor.*

A seguir, damos uma prova alternativa do Teorema 2.2.4 usando o Teorema 2.2.5. De fato, nas condições do Teorema 2.2.4 e Teorema 2.2.5, $\sigma(A^n) = \{z^n : z \in \sigma(A)\}$ e $r_\sigma(A)^n = r_\sigma(A^n) \leq \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $r_\sigma(A) \leq \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}$. Assim,

$$r_\sigma(A) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}$$

e o limite existe e $r_\sigma(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}$.

Definição 2.2.1. *Seja* X *um espaço de Banach complexo e* $A \in \mathcal{L}(X)$. *Diremos que* A *é nilpotente se existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $A^{n_0} = 0$ *e que* A *é quase-nilpotente se* $\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemplo 2.2.2. *Seja* $T : \ell^1(\mathbb{C}) \to \ell^1(\mathbb{C})$ *definido por*

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \cdots).$$

É fácil ver que $\|T^n\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} \leq \frac{1}{n!}$ *e portanto* T *é quase-nilpotente e* $\sigma(T) = \{0\}$.

Exercício 2.2.1. *Se* A *é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(X)$ *é um operador nilpotente dado e* $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, *calcule* $(\lambda - A)^{-1}$.

Fim da Terceira Aula $\uparrow$

Início da Quarta Aula ↓

2.3 Operadores duais

A seguir recordamos a definição de operadores duais. Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ com duais X^* e Y^*. Se $x^* \in X^*$ ($y^* \in Y^*$) denotaremos o seu valor em um vetor $x \in X$ ($y \in Y$) por $\langle x, x^* \rangle$ ($\langle y, y^* \rangle$). Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear com domínio denso. O dual $A^* : D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ de A é o operador linear definido por: $D(A^*)$ é o conjunto dos $y^* \in Y^*$ para os quais existe $z^* \in X^*$ satisfazendo

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, z^* \rangle, \quad \forall\, x \in D(A). \tag{2.8}$$

Se $y^* \in D(A^*)$ definimos $A^*y^* := z^*$ onde z^* é o (único) elemento de X^* satisfazendo (2.8).

Exercício 2.3.1. *Se X é um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear densamente definido, mostre que $A^* : D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ é um operador linear fechado.*

Começamos com alguns resultados básicos sobre operadores duais.

Lema 2.3.1. *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$; então, $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ e $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}$.*

Prova: Para todo $y^* \in Y^*$, $y^* \circ A$ é um funcional linear contínuo e portanto determina um único elemento $x^* \in X^*$ para o qual $\langle x, x^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle$, para todo $x \in X$. Segue que $D(A^*) = Y^*$. Além disso,

$$\begin{aligned}\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} &= \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leq 1} \|A^*y^*\|_{X^*} = \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leq 1} \sup_{\|x\|_X\leq 1} |\langle x, A^*y^*\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|_X\leq 1} \sup_{\|y^*\|_{X^*}\leq 1} |\langle Ax, y^*\rangle| = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|Ax\|_Y \\ &= \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.\square\end{aligned}$$

Lema 2.3.2. *Seja X um espaço de Banach reflexivo sobre $\mathbb{K}$. Se $A : D(A) \subset X \to X$ é fechado e densamente definido então $D(A^*)$ é denso em X^*.*

Prova: Se $D(A^*)$ não é denso em X^* então existe um elemento $x \in X$ tal que $x \neq 0$ e $\langle x, x^*\rangle = 0$ para todo $x^* \in D(A^*)$. Como A é fechado seu gráfico é fechado e não contém $(0, x)$. Do Teorema de Hahn-Banach existem x_1^* e x_2^* em X^* tais que $\langle x, x_1^*\rangle - \langle Ax, x_2^*\rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$ e $\langle 0, x_1^*\rangle - \langle x, x_2^*\rangle \neq 0$. Segue que $x_2^* \neq 0$, $\langle x, x_2^*\rangle \neq 0$, $x_2^* \in D(A^*)$ e $A^*x_2^* = x_1^*$. Isto implica que $\langle x, x_2^*\rangle = 0$ o que é uma contradição. Portanto $D(A^*)$ é denso em X^*.$\square$

Exercício 2.3.2. *Exiba um exemplo de operador fechado, densamente definido $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $\overline{D(A^*)} \subsetneq X$.*

Exercício 2.3.3. *O* **anulador** *de um subconjunto $M \subset X$ é o conjunto $M^\perp = \{x^* \in X^* : \langle x, x^*\rangle = 0, \forall x \in M\}$ e o* **anulador** *de $M^* \subset X^*$ é o conjunto $(M^*)^\perp = \{x \in X : \langle x, x^*\rangle = 0, \forall x^* \in M^*\}$. Sabemos que se $M \subset X$ é um espaço vetorial então $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$ (veja [3]).*

Um subconjunto $M^* \subset X^*$ é dito **total** *se $(M^*)^\perp = \{0\}$. Mostre que, se $A : D(A) \subset X \to X$ é fechado e densamente definido então, $D(A^*)$ é total.*

Teorema 2.3.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Então*

$$\rho(A) = \rho(A^*) \text{ e } ((\lambda - A)^{-1})^* = (\lambda - A^*)^{-1}, \forall\, \lambda \in \rho(A)$$

Prova: Da definição de dual temos $(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$. Se $\lambda - A$ é injetor e tem imagem densa, mostremos que

(1) $((\lambda I - A)^{-1})^*(\lambda I^* - A^*)x^* = x^*, \quad \forall x^* \in D(A^*)$ e

(2) $(\lambda I^* - A^*)((\lambda I - A)^{-1})^* x^* = x^*, \quad \forall x^* \in D(((\lambda I - A)^{-1})^*)$.

Prova de (1): Se $x \in R(\lambda - A)$, $x^* \in D(A^*)$, então

$$\langle x, x^* \rangle = \langle (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x, x^* \rangle = \langle (\lambda I - A)^{-1}x, (\lambda I^* - A^*)x^* \rangle.$$

Segue que $(\lambda I^* - A^*)x^* \in D(((\lambda I - A)^{-1})^*)$ $(R(\lambda I^* - A^*) \subset D(((\lambda I - A)^{-1})^*))$ e, do fato que $\overline{R(\lambda I - A)} = X$, temos que

$$((\lambda I - A)^{-1})^*(\lambda I^* - A^*)x^* = x^*, \quad \forall x^* \in D(A^*).$$

Prova de (2): Se $x^* \in D(((\lambda I - A)^{-1})^*)$ e $x \in D(A)$, então

$$\langle x, x^* \rangle = \langle (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x, x^* \rangle = \langle (\lambda I - A)x, ((\lambda I - A)^{-1})^* x^* \rangle.$$

Logo $((\lambda I - A)^{-1})^* x^* \in D(\lambda I^* - A^*)$ e, do fato que $\overline{D(A)} = X$, temos que

$$(\lambda I^* - A^*)((\lambda I - A)^{-1})^* x^* = x^*, \quad \forall x^* \in D(((\lambda I - A)^{-1})^*).$$

Agora podemos completar a prova do teorema. Se $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado e temos que $((\lambda I - A)^{-1})^* \in \mathcal{L}(X^*)$. De (1) e (2) segue que $(\lambda I^* - A^*)^{-1} = ((\lambda I - A)^{-1})^*$ e $\lambda \in \rho(A^*)$.

Se $\lambda \in \rho(A^*)$, note que A^* é fechado e consequentemente $(\lambda I^* - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*)$. Já sabemos que $\lambda I - A$ tem domínio denso. Mostremos que $\lambda I - A$ é injetivo e tem imagem densa.

Para ver que $\lambda I - A$ é injetivo note que, se $x \in D(A)$ é tal que $(\lambda - A)x = 0$ e $x^* \in D(A^*)$, então

$$0 = \langle (\lambda I - A)x, x^* \rangle = \langle x, (\lambda I^* - A)^* x^* \rangle.$$

Como $R(\lambda I^* - A^*) = X^*$ temos que $x = 0$ e portanto $\lambda I - A$ é injetivo.

Agora, para ver que $\lambda I - A$ tem imagem densa note que, se $x^* \in X^*$ é tal que $0 = \langle (\lambda I - A)x, x^* \rangle$ para todo $x \in D(A)$, então $x^* \in D(A^*)$ e $0 = \langle x, (\lambda I - A)^* x^* \rangle$ para todo $x \in D(A)$. Como $D(A)$ é denso em X segue que $(\lambda I - A)^* x^* = 0$ e, como $\lambda \in \rho(A^*)$, obtemos que $x^* = 0$. Isto prova que $R(\lambda I - A)$ é denso em X.

Para concluir que $\lambda \in \rho(A)$, resta provar que $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado. Se $x^* \in X^* = R(\lambda I^* - A^*) \subset D(((\lambda I - A)^{-1})^*)$ e $x \in R(\lambda I - A)$, de (1) e (2), temos

$$\begin{aligned} |\langle (\lambda I - A)^{-1} x, x^* \rangle| = |\langle x, ((\lambda I - A)^{-1})^* x^* \rangle| &= |\langle x, (\lambda I^* - A^*)^{-1} x^* \rangle| \\ &\leq \|(\lambda I^* - A^*)^{-1}\| \, \|x^*\| \, \|x\| \end{aligned}$$

Disto segue que $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado e prova que $\lambda \in \rho(A)$, completando a demonstração.$\square$

2.4 Operadores compactos

Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Diremos que um operador linear $K : X \to Y$ é compacto se $K(B_1^X(0))$ é um subconjunto relativamente compacto de Y. Denotamos por $\mathcal{K}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares compactos $K : X \to Y$.

Exercício 2.4.1. *Seja $X = C([a, b], \mathbb{C})$ e $k \in C([a, b] \times [a, b], \mathbb{C})$. Defina $K \in \mathcal{L}(X)$ por*

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds.$$

Mostre que $K \in \mathcal{L}(X)$ e, usando o Teorema de Arzelá Ascoli, mostre que $K \in \mathcal{K}(X)$.

Teorema 2.4.1. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Então $\mathcal{K}(X,Y)$ é um supespaço fechado de $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Prova: Se $\mathcal{K}(X,Y) \ni K_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} K \in \mathcal{L}(X,Y)$ na topologia de $\mathcal{L}(X,Y)$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$K(B_1^X(0)) \subset K_{n_\epsilon}(B_1^X(0)) + B_\epsilon^Y(0).$$

Disto segue facilmente que $K(B_1^X(0))$ é totalmente limitado (logo relativamente compacto) em Y.$\square$

Exercício 2.4.2. *Seja $X = \ell^2(\mathbb{C})$ e $A : X \to X$ como no Exemplo 2.1.1. Já sabemos que A é limitado e $0 \in \sigma_c(A)$. Mostre que A é compacto.*

Fim da Quarta Aula $\uparrow$

Início da Quinta Aula ↓

Teorema 2.4.2. *Sejam X, Y, Z espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$,*

(a) se $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ ou $B \in \mathcal{K}(Y,Z)$, então $B \circ A \in \mathcal{K}(X,Z)$,

(b) se $A \in \mathcal{K}(X,Y)$, então $A^* \in \mathcal{K}(Y^*,X^*)$ e

(c) se $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ e $R(A)$ é um subespaço fechado de Y, então $R(A)$ tem dimensão finita.

Prova: As provas de (a) e (c) são deixadas como exercício para o leitor. Para provar (b) mostraremos que se $\{x_n^*\}$ é uma seqüência em $A^*(B_1^{Y^*}(0))$, então ela possui uma subseqüência convergente.

Considere o espaço $C(\overline{A(B_1^X(0))}, \mathbb{K})$. Note que, para $y^* \in B_1^{Y^*}(0)$ e $z \in A(B_1^X(0))$ existe $x \in B_1^X(0)$ tal que $z = Ax$ e, consequentemente,

$$|y^*(z)| = |y^*(Ax)| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Além disso, se $z_1, z_2 \in \overline{A(B_1^X(0))}$

$$|y^*(z_1) - y^*(z_2)| \leq \|z_1 - z_2\|_Y.$$

Desta forma $\mathcal{F} = \{y^*|_{\overline{A(B_1^X(0))}} : y^* \in B_1^{Y^*}(0)\}$ é uma família uniformemente limitada e equicontínua de $C(\overline{A(B_1^X(0))}, \mathbb{K})$. Segue do Teorema de Arzelá Ascoli que, se $x_n^* = y_n^* \circ A$ com $y_n^* \in B_1^{Y^*}(0)$, existe uma subseqüência $y_{n_k}^*$ de $\{y_n^*\}$ tal que

$$\begin{aligned}\sup_{x \in B_1^X(0)} |x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| &= \sup_{x \in B_1^X(0)} |y_{n_k}^* \circ A(x) - y_{n_l}^* \circ A(x)| \\ &= \sup_{z \in A(B_1^X(0))} |y_{n_k}^*(z) - y_{n_l}^*(z)| \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Logo $\{x_n^*\}$ tem uma subseqüência convergente para algum $x^* \in X^*$ e a prova de (b) está concluída.$\square$

Se X é um espaço de Banach, uma projeção $P : X \to X$ é uma transformação linear contínua tal que $P^2 = P$ e $P \in \mathcal{K}(X)$ se, e somente se, $Z = R(P)$ tem dimensão finita. De fato, se Z tem dimensão finita, então qualquer subconjunto limitado de Z é relativamente compacto e consequentemente $P(B_1^X(0))$ é relativamente compacto. Por outro lado, se $P(B_1^X(0)) \supset B_1^Z(0)$ é relativamente compacto, segue do Teorema 6.5 em [3] que Z tem dimensão finita. Claramente o operador identidade $I : X \to X$ é compacto se, e somente se, X tem dimensão finita e, consequentemente, se $A \in \mathcal{K}(X)$ e X tem dimensão infinita então $0 \in \sigma(A)$ (se não, $I = A \circ A^{-1}$ é compacto e $\dim(X) < \infty$).

Teorema 2.4.3. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$. Se $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, então $N((\lambda - A)^n)$ tem dimensão finita, $n = 1, 2, 3, \cdots$.*

Prova: Consideremos primeiramente o caso $n = 1$. Claramente $N((\lambda - A))$ é fechado e se $x \in N((\lambda - A))$, $x = \lambda^{-1} A x$. Logo o operador identidade em $N((\lambda - A))$ é compacto e $N((\lambda - A))$ tem dimensão finita.

O caso geral segue do caso anterior observando-se que

$$(\lambda - A)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \binom{n}{k} (-1)^k A^k = \lambda^n I + A_\lambda$$

onde $A_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} \binom{n}{k} (-1)^k A^k \in \mathcal{K}(X)$.$\square$

Exercício 2.4.3. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que se $N(T^{n_0}) = N(T^{n_0+1})$ então $N(T^n) = N(T^{n+1})$ para todo $n \geq n_0$.* [1]

[1]Sugestão: Mostre que $N(T^{n+1}) = \{x \in X : Tx \in N(T^n)\}$.

Teorema 2.4.4. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{K}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N((\lambda-A)^{n+1}) = N((\lambda-A)^n)$ para todo $n \geq n_0$.*

Prova: Basta provar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N((\lambda - A)^{n_0+1}) = N((\lambda - A)^{n_0})$. Claramente $N((\lambda - A)^n)$ é fechado e $N((\lambda - A)^n) \subset N((\lambda - A)^{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $N((\lambda - A)^n) \subsetneq N((\lambda - A)^{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do do Lema 6.1 em [3], para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in N((\lambda - A)^{n+1})$ tal que $\|x_n\|_X = 1$ e $\|x_n - x\|_X \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in N((\lambda - A)^n)$. Logo, se $1 \leq m < n$,

$$Ax_n - Ax_m = \lambda x_n + (-\lambda x_m + (\lambda - A)x_m - (\lambda - A)x_n) = \lambda x_n - z,$$

onde $z = -\lambda x_m + (\lambda - A)x_m - (\lambda - A)x_n \in N((\lambda - A)^n)$. Logo

$$\|Ax_n - Ax_m\|_X = |\lambda|\|x_n - \lambda^{-1}z\|_x \geq \frac{|\lambda|}{2}$$

e $\{Ax_n\}$ não possui uma subseqüência convergente e A não é compacto. Esta contradição prova o teorema.$\square$

Se $N(\lambda - A) \neq \{0\}$ temos que λ é um auto-valor de A; isto é, $\lambda \in \sigma_p(A)$. Neste caso, a multiplicidade geométrica de λ é a dimensão de $N(\lambda - A)$ e, existe um menor inteiro positivo n_0 tal que $N((\lambda - A)^{n_0}) = N((\lambda - A)^{n_0+1})$, diremos que $N((\lambda-A)^{n_0})$ é o auto espaço generalizado associado ao auto-valor λ e que $\dim(N((\lambda - A)^{n_0}))$ é a multiplicidade algébrica de λ.

Observe que, se X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$, do Teorema 6.6 (c) em [3], $R(\lambda-A) = X$ se, e somente se, $N(\lambda-A) = \{0\}$. Logo $\lambda \in \rho(A)$ se, e somente se, $N(\lambda - A) = \{0\}$. Segue que, todos os pontos em $\sigma(A)\backslash\{0\}$ são auto-valores.

Lema 2.4.1. *Seja X um espaço de Banach com dimensão infinita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$. Se $\{\lambda_n\}$ é uma seqüência de números distintos tais* *que*

$$\lambda_n \to \lambda$$
$$\lambda_n \in \sigma(A)\backslash\{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $\lambda = 0$*; isto é, todo ponto de* $\sigma(A)\backslash\{0\}$ *é isolado.*

Prova: Como $\lambda_n \in \sigma_p(A)$, seja $x_n \neq 0$ tal que $(\lambda_n - A)x_n = 0$ e $X_n = [x_1, \ldots, x_n]$. Mostremos que $X_n \subsetneq X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Basta mostrar que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha, por indução, que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores e mostremos que $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ também o é. Se $x_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+1}\alpha_i x_i = \lambda_{n+1}x_{n+1} = Ax_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i.$$

Disto segue que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i)x_i = 0 \text{ e portanto } \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Com isto $x_{n+1} = 0$, o que é uma contradição. Portanto $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores. Como $x_1 \neq 0$ obtemos que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é um conjunto linearmente de independente de vetores para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X_n \subsetneq X_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note ainda que $(\lambda_n - A)X_n \subset X_{n-1}$ (pois $(\lambda_n - A)x_n = 0$).

Aplicando o Lema de Riesz (Lema 6.1 em [3]), construímos $\{y_n\}$ tal que $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$ e $\text{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq \dfrac{1}{2}$ para $n \geq 2$. Se $2 \leq m < n$, então

$$X_{m-1} \subset X_m \subset X_{n-1} \subset X_n.$$

e,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Ay_n}{\lambda_n}-\frac{Ay_m}{\lambda_m}\right\| &= \left\|\overbrace{\frac{(\lambda_m-A)y_m}{\lambda_m}-\frac{(\lambda_n-A)y_n}{\lambda_n}-y_m}^{\in X_{n-1}}+y_n\right\| \\ &\geq \operatorname{dist}(y_n,X_{n-1})\geq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Se $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, então a seqüência $\left\{\dfrac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ é limitada e, do fato que A é compacta, $\left\{\dfrac{Ay_n}{\lambda_n}\right\}$ tem uma subseqüência convergente, e temos uma contradição. Logo $\lambda = 0$. $\square$

O teorema a seguir sintetiza os resultados obtidos acima a cerca do espectro de um operador compacto.

Teorema 2.4.5. *Seja X um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$. Então todo ponto de $\sigma(A)\backslash\{0\}$ é um auto-valor, $\sigma(A)$ contém no máximo um número contável de pontos e o conjunto dos pontos de acumulação de $\sigma(A)$ é vazio ou $\{0\}$.*

Frequentemente os operadores compactos surgem como inversa de operadores ilimitados. Estes operadores são os chamados operadores com resolvente compacto que definimos a seguir.

Definição 2.4.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e com resolvente não vazio. Diremos que A tem* ***resolvente compacto*** *se para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$ temos que $(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{K}(X)$.*

É uma conseqüência simples da identidade do resolvente (2.2) que se A tem resolvente compacto, então $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Exemplo 2.4.1. *Seja* $X = \{f \in C([0,1],\mathbb{K}) : f(0) = 0\}$ *e* $A : D(A) \subset X \to X$ *o operador linear definido por* $D(A) = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{K}) : f(0) = f'(0) = 0\}$ *e* $Af = f'$ *para* $f \in D(A)$. *É fácil ver que* A *é um operador fechado, densamente definido e que* $0 \in \rho(A)$. *Para ver que* A^{-1} *é compacto, basta aplicar o Teorema de Arzelá-Ascoli.*

Exercício 2.4.4. *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado com* $0 \in \rho(A)$. *Em* $D(A)$ *defina a norma do gráfico* $\|x\|_{G(A)} = \|x\|+\|Ax\|$ *e denote por* Y *o espaço* $D(A)$ *munido da norma* $\|\cdot\|_{G(A)}$. *Mostre que* Y *é um espaço de Banach e que se* Y *está compactamente imerso em* X, *então* A *tem resolvente compacto.*

2.5 Operadores adjuntos, simétricos e auto-adjuntos

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_H : H \times H \to \mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador densamente definido. O adjunto $A^\bullet$ de A é definido por

$$D(A^\bullet) = \{u \in H : v \mapsto \langle Av, u\rangle_H : D(A) \to \mathbb{K} \text{ é limitado}\}$$

e, se $u \in D(A^\bullet)$, $A^\bullet u$ é o único elemento de H tal que

$$\langle v, A^\bullet u\rangle_H = \langle Av, u\rangle_H, \forall v \in D(A).$$

Observação 2.5.1. *Se* H *é um espaço de Hilbert sobre* $\mathbb{C}$, $E : H \to H^*$ *definido por* $Eu(v) = \langle v, u\rangle$, *é uma isometria linear-conjugada entre* H *e* H^*. *A identificação entre* H *e* H^* *consiste em identificar* u *com* Eu. *Se* $A^* : D(A^*) \subset X^* \to X^*$ *é o dual de* A, *então* $A^\bullet = E^{-1} \circ A^* \circ E$. *Note ainda que, embora* E *e* E^{-1} *sejam operadores lineares-conjugados,* $E^{-1} \circ A^* \circ E$ *é um operador linear por dupla conjugação. Chamaremos ambos* $A^\bullet$ *e* A^*

de adjunto de A e denotaremos ambos por A^* mas é importante observar que, se $A = \alpha B$ então $A^\bullet = \bar{\alpha} B'$ enquanto que $A^* = \alpha B^*$. Desta forma, $(\lambda I - A)' = \bar{\lambda} I - A^\bullet$ enquanto que $(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$.

Daqui em diante usaremos a notação A^* para denotar os operadores dual e adjunto, indistintamente. Nos referiremos a ambos como operador adjunto.

Definição 2.5.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diremos que um operador $A : D(A) \subset H \to H$ é simétrico (também chamado Hermitiano quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$; isto é, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ para todo $x, y \in D(A)$. Diremos que A é auto-adjunto se $A = A^*$.*

Exercício 2.5.1. *Seja H um espaço de Hilbert. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador densamente definido, então $A^\bullet : D(A^\bullet) \subset H \to H$ é fechado. Além disso, se A é fechado, então $A^\bullet$ é densamente definido.*

Exercício 2.5.2. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Mostre que, se $A : D(A) \subset H \to H$ é simétrico e $\lambda \in \mathbb{K}$ é um auto-valor de A, então $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso,*

$$\inf_{\|x\|_H = 1} \langle Ax, x \rangle \leq \lambda \leq \sup_{\|x\|_H = 1} \langle Ax, x \rangle.$$

Exercício 2.5.3. *Seja $H = \mathbb{C}^n$ com o produto interno usual. Se $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ é uma matriz com coeficientes complexos que representa um operador linear em $A \in \mathcal{L}(H)$, encontre $A^\bullet$ e A^*.*

Exercício 2.5.4. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador densamente definido. Mostre que $G(A^*) = \{(-Ax, x) : x \in D(A)\}^\perp$ (aqui $M^\perp$ representa o ortogonal de M).*

Fim da Quinta Aula $\uparrow$

Início da Sexta Aula ↓

Proposição 2.5.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador auto-adjunto, injetor e com imagem densa, então A^{-1} é auto-adjunto.*

Prova: Como A é auto-adjunto, é fácil ver que

$$\{(x, -Ax) : x \in D(A)\}^{\perp} = \{(Ax, x) : x \in D(A)\} = G(A^{-1}).$$

Como A é injetor e tem imagem densa, segue facilmente do Exercício 2.5.4,

$$G((A^{-1})^*) = \{(-A^{-1}x, x) : x \in R(A)\}^{\perp} = G(A^{-1}).$$

Logo $A^{-1} = (A^{-1})^*$.□

Teorema 2.5.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador simétrico e sobrejetor, então A é auto-adjunto.*

Prova: Primeiramente mostremos que A e A^* são injetores. Se $x \in D(A)$ e $Ax = 0$, temos que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todo $y \in D(A)$ e consequentemente, do fato que $R(A) = X$ temos que $x = 0$. Para ver que A^* é injetor procedemos da mesma forma.

Agora mostremos que A é fechado. De fato, se $D(A)^* \supset D(A) \ni x_n \to x \in X$ e $Ax_n = A^*x_n \to y$, então $x \in D(A^*)$ e $A^*x = y$. Como A é sobrejetor, existe $w \in D(A)$ tal que $Aw = A^*w = A^*x$ e da injetividade de A^* temos que $w = x$. Com isto $x \in D(A)$ e $Ax = y$, mostrando que A é fechado.

Segue que do Teorema do Gráfico Fechado que a A tem inversa $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Claramente A^{-1} é auto-adjunto e da Proposição 2.5.1 segue que A é auto-adjunto.□

O teorema a seguir e o Teorema 2.5.1 constituem as principais ferramentas para a obtenção de operadores auto-adjuntos.

Teorema 2.5.2 (Friedrichs)**.** *Seja X um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador simétrico para o qual existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle Ax, x\rangle \leq \alpha\|x\|^2 \text{ ou } \langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2 \tag{2.9}$$

para todo $x \in D(A)$. Então A admite uma extensão auto-adjunta que preserva a limitação (2.9)*.*

Prova: Vamos fazer a prova apenas no caso em que $\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2$ para todo $x \in D(A)$ e para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. O outro caso pode ser deduzido deste considerando o operador $-A$. Também consideraremos apenas o caso $\alpha = 1$ pois o caso geral pode ser deduzido deste considerando o operador $A+(1-\alpha)I$.

Em $D(A)$ considere o produto interno $D(A) \times D(A) \ni (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle \in \mathbb{K}$. Claramente, a norma $D(A) \ni x \mapsto \|x\|_{\frac{1}{2}} = \langle Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^+$ resultante deste produto interno satisfaz $\|x\|_{\frac{1}{2}} \geq \|x\|$. Denote por $X^{\frac{1}{2}}$ o completamento de $D(A)$ relativamente à norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$.

Mostremos que $X^{\frac{1}{2}}$, como conjunto, está em correspondência biunívoca com um subconjunto do completamento de $D(A)$ relativamente à norma $\|\cdot\|$. É claro que toda seqüência $\{x_n\}$ em $D(A)$ que é de Cauchy relativamente à norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ é também de Cauchy relativamente à norma $\|\cdot\|$.

Para concluir a injetividade mostraremos, por redução ao absurdo que, se $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy relativamente à norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ para a qual $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{\frac{1}{2}} = a > 0$, não podemos ter que $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$. Se a tese é falsa, temos que

$$\begin{aligned}2\text{Re}\langle Ax_n, x_m\rangle &= \langle Ax_n, x_n\rangle + \langle Ax_m, x_m\rangle - \langle A(x_n - x_m), (x_n - x_m)\rangle \\ &\overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 2a^2\end{aligned}$$

o que é um absurdo pois $\langle Ax_n, x_m\rangle \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Como X é completo, $X^{\frac{1}{2}}$ pode ser identificado com um subconjunto de X.

Seja $\tilde{D} = D(A^*) \cap X^{\frac{1}{2}}$. Como $D(A) \subset D(A^*)$, devemos ter que $D(A) \subset \tilde{D} \subset D(A^*)$. Definimos $\tilde{A}$ tomando a restrição de A^* a $\tilde{D}$ e mostraremos que $\tilde{A}$ é auto-adjunto.

Primeiramente mostremos que $\tilde{A}$ é simétrico. Se $x, y \in \tilde{D}$ existem seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ em $D(A)$ que $\|x_n - x\|_{\frac{1}{2}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\|y_n - y\|_{\frac{1}{2}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Segue que $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, y_m\rangle = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\langle Ax_n, y_m\rangle = \langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}}$ existe e coincide com

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\langle Ax_n, y_m\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, \tilde{A}y\rangle = \langle x, \tilde{A}y\rangle \text{ e com}$$
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, y_m\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle x, Ay_m\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle \tilde{A}x, y_m\rangle = \langle \tilde{A}x, y\rangle.$$

Assim $\tilde{A}$ é simétrico.

Para concluir a demonstração é suficiente mostrar que $\tilde{A}$ é sobrejetor e isto segue da seguinte forma. Seja $y \in X$ e considere o funcional $f : D(A) \to \mathbb{K}$ dado por $f(x) = \langle x, y\rangle$. Então f é um funcional linear contínuo relativamente à norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ e pode ser estendido a um funcional linear contínuo de $X^{\frac{1}{2}}$ e sendo assim, do Teorema de representação de Riesz, existe $y' \in X^{\frac{1}{2}}$ tal que

$$f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle Ax, y'\rangle,\ \forall x \in D(A).$$

Logo $y' \in D(A^*) \cap X^{\frac{1}{2}}$ e $A^*y' = \tilde{A}y' = y$ mostrando que $\tilde{A}$ é sobrejetor.$\square$

Exemplo 2.5.1. *Seja $X = L^2(0,\pi)$ e $D(A_0) = C_0^2(0,\pi)$ o conjunto das funções duas vezes continuamente diferenciáveis e que tem suporte compacto em $(0,\pi)$. Defina $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ por*

$$(A_0\phi)(x) = -\phi''(x), \quad x \in (0,\pi).$$

É fácil ver que A_0 *é simétrico e que* $\langle A_0\phi, \phi\rangle \geq \frac{2}{\pi^2}\|\phi\|_X^2$ *para todo* $\phi \in D(A_0)$*. Do Teorema 2.5.2,* A_0 *possui uma extensão auto adjunta* A *que satisfaz* $\langle A\phi, \phi\rangle \geq \frac{2}{\pi^2}\|\phi\|_X^2$ *para todo* $\phi \in D(A)$*. Observe que o espaço* $X^{\frac{1}{2}}$ *do Teorema de Friedrichs é, neste exemplo o fecho de* $D(A)$ *na norma* $H^1(0,\pi)$ *e portanto* $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(0,\pi)$*. Por outro lado* $D(A^*)$ *é characterizado por*

$$D(A_0^*) = \{\phi \in X : \exists\, \phi^* \in X \text{ tal que } \langle -u'', \phi\rangle = \langle u, \phi^*\rangle,\ \forall u \in D(A_0)\}$$

e $A_0^*u = -u''$ *para todo* $u \in D(A_0^*)$*. Assim,* $D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ *e* $Au = -u''$ *para todo* $u \in D(A)$*.*

Também do Teorema 2.5.2 sabemos que $(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{\pi}) \subset \rho(A)$*. Em particular* $0 \in \rho(A)$ *e se* $\phi \in D(A)$*, temos que* $|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}\|\phi'\|_{L^2(0,\pi)} = |x-y|^{\frac{1}{2}}\langle A\phi, \phi\rangle^{\frac{1}{2}}$*. Assim, se* B *é um conjunto limitado de* $D(A)$ *com a norma do gráfico, então* $\sup_{\phi\in B}\|\phi'\|_{L^2(0,\pi)} < \infty$ *e a família* B *de funções é equicontínua e limitada em* $C([0,\pi],\mathbb{R})$ *com a topologia da convergência uniforme. Segue do teorema de Arzelá-Ascoli que* B *é relativamente compacto em* $C([0,\pi],\mathbb{R})$ *e consequentemente* B *é relativamente compacto em* $L^2(0,\pi)$*. Do Exercício 2.4.4 temos que* A^{-1} *é um operador compacto. Segue que* $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$ *onde* $\lambda_n = n^2 \in \sigma_p(A)$ *com auto-funções* $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(nx)$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Fim da Sexta Aula ↑

Início da Sétima Aula ↓

2.6 Caraterização minimax de autovalores

Nesta seção apresentamos caracterizações dos auto-valores de operadores compactos e auto-adjuntos via princípio do minimax. Para apresentar estas caracterizações vamos precisar do seguinte lema

Lema 2.6.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto, então*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\substack{\|u\|=1\\ \|v\|=1}} |\langle Au, v\rangle| = \sup_{\|u\|=1} |\langle Au, u\rangle|.$$

Prova: Basta mostrar que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\substack{\|u\|=1\\ \|v\|=1}} |\langle Au, v\rangle| \leq \sup_{\|u\|=1} |\langle Au, u\rangle| := a.$$

Se $u, v' \in H$, $\|u\| = \|v'\| = 1$, $|\langle Au, v'\rangle|\, e^{i\alpha} = \langle Au, v'\rangle$ e $v = e^{i\alpha} v'$, temos que

$$\begin{aligned} |\langle Au, v'\rangle| = \langle Au, v\rangle &= \frac{1}{4}[\langle A(u+v), u+v\rangle - \langle A(u-v), u-v\rangle] \\ &\leq \frac{a}{4}[\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2] = a. \end{aligned}$$

Isto completa a prova.□

Exercício 2.6.1. *Mostre que, se $0 \neq A \in \mathcal{L}(H)$ é auto-adjunto, então A não é quase-nilpotente.*

Teorema 2.6.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(H)$ um operador auto-adjunto tal que $\langle Au, u\rangle \geq 0$ para todo $u \in H$. Então,*

1. *$\lambda_1 := \sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1\}$ é um auto-valor e existe $v_1 \in H$, $\|v_1\| = 1$ tal que $\lambda_1 = \langle Av_1, v_1\rangle$. Além disso $Av_1 = \lambda_1 v_1$.*

2. Indutivamente,

$$\lambda_n := \sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1 \ e \ u \perp v_j, 1 \leq j \leq n-1\} \tag{2.10}$$

é um auto-valor de A e existe $v_n \in H$, $\|v_n\| = 1$, $v_n \perp v_j$, $1 \leq j \leq n-1$, tal que $\lambda_n = \langle Av_n, v_n\rangle$. Além disso, $Av_n = \lambda_n v_n$.

3. Se $\mathcal{V}_n = \{F \subset H : F$ é um subsepaço vetorial de dimensão n de $H\}$,

$$\lambda_n = \inf_{F\in\mathcal{V}_{n-1}} \sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \perp F\}, \ n \geq 1 \ e \tag{2.11}$$

$$\lambda_n = \sup_{F\in\mathcal{V}_n} \inf\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \in F\}, \ n \geq 1. \tag{2.12}$$

Prova: Consideraremos apenas os caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\lambda_1 > 0$ deixando os demais como exercício para o leitor.

1. Seja $\{u_n\}$ é uma seqüência em H com $\|u_n\| = 1$ e $\langle Au_n, u_n\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$. Tomando subseqüências se necessário, $\{u_n\}$ converge fracamente para $v_1 \in H$ e $\{Au_n\}$ converge fortemente para Av_1. Logo $\langle Av_1, v_1\rangle = \lambda_1$.

Mostremos que a seqüência $\{u_n\}$ converge fortemente. Do Lemma 2.6.1 sabemos que $0 < \lambda_1 = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ e do fato que $\{u_n\}$ converge fracamente para v_1 temos que $0 < \|v_1\| \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|Au_n - \lambda_1 u_n\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|Au_n\|^2 - 2\lambda_1 \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle + \lambda_1^2 \\ &= \|Av_1\|^2 - \lambda_1^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Como $\{Au_n\}$ converge fortemente para Av_1, $\{Au_n - \lambda_1 u_n\}$ converge fortemente para zero e $\lambda_1 > 0$, temos que $\{u_n\}$ converge fortemente para v_1, $\|v_1\| = 1$ e $Av_1 = \lambda_1 v_1$.

2. A prova deste ítem segue de *1.* simplesmente notando que o ortogonal de $H_n = \text{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ é invariante por A e repetindo o mesmo procedimento para a restrição de A a $H_n^\perp$.

3. Vamos primeiramente provar (2.11). Se $G = \text{span}\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ temos de (2.10) que

$$\lambda_n = \sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \perp G\} \geq \inf_{F \in \mathcal{V}_{n-1}} \sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \perp F\}.$$

Por outro lado, seja $F \in \mathcal{V}_{n-1}$ e $w_1, \cdots, w_{n-1}$ um conjunto ortonormal de F. Escolha $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ tal que $\|u\| = 1$ e $u \perp w_j$, $1 \leq j \leq n-1$. Logo $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$ e

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i \geq \lambda_n.$$

Isto implica que

$$\sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \perp F\} \geq \lambda_n, \text{ para todo } F \in \mathcal{V}_{n-1}.$$

Isto completa a prova de (2.11).

Vamos agora provar (2.12). Se $G = \text{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ e $u \in G$, $\|u\| = 1$, temos que $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ com $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$ e

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i \geq \lambda_n.$$

Isto implica que

$$\sup_{F \in \mathcal{V}_n} \inf\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \in F\} \geq \lambda_n.$$

Reciprocamente, dado $F \in \mathcal{V}_n$ escolha $u \in F$, $\|u\| = 1$, tal que $u \perp v_j$, $1 \leq j \leq n-1$. Segue de (2.10) que $\langle Au, u\rangle \leq \lambda_n$ e consequentemente

$$\inf\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \in F\} \leq \lambda_n, \text{ para todo } F \in \mathcal{V}_n.$$

Isto completa a prova de (2.12).$\square$

Exercício 2.6.2. *Se $A : D(A) \subset H \to H$ é auto-adjunto, positivo ($\langle Au, u\rangle > 0$ para todo $u \in D(A)$) e tem inversa compacta, encontre uma caracterização minimax dos auto-valores de A.*

2.7 Operadores dissipativos e a imagem numérica

Definição 2.7.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. A aplicação dualidade $J : X \to 2^{X^*}$ é uma função multívoca definida por*

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \mathrm{Re}\langle x, x^*\rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}.$$

$J(x) \neq \emptyset$, pelo Teorema de Hahn-Banach.

Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é **dissipativo** *se para cada $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\,\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Exercício 2.7.1. *Mostre que se X^* é uniformemente convexo e $x \in X$, então $J(x)$ é unitário.*

Lema 2.7.1. *O operador linear A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\| \tag{2.13}$$

para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Prova: Se A é dissipativo, $\lambda > 0$, $x \in D(A)$, $x^* \in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$,

$$\|\lambda x - Ax\|\|x\| \geq |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \geq \mathrm{Re}\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \geq \lambda\|x\|^2$$

e (2.13) segue. Reciprocamente, dado $x \in D(A)$ suponha que (2.13) vale para todo $\lambda > 0$. Se $y_\lambda^* \in J((\lambda - A)x)$ e $g_\lambda^* = y_\lambda^*/\|y_\lambda^*\|$ temos

$$\begin{aligned}\lambda\|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| = \langle \lambda x - Ax, g_\lambda^*\rangle = \lambda\mathrm{Re}\langle x, g_\lambda^*\rangle - \mathrm{Re}\langle Ax, g_\lambda^*\rangle \\ &\leq \lambda\|x\| - \mathrm{Re}\langle Ax, g_\lambda^*\rangle\end{aligned} \tag{2.14}$$

Como a bola unitária de X^* é compacta na topologia fraca* temos que existe $g^* \in X^*$ com $\|g^*\| \leq 1$ tal que g^* é um ponto limite da seqüência $\{g_n^*\}$ [existe uma sub-rede (veja Capítulo A) de $\{g_n^*\}$ que converge para g^*]. De (2.14) segue que $\mathrm{Re}\langle Ax, g^*\rangle \leq 0$ e $\mathrm{Re}\langle x, g^*\rangle \geq \|x\|$. Mas $\mathrm{Re}\langle x, g^*\rangle \leq |\langle x, g^*\rangle| \leq \|x\|$ e portanto $\mathrm{Re}\langle x, g^*\rangle = \|x\|$. Tomando $x^* = \|x\|g^*$ temos $x^* \in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$. Portanto, para todo $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$ e A é dissipativo.□

Teorema 2.7.1 (G. Lumer)**.** *Suponha que A é um operador linear em um espaço de Banach X. Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é fechado, $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \forall\, \lambda > 0.$$

Prova: Se $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$, do Lemma 2.7.1 temos que

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\|.$$

Agora $R(\lambda_0 - A) = X$, $\|(\lambda_0 - A)x\| \geq \lambda_0\|x\|$ para $x \in D(A)$, logo λ_0 está no conjunto resolvente de A e A é fechado. Seja $\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$. Λ é um conjunto aberto em $(0, \infty)$ já que $\rho(A)$ é aberto, provaremos que Λ é também fechado em $(0, \infty)$ para concluir que $\Lambda = (0, \infty)$. Suponha que $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda > 0$, se n é suficientemente grande temos que $|\lambda_n - \lambda| \leq \lambda/3$ então, para n grande, $\|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq |\lambda_n - \lambda|\lambda_n^{-1} \leq 1/2$ e $I + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}$ é um isomorfismo de X. Então

$$\lambda - A = \left\{I + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\right\}(\lambda_n - A) \tag{2.15}$$

leva $D(A)$ sobre X e $\lambda \in \rho(A)$, como queríamos. □

Corolário 2.7.1. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos, então $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1, \forall\, \lambda > 0.$$

Prova: Pelo Teorema 2.7.1 é suficiente provar que $R(I-A)=X$. Como A é dissipativo e fechado, $R(I-A)$ é um subespaço fechado de X. Seja $x^*\in X^*$, tal que $\langle (I-A)x, x^*\rangle = 0$ para todo $x\in D(A)$. Isto implica que $x^*\in D(A^*)$ e $(I^*-A^*)x^*=0$. Como A^* é também dissipativo segue do Lema 2.7.1 que $x^*=0$. Segue que $R(I-A)$ é denso em X e, como $R(I-A)$ é fechada, $R(I-A)=X$.$\square$

Em muitos exemplos, a técnica utilizada para obter estimativas para o operador resolvente de um operador dado, bem como localizar o seu espectro, é a determinação de sua **imagem numérica** (definida a seguir).

Se A é um operador linear em um espaço de Banach complexo X a sua imagem numérica $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) := \{\langle Ax, x^*\rangle : x\in D(A),\ x^*\in X^*,\ \|x\|=\|x^*\|=\langle x, x^*\rangle = 1\}. \quad (2.16)$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x\in D(A), \|x\| = 1\}.$$

Fim da Sétima Aula $\uparrow$

Início da Oitava Aula ↓

Teorema 2.7.2. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A.*

1. *Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é injetora e tem imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq d(\lambda, W(A))\|x\|. \tag{2.17}$$

onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$. Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}. \tag{2.18}$$

2. *Se Σ é um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C}\backslash W(A)$ e $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e (2.48) está satisfeita para todo $\lambda \in \Sigma$.*

Prova: Seja $\lambda \notin \overline{W(A)}$. Se $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ e $\langle x, x^* \rangle = 1$ então

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leq |\lambda - \langle Ax, x^* \rangle| = |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \leq \|\lambda x - Ax\| \tag{2.19}$$

e portanto $\lambda - A$ é um-a-um, tem imagem fechada e satisfaz (2.47). Se além disso $\lambda \in \rho(A)$ então (2.19) implica (2.48).

Resta mostrar que se Σ intersepta $\rho(A)$ então $\rho(A) \supset \Sigma$. Para este fim considere o conjunto $\rho(A) \cap \Sigma$. Este conjunto é obviamente aberto em Σ. Mas também é fechado já que $\lambda_n \in \rho(A) \cap \Sigma$ e $\lambda_n \to \lambda \in \Sigma$ implica que para n suficientemente grande $|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n, W(A))$. Disto e de (2.48) segue que para n grande, $|\lambda - \lambda_n| \; \|(\lambda_n - A)^{-1}\| < 1$ e, como na prova do Teorema 2.1.1, temos que $\lambda \in \rho(A)$ e portanto $\rho(A) \cap \Sigma$ é fechado em Σ. Segue que $\rho(A) \cap \Sigma = \Sigma$ ou seja $\rho(A) \supset \Sigma$, como queríamos.$\square$

Exemplo 2.7.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto. Segue que A é fechado e densamente definido. Se A é limitado superiormente; isto é, $\langle Au, u\rangle \leq a\langle u, u\rangle$ para algum $a \in \mathbb{R}$, então $\mathbb{C}\backslash(-\infty, a] \subset \rho(A)$, e*

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para alguma constante $M \geq 1$ dependendo somente de φ e para todo $\lambda \in \Sigma_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \varphi\}$, $\varphi < \pi$.

Prova: Vamos começar localizando a imagem numérica de A. Primeiramente note que

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in D(A), \|x\| = 1\} \subset (-\infty, a].$$

Note que $A - a = A^* - a$ são dissipativos e portanto, do Corolário 2.7.1, $\rho(A - a) \supset (0, \infty)$. Do Teorema 2.7.2 temos que $\mathbb{C}\backslash(-\infty, a] \subset \rho(A)$ e que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))} \leq \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])}.$$

Além disso, se $\lambda \in \Sigma_{a,\varphi}$ temos que

$$\frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])} \leq \frac{1}{\sin\varphi}\frac{1}{|\lambda - a|}$$

e o resultado segue.$\square$

Exercício 2.7.2. *Seja X um espaço de Banach tal que X^* é estritamente convexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado, densamente definido e dissipativo. Se $\overline{R(I - A)} = X$, mostre que $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > 0\}$ e que*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}, \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{0,\frac{\pi}{2}}.$$

A hipótese que X^* seja estritamente convexo é necessária?

Proposição 2.7.1. *Sejam H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto. Se*

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Au, u \rangle, \ M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Au, u \rangle,$$

então $\{m, M\} \subset \sigma(A) \subset [m, M]$.

Prova: Da definição de M temos que $\langle Au, u \rangle \leq M\|u\|^2$, $\forall u \in H$. Disto segue que, se $\lambda > M$, então

$$\langle \lambda u - Au, u \rangle \geq \underbrace{(\lambda - M)}_{>0} \|u\|^2. \tag{2.20}$$

Com isto, é fácil ver que $a(v, u) = \langle v, \lambda u - Au \rangle$ é uma forma bilinear, simétrica ($a(u, v) = \overline{a(v, u)}$ para todo $u, v \in H$), contínua e coerciva. Segue do Teorema de Lax-Milgram que

$$\langle v, \lambda u - Au \rangle = \langle v, f \rangle, \quad \forall v \in H,$$

tem uma única solução u_f para cada $f \in H$. É fácil ver que esta solução satisfaz

$$(\lambda - A)u_f = f.$$

Disto segue que $(\lambda - A)$ é bijetora. Logo $(M, \infty) \subset \rho(A)$.

Mostremos que $M \in \sigma(A)$. A forma bilinear $a(u, v) = (Mu - Au, v)$ é linear na primeira variável, linear-conjugada na segunda variável, contínua, simétrica e $a(u, u) \geq 0$, $\forall u \in H$. Logo, vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|a(u, v)| \leq a(u, u)^{1/2} a(v, v)^{1/2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} |(Mu - Au, v)| &\leq (Mu - Au, u)^{1/2} (Mv - Av, v)^{1/2}, \quad \forall u, v \in H \\ &\leq C(Mu - Au, u)^{1/2} \|v\| \end{aligned}$$

e que

$$\|Mu - Au\| \leq C(Mu - Au, u)^{1/2}, \quad \forall u \in H.$$

Seja $\{u_n\}$ uma seqüência de vetores tais que $\|u_n\| = 1$, $\langle Au_n, u_n\rangle \to M$. Segue que $\|Mu_n - Au_n\| \to 0$. Se $M \in \rho(A)$

$$u_n = (MI - A)^{-1}(Mu_n - Au_n) \to 0$$

o que está em contradição com $\|u_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Segue que $M \in \sigma(A)$. Do resultado acima aplicado a $-A$ obtemos que $(-\infty, m) \subset \rho(A)$ e $m \in \sigma(A)$. A prova que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ foi dada no Exemplo 2.7.1$\square$

Segue diretamente da Proposição 2.7.1 e do Lema 2.6.1 que

Corolário 2.7.2. *Sejam H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto com $\sigma(A) = \{0\}$, então $A = 0$.*

2.8 Cálculo operacional

2.8.1 Cálculo operacional para operadores limitados

Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. Já vimos que $\sigma(A)$ é não vazio e limitado. De fato, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma(A)\}$ e $r_\sigma = \inf\limits_{n \geq 1} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, com $r > r_\sigma(A)$. Sabemos que, para $|\lambda| > r_\sigma(A)$,

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n,$$

e, para $j \in \mathbb{N}$,

$$A^j = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^j (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \tag{2.21}$$

Observe que a curva γ pode ser escolhida qualquer curva fechada retificável que seja homotópica à curva acima em $\rho(A)$.

Assim, se $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é um polinômio,

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma p(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Exercício 2.8.1. *Seja X um espaço de Banach complexo e $A \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que, se $r > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $\gamma_r(t) = re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} e^{\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Estas considerações motivam a definição dada a seguir.

Definição 2.8.1. *Se X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. A classe das funções analíticas $f : D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que $D(f)$ é um domínio de Cauchy e contém $\sigma(A)$ é denotada por $\mathcal{U}(A)$. Para $f \in \mathcal{U}(A)$ definimos*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \tag{2.22}$$

onde D é um domínio de Cauchy limitado tal que $\sigma(A) \subset D$ e $\overline{D} \subset D(f)$.

Exercício 2.8.2. *Seja X um espaço de Banach complexo e $A \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que se $f, g \in \mathcal{U}(A)$ e f, g coincidem em um aberto que contém $\sigma(A)$, então $f(A) = g(A)$.*

É claro que, para $f, g \in \mathcal{U}(A)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que $f + g$, fg e αf estão em $\mathcal{U}(A)$. Além disso, é fácil ver que

$$f(A) + g(A) = (f+g)(A) \text{ e } \alpha f(A) = (\alpha f)(A).$$

Vamos provar que $f(A) \circ g(A) = (fg)(A)$. Sejam D_1 e D_2 domínios de Cauchy tais que $\sigma(T) \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D_2 \subset D(f) \cap D(g)$. Com esta notação temos que

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \qquad g(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1}d\mu.$$

Logo

$$\begin{aligned} f(A)\circ g(A) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{+\partial D_1}\int_{+\partial D_2} f(\lambda)g(\mu)\,(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}\,d\mu\,d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{+\partial D_1}\int_{+\partial D_2} f(\lambda)g(\mu)\,\frac{1}{\mu-\lambda}[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}]\,d\mu\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda = (fg)(A). \end{aligned}$$

Exercício 2.8.3. *Sejam X um espaço de Banach complexo, $B \in \mathcal{L}(X)$ com $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ e $A = I + B$. Mostre que, se $1 > r > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$, $\alpha > 0$ e $\gamma_r(t) = 1 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, então*

$$A^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+n-1}{n}(-1)^n B^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\lambda^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

onde

$$\binom{\alpha+n-1}{n} := \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}.$$

Mostre que $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in (0,\infty)$. Em particular,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1}d\lambda \ \text{ e} \\ A^{-2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n B^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\lambda^{-2}(\lambda - A)^{-1}d\lambda. \end{aligned}$$

Estude as potências positivas de A.

Fim da Oitava Aula ↑

Início da Nona Aula ↓

Teorema 2.8.1. *Seja X um espaço de Banach complexo e $A \in \mathcal{L}(X)$. Se $f \in \mathcal{U}(A)$ é tal que $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, então $f(A)$ é injetor e sobre X com inversa $g(A)$ onde g é qualquer função de $\mathcal{U}(A)$ que coincide com $\frac{1}{f}$ em um aberto que contenha $\sigma(A)$.*

Prova: Se $g = \frac{1}{f}$ em um aberto que contém $\sigma(A)$ então $g \in \mathcal{U}(A)$ e $f(\lambda)g(\lambda) = 1$ em um aberto que contém $\sigma(A)$. Logo

$$f(A)g(A) = g(A)f(A) = (fg)(A) = I. \square$$

2.8.2 Cálculo operacional para operadores fechados

Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado com resolvente $\rho(A)$ não vazio. Denotaremos por $\mathcal{U}_\infty(A)$ o conjunto das funções analíticas f cujo domínio contém $\sigma(A)$ e o complementar de um conjunto compacto e que satisfazem $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = f(\infty)$.

Exercício 2.8.4. *Sejam $R > 0$, $A(0, R, \infty) = (\overline{B}_R^{\mathbb{C}}(0))^c$ e $f : A(0, R, \infty) \to \mathbb{C}$ uma função analítica e limitada. Mostre que existe o limite*[2]

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda).$$

Definimos em $\mathcal{U}_\infty(A)$ a relação de equivalência $\mathcal{R}$ por $(f, g) \in \mathcal{R}$ se f e g são iguais em um aberto que contém $\sigma(A)$ e também no exterior de uma bola. Escreveremos $f \sim g$ para denotar que $(f, g) \in \mathcal{R}$.

Exercício 2.8.5. *Mostre que a relação $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}_\infty \times U_\infty$ é uma relação de equivalência.*

---

[2]Sugestão: Mostre que 0 é uma singularidade removível da função analítica $g : B_{\frac{1}{R}}(0)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $g(\lambda) = f(\frac{1}{\lambda})$.

Observe que, se D é um domínio de Cauchy ilimitado com $D \supset A(0, r, \infty)$ e $f : D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função em $\mathcal{U}_\infty(A)$ com $D(f) \supset \overline{D}$, então

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda \tag{2.23}$$

onde $r > 0$ é tal que $B_r(0) \supset \overline{D^c}$, ξ é um ponto de D com $|\xi| < r$ e $\gamma_r(t) = re^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$.

Logo, fazendo $r \to \infty$ em (2.23) e usando que $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = f(\infty)$, obtemos

$$f(\xi) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda \tag{2.24}$$

para todo ξ em D. Usando o mesmo raciocínio acima, se ξ é exterior a D, então

$$0 = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda \tag{2.25}$$

Quando $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$, definimos

$$f(A) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \tag{2.26}$$

onde D é um Domínio de Cauchy ilimitado tal que $\sigma(A) \subset D \subset \overline{D} \subset D(f)$. Note que $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ mesmo que A não seja um operador limitado.

Exercício 2.8.6. *Seja X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não vazio.*

a) Mostre que se $f, g \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e $f \sim g$, então $f(A) = g(A)$.

b) Mostre que se $f(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, então $f(A) = I$.

Seja X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não vazio. Se $f, g \in \mathcal{U}_\infty(A)$, mostremos que $f(A) \circ$

$g(A) = (fg)(A)$. Como antes, sejam D_1 e D_2 domínios de Cauchy tais que $\sigma(T) \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D_2 \subset D(f) \cap D(g)$. Com esta notação temos que

$$f(A) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}d\lambda$$

e

$$g(A) = g(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1}d\mu.$$

Usando (2.24) e (2.23) temos que, se $\lambda \in \partial D_1$ e $\mu \in \partial D_2$,

$$g(\lambda) = g(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}d\mu \text{ e } \; 0 = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}d\lambda.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
f(A) \circ g(A) = {} & f(\infty)g(\infty)I \\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{+\partial D_1}\int_{+\partial D_2} f(\lambda)g(\mu)\,(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}\,d\mu\,d\lambda \\
& + \frac{g(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)\,(\lambda - A)^{-1}d\lambda + \frac{f(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} g(\mu)\,(\mu - A)^{-1}d\mu \\
& = f(\infty)g(\infty)I + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{+\partial D_1}\int_{+\partial D_2} f(\lambda)g(\mu)\,\frac{(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}}{\mu - \lambda}\,d\mu\,d\lambda \\
& + \frac{g(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)\,(\lambda - A)^{-1}d\lambda + \frac{f(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} g(\mu)\,(\mu - A)^{-1}d\mu \\
& = f(\infty)g(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2}\frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}d\mu\right)d\lambda \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1}\frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}d\lambda\right)d\mu \\
& + \frac{g(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)\,(\lambda - A)^{-1}d\lambda + \frac{f(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} g(\mu)\,(\mu - A)^{-1}d\mu \\
& = f(\infty)g(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda = (fg)(A).
\end{aligned}$$

Segue exatamente como o Teorema 2.8.1 que o seguinte resultado vale.

Teorema 2.8.2. *Seja X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não vazio. Se $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$ é tal que $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A) \cup \{\infty\}$, então $f(A)$ é injetor e sobre X com inversa $g(A)$ onde g é qualquer função de $\mathcal{U}_\infty(A)$ com $g \sim \frac{1}{f}$.*

Exercício 2.8.7. *Seja X um espaço de Banach complexo e $A \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que, se $f \in \mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}_\infty(A)$, então (2.22) e (2.26) dão origem ao mesmo operador $f(A)$.*

2.9 Conjuntos espectrais

Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente $\rho(A)$ não vazio. definimos o espectro estendido $\sigma_e(A)$ e o resolvente estendido $\rho_e(A)$ de A por

$$\sigma_e(A) = \sigma(A) \text{ se } A \in \mathcal{L}(X) \text{ e } \sigma_e(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\} \text{ se } A \notin \mathcal{L}(X),$$

$$\rho_e(A) = \rho(A) \cup \{\infty\} \text{ se } A \in \mathcal{L}(X) \text{ e } \rho_e(A) = \rho(A) \text{ se } A \notin \mathcal{L}(X).$$

Uma justificativa para a definição acima é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 2.9.1 ([12],Theorem III.6.13)**.** *Seja X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado. Se $\rho(A)$ contém o exterior de um disco, vale uma das seguintes alternativas*

i) $\rho(A) \ni \lambda \mapsto f(\lambda) := (\lambda - A)^{-1}$ *tem uma singularidade removível em* $\lambda = \infty$ *e* $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$ *ou, equivalentemente,* $A \in \mathcal{L}(X)$*.*

ii) $\rho(A) \ni \lambda \mapsto f(\lambda) := (\lambda - A)^{-1}$ *tem uma singularidade essencial em* $\lambda = \infty$*.*

Exercício 2.9.1. *Mostre o Teorema 2.9.1.*

Exercício 2.9.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e injetor. Então $\sigma_e(A) \ni \xi \mapsto \xi^{-1} \in \sigma_e(A^{-1})$ é bijetora.*

Se D é um domínio de Cauchy limitado tal que $\partial D \subset \rho(A)$, os conjuntos $\sigma = \sigma(A) \cap D$ e $\sigma' = \sigma_e(A) \backslash \sigma$ são chamados conjuntos espectrais de A.

Se σ é um conjunto espectral, existe $f_\sigma \in \mathcal{U}_\infty(A)$ tal que $f_\sigma(\lambda) = 1$ para todo λ em uma vizinhança de σ e $f_\sigma(\lambda) = 0$ para todo λ em uma vizinhança de $\sigma_e(A)\backslash\sigma$. Denotamos $f_\sigma(A)$ por P_σ (ou por $P_\sigma(A)$ quando for necessário explicitar o operador linear envolvido).

Claramente $P_\sigma^2 = P_\sigma$ (pois $f_\sigma^2 \sim f_\sigma$) e P_σ é uma projeção contínua.

Sejam σ e τ conjuntos espectrais para o operador A. Então, as seguintes propriedades valem

a) $P_\sigma = 0$ se $\sigma = \emptyset$ ($f_\sigma \equiv 0$),

b) $P_\sigma = I$ se $\sigma = \sigma_e(A)$ ($f_\sigma \equiv 1$),

c) $P_{\sigma\cap\tau} = P_\sigma P_\tau = P_\tau P_\sigma$ ($P_{\sigma\cap\tau} = (f_\sigma f_\tau)(A)$) e

d) $P_{\sigma\cup\tau} = P_\sigma + P_\tau - P_\sigma P_\tau$ ($P_{\sigma\cup\tau} = (f_\sigma + f_\tau - f_\sigma f_\tau)(A)$)

Em particular, se σ é um conjunto espectral e $\sigma' = \sigma_e(A)\backslash\sigma$, então $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma'} P_\sigma = 0$ e (usando as quatro propriedades acima) $P_\sigma + P_{\sigma'} = P_{\sigma\cup\sigma'} + P_{\sigma'} P_\sigma = I + 0 = I$. Se $X_\sigma = P_\sigma(X)$ e $X_{\sigma'} = P_{\sigma'}(X)$, então $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$.

Fim da Nona Aula $\uparrow$

Início da Décima Aula ↓

Teorema 2.9.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Suponha que $\sigma(A)$ contém um conjunto espectral limitado σ e seja $\sigma' = \sigma_e(A)\backslash\sigma$. Então temos uma decomposição de A de acordo com uma decomposição $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$ do espaço de forma que os espectros das partes A_σ e $A_{\sigma'}$ de A em X_σ e em $X_{\sigma'}$ coincidem com σ e σ' respectivamente e $A_\sigma \in \mathcal{L}(X_\sigma)$.*

Prova: Seja D um domínio de Cauchy limitado tal que $\partial D \subset \rho(A)$, $\sigma \subset D$ e $\sigma' \cap D = \emptyset$. Então

$$P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} (\xi - A)^{-1} d\xi.$$

Sabemos que $P_\sigma^2 = P_\sigma \in \mathcal{L}(X)$ e P_σ é uma projeção sobre $X_\sigma = R(P_\sigma)$ ao longo de $X_{\sigma'} = N(P_\sigma)$. Além disso

$$P_\sigma(\xi - A)^{-1} = (\xi - A)^{-1}P_\sigma, \quad \xi \in \rho(A),$$

logo P_σ comuta com A, o que significa que A pode ser decomposto de acordo com a decomposição $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$ e as partes A_σ e $A_{\sigma'}$ de A estão definidas.

É fácil ver que as partes de $(\xi - A)^{-1}$ em X_σ e $X_{\sigma'}$, são as inversas de $(\xi - A_\sigma)$ e $(\xi - A_{\sigma'})$, respectivamente. Isto mostra que $\rho(A_\sigma)\cap\rho(A_{\sigma'}) \supset \rho(A)$. Contudo, $\rho(A_\sigma)$ também contém σ'. Para ver isto primeiramente observe que ${(\xi - A)^{-1}}_{|X_\sigma} u = (\xi - A)^{-1}u = (\xi - A)^{-1}P_\sigma u$ para $u \in X_\sigma$, $\xi \in \rho(A)$. Mas para cada $\xi \in \rho(A)$ que não está em $+\partial D$, temos

$$\begin{aligned}(\xi - A)^{-1}P_\sigma &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} (\xi - A)^{-1}(\xi' - A)^{-1} d\xi' \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} ((\xi - A)^{-1} - (\xi' - A)^{-1})\frac{d\xi'}{\xi' - \xi}.\end{aligned}$$

Se $\xi \notin \overline{D}$, temos que

$$(\xi - A)^{-1}P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} (\xi' - A)^{-1}\frac{d\xi'}{\xi - \xi'}.$$

Como o lado direito da expressão acima é analítico no exterior de D, segue que $(\xi - A)^{-1}P_\sigma$, e portanto $(\xi - A_\sigma)^{-1} \in \mathcal{L}(X_\sigma)$, tem uma continuação analítica ao exterior de D e os valores desta continuação são os operadores resolvente de A_σ nos pontos do exterior de D. Portanto $\rho(A_\sigma)$ contém o exterior de D e $\sigma(A_\sigma) \subset \sigma$.

Semelhantemente, segue que para ξ dentro de ∂D

$$(\xi - A)^{-1}P_\sigma = (\xi - A)^{-1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} (\xi' - A)^{-1}\frac{d\xi'}{\xi - \xi'}.$$

Isto mostra que $(\xi - A)^{-1}(I - P_\sigma)$ tem uma continuação analítica dentro de ∂D. Como antes, isto leva a conclusão que $\sigma(A_{\sigma'}) \subset \sigma'$.

Por outro lado, um ponto $\xi \in \sigma(A)$ não pode pertencer a ambos $\rho(A_\sigma)$ e $\rho(A_{\sigma'})$; caso contrário pertenceria a $\rho(A)$ já que $(\xi - A_\sigma)^{-1}P_\sigma + (\xi - A_{\sigma'})^{-1}(I - P_\sigma)$ seria igual à inversa de $(\xi - A)$. Isto mostra que $\sigma(A) \subset \sigma(A_\sigma) \cup \sigma(A_{\sigma'})$ e portanto $\sigma(A_\sigma) = \sigma$, $\sigma(A_{\sigma'}) = \sigma'$.

Finalmente note que

$$P_\sigma A \subset AP_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} A(\xi - A)^{-1}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \xi(\xi - A)^{-1}d\xi.$$

Isto mostra que $A_\sigma \in \mathcal{L}(X_\sigma)$ e completa a prova.$\square$

Observação 2.9.1. *Se X é um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador fechado com resolvente compacto e σ é um conjunto espectral limitado e P_σ é a projeção espectral associada então P_σ é compacta (consequentemente tem imagem com dimensão finita).*

2.10 Pontos isolados do espectro

Seja X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado. Suponha que $\sigma(A)$ contém um ponto isolado λ. Claramente $\sigma = \{\lambda\}$

e $\sigma' = \sigma_e(A)\backslash\sigma$ são conjuntos espectrais. Sejam X_σ, $X_{\sigma'}$, A_σ e A'_σ como no Teorema 2.9.2. O operador $A_\sigma \in \mathcal{L}(X_\sigma)$ tem espectro $\sigma(A_\sigma) = \{\lambda\}$ e $\lambda - A_\sigma$ é quasi-nilpotente. Logo

$$(\xi - A_\sigma)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\xi-\lambda)^{-n-1}(-1)^n(\lambda - A_\sigma)^n$$

converge para todo $\xi \in \mathbb{C}\backslash\{\lambda\}$. Assim, se $\xi \in \rho(A)$,

$$(\xi - A)^{-1}P_\sigma = \frac{P_\sigma}{\xi - \lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi-\lambda)^{-n-1}(-1)^n D^n$$

onde, se $\gamma(t) = \lambda + re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, $\overline{B}_r^{\mathbb{C}}(\lambda) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$,

$$D = (\lambda - A)P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - \xi)(\xi - A)^{-1} d\xi \in \mathcal{L}(X)$$

é quasi-nilpotente. Por outro lado, $(\xi - A_{\sigma'})^{-1}$ é analítica em uma vizinhança de λ e assim

$$(\xi - A_{\sigma'})^{-1}P_{\sigma'} = (\xi - A)^{-1}P_{\sigma'} = \sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda)^n(-1)^n S^{n+1}$$

onde

$$S = (\lambda - A_{\sigma'})^{-1}P_{\sigma'} = \lim_{\zeta\to\lambda}(\zeta - A)^{-1}P_{\sigma'} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - \xi)^{-1}(\xi - A)^{-1} d\xi.$$

Segue que, se $\xi \in B_r^{\mathbb{C}}(\lambda)\backslash\{\lambda\}$,

$$(\xi - A)^{-1} = \frac{P_\sigma}{\xi - \lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi-\lambda)^{-n-1}(-1)^n D^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda)^n(-1)^n S^{n+1}$$

é a serie de Laurent para $(\xi - A)^{-1}$ em torno da singularidade isolada λ. Os operadores S e D satisfazem $D = DP_\sigma = P_\sigma D$, $SA \subset AS \in \mathcal{L}(X)$, $(\lambda - A)S = P_{\sigma'}$ e $SP_\sigma = P_\sigma S = 0$.

Observação 2.10.1. *1. Se λ é um pólo de ordem m, então $(\lambda - A)^n P_\sigma = 0$ para todo $n \geq m$ e $P_\sigma \neq 0$. Consequentemente $\lambda - A$ não é injetora e λ é um auto-valor.*

2. *Se P_σ tem imagem $R(P_\sigma)$ com dimensão finita, é claro que λ é um pólo de ordem finita de $\rho(A) \ni \xi \mapsto (\xi - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e portanto um auto-valor de A. Disto segue que, se A tem resolvente compacto, então todos os pontos isolados do espectro são auto-valores (basta ver que P_σ será compacta e portanto $R(P_\sigma)$ terá dimensão finita).*

3. *Se A é um operador compacto e $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, então λ é um pólo de ordem finita de $\rho(A) \ni \xi \mapsto (\xi - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e portanto um auto-valor.*

4. *Se $\sigma = \{\lambda\}$ é um conjunto espectral de A, λ pode ser um auto-valor de A ou uma singularidade essencial da função $\rho(A) \ni \xi \mapsto (\xi - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Neste último caso, se λ é um auto-valor de A então $(\lambda - A_\sigma)$ não é nilpotente e* $\dim(R(P_\sigma)) = \infty$.

5. *Se $X = \ell^2(\mathbb{C})$ e $A \in \mathcal{L}(X)$ é o operador definido por $A\{x_1, x_2, x_3, \cdots\} = \{\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \cdots\}$, então 0 é um auto-valor de A e A é quasi-nilpotente mas não é nilpotente e $\lambda = 0$ é uma singularidade essencial de $\rho(A) \ni \xi \mapsto (\xi - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ são pontos isolados de $\sigma(A)$, $\sigma_j = \{\lambda_j\}$, $1 \leq j \leq k$, $\sigma_0 = \sigma_e(A)\backslash\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$, temos que

$$(\xi - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{P_{\sigma_j}}{\xi - \lambda_j} + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \lambda_j)^{-n-1} (-1)^n D_j^n \right] + (\xi - A_{\sigma_0})^{-1} P_{\sigma_0},$$

onde $P_{\sigma_i} P_{\sigma_j} = \delta_{ij} P_{\sigma_i}$, $P_{\sigma_j} D_j = D_j P_{\sigma_j} = D_j$, $(\lambda_j - A) P_{\sigma_j} = D_j$, $(\xi - A_{\sigma_0})^{-1} P_{\sigma_0}$ é analítica em um aberto que contém $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ e $(\xi - A_{\sigma_0})^{-1} P_{\sigma_0} = \lim_{\zeta \to \xi} (\zeta -$

$A)^{-1}P_{\sigma_0}$. Além disso,

$$AP = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_{\sigma_j} - D_j \tag{2.27}$$

onde $P = P_{\sigma_1} + \cdots + P_{\sigma_k}$ e os operadores D_j são quasi-nilpotentes com imagem em $R(P_{\sigma_j})$.

Fim da Décima Aula ↑

Início da Décima Primeira Aula ↓

2.11 O Teorema da Aplicação Espectral

Lema 2.11.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não vazio. Suponha que $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$, $f(\lambda) \neq 0$ se $\lambda \in \sigma(A)$ e que ∞ seja um zero de ordem m de f. Então $f(A)$ é injetor, $R(f(A)) = D(A^m)$ e para cada $x \in D(A^m)$,*

$$[f(A)]^{-1}x = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\{f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{m+1}\}^{-1}(\alpha - A)^{m+1}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda \quad (2.28)$$

onde $\alpha \in \rho(A)$ e D é um domínio de Cauchy ilimitado tal que $\sigma(A) \subset D$, $\overline{D} \subset D(f)$, $\alpha \notin \overline{D}$ e $f(\lambda) \neq 0$ se $\lambda \in \overline{D}$.

Prova: Seja $\alpha \in \rho(A)$ e defina $g(\lambda) = (\alpha - \lambda)^m f(\lambda)$ então, $g \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e g não tem zeros em $\sigma_e(A)$. Escolha o domínio de Cauchy ilimitado D de forma que $\sigma(A) \subset D$, $g(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \overline{D}$, $\alpha \notin \overline{D}$ e $\overline{D} \subset D(f)$. Segue que $g(A)$ tem inversa limitada. Como

$$g(A)(\alpha - A)^{-m} = (\alpha - A)^{-m}g(A) = f(A), \quad (2.29)$$

temos que, $R(f(A)) = D(A^m)$ e se $x \in D(A^m)$,

$$[f(A)]^{-1}x = [g(A)]^{-1}(\alpha - A)^m x. \quad (2.30)$$

Para $x \in D(A^m)$, usando o Teorema 2.8.2, (2.30) e (2.23),

$$
\begin{aligned}
[g(A)]^{-1}(\alpha - A)^m x = & \, g(\infty)^{-1}(\alpha - A)^m x \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} [f(\lambda)(\alpha-\lambda)^m]^{-1}(\alpha - A)^m (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \\
& = g(\infty)^{-1}(\alpha - A)^m x \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} [f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{m+1}]^{-1}(\alpha - A)^m [(\alpha - A)(\lambda - A)^{-1} x - x] d\lambda \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} [f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{m+1}]^{-1}(\alpha - A)^{m+1} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a demonstração. □

Lema 2.11.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não vazio. Suponha que $\sigma(A)$ seja limitado e que $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$ seja nula no exterior de um disco e não tenha zeros em $\sigma(A)$. Então $R(f(A)) = R(P_{\sigma(A)})$ e $N(f(A)) = N(P_{\sigma(A)})$. Em particular, se $D(A) \subsetneq X$, $f(A)$ não tem inversa em $\mathcal{L}(X)$.*

Prova: Se $D(A) \subsetneq X$ e $\sigma(A)$ é limitado, então $\sigma(A)$ é um conjunto espectral e $P_\sigma \neq I$ (já que, neste caso, $R(P_{\sigma(A)}) \subset D(A)$). Logo a segunda parte do lema segue da primeira.

Sejam $g, h \in \mathcal{U}_\infty(A)$ definidas por $g(\lambda) = 0$, $h(\lambda) = 1$ na componente conexa ilimitada de $D(f)$ e $g(\lambda) = 1$, $h(\lambda) = f(\lambda)$ no resto de $D(f)$. Então $P_{\sigma(A)} = g(A)$ e $h(A)$ tem inversa limitada (pois $h \neq 0$ em $\sigma_e(A)$). Além disso, $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$ e

$$f(A) = P_{\sigma(A)} h(A) = h(A) P_{\sigma(A)}$$

e o resultado segue do fato que $h(A)$ é injetor e $R(h(A)) = X$. □

Teorema 2.11.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não vazio. Se $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$, o espectro de $f(A)$ é exatamente o conjunto dos valores $f(\lambda)$, assumidos por f, quando λ percorre $\sigma_e(A)$. Simbolicamente, $\sigma(f(A)) = f(\sigma_e(A))$.*

Prova: Em primeiro lugar mostremos que $f(A)$ tem inversa em $\mathcal{L}(X)$ se, e somente se, f não tem zeros em $\sigma_e(A)$. Já vimos que se f não tem zeros em $\sigma_e(A)$ então $f(A)$ tem inversa em $\mathcal{L}(X)$. Por outro lado, se $f(A)$ tem inversa limitada e $f(\lambda)=0$ para algum $\lambda\in D$, então escrevemos $f(\xi)=(\lambda-\xi)g(\xi)$ para algum $g\in\mathcal{U}_\infty(A)$. Logo, procedendo como em (2.29) $R(g(A))\subset D(A)$ e (como $g(\infty)=0$)

$$\begin{aligned}(\lambda-A)g(A) &= \frac{1}{2\pi i}(\lambda-A)\int_{+\partial D} g(\xi)(\xi-A)^{-1}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}(\lambda-\xi)g(\xi)(\xi-A)^{-1}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} g(\xi)d\xi\, I\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} f(\xi)(\xi-A)^{-1}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi\, I\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} f(\xi)(\xi-A)^{-1}d\xi+f(\infty)I=f(A)\end{aligned}$$

onde utilizamos (2.24) e o fato que $f(\lambda)=0$. Além disso, $f(A)x=g(A)(\lambda-A)x$ para todo $x\in D(A)$. Segue que $\lambda\in\rho(A)$ pois caso contrário $R(f(A))\subsetneq X$ ou $f(A)$ não seria injetor. Isto prova que f não se anula em $\sigma(A)$. Se $\infty\in\sigma_e(A)$ temos que $D(A)\subsetneq X$, além disso, se $f(\infty)=0$ (procedendo como em (2.29))$R(f(A))\subset D(A)\subsetneq X$).

Observe que $\mu\notin f(\sigma_e(A))$ se, e somente se, $\mu-f(\lambda)$ não se anula em $\sigma_e(A)$. Por outro lado, $\mu-f(\lambda)$ não se anula em $\sigma_e(A)$ se, e somente se, $\mu I-f(A)$ tem inversa em $\mathcal{L}(X)$ (ou seja, $\mu\notin\sigma(f(A))$). Isto conclui a demonstração.$\square$

Exercício 2.11.1. *Seja X um espaço de Banach complexo e $A: D(A)\subset X\to X$ um operador fechado com $0\in\rho(A)$. Então $\sigma(A^{-1})=\{\frac{1}{\lambda}:\lambda\in\sigma_e(A)\}$ e se λ_0 é um ponto isolado de $\sigma(A)$ então $P_{\{\lambda_0\}}(A)=P_{\{\lambda_0^{-1}\}}(A^{-1})$.*

2.12 Decomposição espectral: $A \in \mathcal{K}(H)$ e auto-adjunto

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Como conseqüência do Corolário 2.7.2 temos o seguinte resultado

Corolário 2.12.1. *Se $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto, $\lambda_0 \in \sigma(A)$ é um ponto isolado do espectro de A e $P_{\{\lambda_0\}}(A)$ é a projeção associada ao conjunto espectral $\{\lambda_0\}$, então $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$, a restrição $\mathbf{A}_{\{\lambda_0\}}$ de A à $H_{\{\lambda_0\}} = R(P_{\{\lambda_0\}}(A))$ é $\lambda_0 I_{H_{\{\lambda_0\}}}$ e $R(P_{\{\lambda_0\}}(A)) = N(\lambda_0 - A)$.*

Prova: Primeiramente note que $R(P_{\{\lambda_0\}}(A)) \neq \{0\}$ (pois $\sigma(A_{\{\lambda_0\}}) = \{\lambda_0\} \neq \emptyset$). Do fato que $\sigma(\lambda_0 - \mathbf{A}_{\{\lambda_0\}}) = \{0\}$ e do Corolário 2.7.2 segue que $A_{\{\lambda_0\}} = \lambda_0 I_{H_{\{\lambda_0\}}}$. Disto segue λ_0 é um auto-valor de A e que $N(\lambda_0 - A) \supset R(P_{\{\lambda_0\}})$.

Por outro lado, se $x \in N(\lambda_0 - A)$, $r > 0$ é tal que $\overline{B}_r(\lambda_0)\backslash\{\lambda_0\} \subset \rho(A)$, $\gamma(t) = \lambda_0 + re^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$,

$$P_{\{\lambda_0\}}(A)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda\, x = x.$$

onde usamos que $(\lambda - A)^{-1} = \dfrac{I - (\lambda_0 - A)(\lambda - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}$. Logo $x \in R(P_{\{\lambda_0\}})$ mostrando que $R(P_{\{\lambda_0\}}) = N(\lambda_0 - A)$.$\square$

Exercício 2.12.1. *Seja A um operador auto-adjunto. Se σ é um conjunto espectral de A, mostre que P_σ é auto-adjunta e conclua que P_σ é uma projeção ortogonal.*

Fim da Décima Primeira Aula ↑

Início da Décima Segunda Aula ↓

Seja $A : H \to H$ um operador compacto e auto-adjunto. Segue do Corolário 2.12.1, do Teorema 2.4.3 e do Teorema 2.4.5 que todo ponto em $\sigma(A)\backslash\{0\}$ é um auto-valor isolado com multiplicidade finita. Se $\sigma(A)\backslash\{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$, definimos $P_n = P_{\{\lambda_n\}}$ e P_0 a projeção ortogonal com imagem $N(A)$. Se Y é o subespaço de H gerado por $\cup_{n=0}^{\infty} P_n H$, mostremos que Y é denso em H. É claro que $AY \subset Y$ e $AY^\perp \subset Y^\perp$ e se $A_0 = A_{|_{Y^\perp}}$, então A_0 é auto-adjunto, compacto. Se $Y^\perp \neq \{0\}$, então $\sigma(A_0) = \{0\}$, $A_0 = 0$ e $Y^\perp \subset N(A) = R(P_0)$ e temos uma contradição. Segue que para todo $x \in H$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x.$$

e que

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x$$

com a série convergindo em $\mathcal{L}(H)$.

Agora seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto com resolvente compacto (veja Definição 2.4.1). Segue que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$ então se $P_j = P_{\lambda_j}$ e $Y = \cup_{j=1}^{\infty} R(P_j)$ temos que $Y^\perp \cap D(A) = \{0\}$ pois a restrição A_0 de A a $Y^\perp$ é um operador auto-adjunto e com resolvente compacto com $0 \in \rho(A_0)$ e $A_0^{-1} = 0$ (pois $\sigma(A_0) = \{\infty\}$ e consequentemente $\sigma(A_0^{-1}) = \{0\}$ o que resulta $R(A_0^{-1}) = D(A_0) = \{0\}$). Assim, se $x \in D(A)$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} P_j x$$

e

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j x.$$

2.13 Continuidade do espectro

No estudo de reações químicas que ocorrem em um recipiente, a determinação da forma do recipiente $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$ é feita através de medidas e observações que, por sua natureza, contém imprecisões. Se Ω_0 denota o recipiente e Ω_ϵ o seu modelo as funções concentração reais $\phi : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ e modeladas $\phi_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}$ estão definidas em espaços diferentes. Mesmo que o espaço onde atuam os operadores lineares envolvidos possa ser fixado, os operadores (que são determinados por leis empíricas e observações) variam. Desta forma, precisamos desenvolver mecanismos para comparar funções pertencentes a espaços diferentes bem como operadores que atuam nestes espaços.

Existem inúmeras situações práticas onde somos levados a comparar operadores que atuam em espaços diferentes. Nesta seção desenvolvemos ferramentas abstratas básicas que podem ser usadas para comparar dois problemas lineares em diferentes espaços. Os resultados apresentados aqui tem sua origem na análise funcional numérica onde a noção de $E-$convergência é chamada convergência discreta (veja [19]).

Desta forma, seja X_ϵ uma família de espaços de Banach, $\epsilon \in [0,1]$, e suponha que existe uma família de operadores lineares contínuos $E_\epsilon : X \to X_\epsilon$ com a propriedade

$$\|E_\epsilon u\|_{X_\epsilon} \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \|u\|_X, \qquad \text{para todo } u \in X. \tag{2.31}$$

Exercício 2.13.1. *Mostre que existe $M \geq 1$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que*

$$\|E_\epsilon\|_{\mathcal{L}(X,X_\epsilon)} \leq M, \quad \forall\, \epsilon \in [0,\epsilon_0].$$

Sugestão: Mostre uma versão do Princípio da Limitação Uniforme que se aplique a esta situação.

Definição 2.13.1. *Diremos que uma seqüência* $\{u_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}$, *com* $u_\epsilon \in X_\epsilon$ *para todo* $\epsilon \in [0,1]$, $E-$*converge para* u *se* $\|u_\epsilon - E_\epsilon u\|_{X_\epsilon} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$. *Escrevemos* $u_\epsilon \xrightarrow{E} u$ *para dizer que a seqüência* $\{u_\epsilon\}_{\epsilon\in[0,1]}$ E-*converge para* u *quando* ϵ *tende a zero.*

Exercício 2.13.2. *Mostre que, se* $u_\epsilon \xrightarrow{E} u$ *e* $u_\epsilon \xrightarrow{E} v$, *então* $u = v$.

Com esta noção de convergência apresentamos a definição de seqüência E-relativamente compacta.

Definição 2.13.2. *Uma seqüência* $\{u_n\}_{N\in\mathbb{N}}$, *com* $u_n \in X_{\epsilon_n}$ *e* $\epsilon_n \to 0$, *é dita* E-*relativamente compacta se, para cada subseqüência* $\{u_{n'}\}$ *de* $\{u_n\}$, *existe uma subseqüência* $\{u_{n''}\}$ *de* $\{u_{n'}\}$ *e um elemento* $u \in X$ *tal que* $u_{n''} \xrightarrow{E} u$. *A família* $\{u_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}$ *é dita* E-*relativamente compacta se cada seqüência* $\{u_{\epsilon_n}\}$, $\epsilon_n \to 0$, *é* E-*relativamente compacta.*

Definição 2.13.3. *Diremos que a família de operadores* $\{B_\epsilon \in \mathcal{L}(X_\epsilon)\}_{\epsilon\in[0,1]}$ EE-*converge para* B_0 *quando* $\epsilon \to 0$, *se* $B_\epsilon u_\epsilon \xrightarrow{E} B_0 u$ *sempre que* $u_\epsilon \xrightarrow{E} u \in X$. *Escreveremos* $B_\epsilon \xrightarrow{EE} B_0$ *para denotar que* $\{B_\epsilon \in \mathcal{L}(X_\epsilon)\}_{\epsilon\in[0,1]}$ EE-*converge para* B_0 *quando* $\epsilon \to 0$.

Definição 2.13.4. *Diremos que uma família de operadores compactos* $\{B_\epsilon \in \mathcal{K}(X_\epsilon) : \epsilon \in [0,1]\}$ *converge compactamente para* B_0 *se, para qualquer família* $\{u_\epsilon\}$ *com* $u_\epsilon \in X_\epsilon$, $\|u_\epsilon\|_{X_\epsilon} = 1$, $\epsilon \in (0,1]$, *a família* $\{B_\epsilon u_\epsilon\}$ *é* E-*relativamente compacta e, além disso,* $B_\epsilon \xrightarrow{EE} B_0$. *Escreveremos* $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$ *quando* $\epsilon \to 0$ *para denotar que* $\{B_\epsilon \in \mathcal{K}(X_\epsilon)\}_{\epsilon\in[0,1]}$ *converge compactamente para* B_0.

Exercício 2.13.3. *Se* $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$, $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *e* $\{u_{\epsilon_n}\}$ *é tal que* $u_{\epsilon_n} \in X_{\epsilon_n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\{\|u_{\epsilon_n}\|_{X_{\epsilon_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada, mostre que* $\{B_{\epsilon_n} u_{\epsilon_n}\}$ *é* E-*relativamente compacta.*

O lema a seguir desempenha um papel fundamental na demonstração dos principais resultados desta seção.

Lema 2.13.1. *Seja* $\{B_\epsilon \in \mathcal{K}(X_\epsilon)\}_{\epsilon\in[0,1]}$ *tal que* $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$ *quando* $\epsilon \to 0$. *Então,*
i) existe $\epsilon_0 \in (0,\epsilon]$ *tal que* $\sup_{\epsilon\in(0,\epsilon_0]} \|B_\epsilon\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} < \infty$.
ii) se $\mathcal{N}(I+B_0) = \{0\}$, *existe* $\epsilon_0 > 0$ *e* $M > 0$ *tal que* $\mathcal{N}(I+B_\epsilon) = \{0\}$ *para todo* $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$ *e*

$$\|(I+B_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} \leqslant M, \quad \forall \epsilon \in [0,\epsilon_0]. \tag{2.32}$$

Prova: $i)$ Se $\{\|B_\epsilon\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} : \epsilon \in (0,\epsilon_0]\}$ não é limitada para qualquer escolha de $\epsilon_0 \in (0,1]$, existe seqüência $\{\epsilon_n\}$ em $(0,1]$ com $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $u_{\epsilon_n} \in X_{\epsilon_n}$ com $\|u_{\epsilon_n}\|_{X_{\epsilon_n}} = 1$ tal que $\|B_{\epsilon_n} u_{\epsilon_n}\| \to +\infty$ e isto está em contradição com a convergência compacta de B_ϵ para B_0.
$ii)$ Primeiramente suponha que não existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\mathcal{N}(I+B_\epsilon) = \{0\}$ para todo $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$. Neste caso existe uma seqüência $\{\epsilon_n\}$ com $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $u_n \in X_{\epsilon_n}$ com $\|u_n\|_{X_{\epsilon_n}} = 1$ tais que $u_n + B_{\epsilon_n} u_n = 0$. Como $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$, podemos supor (tomando uma subseqüência se necessário) que $B_{\epsilon_n} u_n \xrightarrow{E} u$ com $\|u\|_X = 1$ e consequentemente $u_n \xrightarrow{E} -u$. Segue que $u + B_0 u = 0$ e isto está em contradição com $\mathcal{N}(I+B_0) = \{0\}$.

Agora provemos (2.32). Como $B_\epsilon \in \mathcal{K}(X_\epsilon)$ para cada $\epsilon \in [0,1]$, segue da Alternativa de Fredholm (veja Teorema 6.6 em [3]) que a estimativa (2.32) é equivalente a

$$\|(I+B_\epsilon)u_\epsilon\|_{X_\epsilon} \geqslant \frac{1}{M}, \quad \forall \epsilon \in [0,\epsilon_0] \text{ e } \forall u_\epsilon \in X_\epsilon \text{ com } \|u_\epsilon\| = 1.$$

Suponha que isto é falso; isto é, suponha que existe uma seqüência $\{u_n\}$, com $u_n \in X_{\epsilon_n}$, $\|u_n\| = 1$ e $\epsilon_n \to 0$ tal que $\|(I+B_{\epsilon_n})u_n\| \to 0$. Como $\{B_{\epsilon_n} u_n\}$ tem uma subseqüência E-convergente, que novamente denotamos por $\{B_{\epsilon_n}u_n\}$, para u, $\|u\| = 1$, segue que $u_n + B_{\epsilon_n}u_n \xrightarrow{E} 0$ e $u_n \xrightarrow{E} -u$. Isto implica que $(I + B_0)u = 0$ e isto está em contradição com a hipótese $N(I + B_0) = \{0\}$.$\square$

Em geral, os operadores B_ϵ serão inversas de certos operadores diferenciais A_ϵ. Assim, considere a família de operadores $\{A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon,\ \epsilon \in [0,1]\}$ e suponha que, para todo $\epsilon \in [0,1]$,

$$\boxed{A_\epsilon \text{ é fechado, tem resolvente compacto } 0 \in \rho(A_\epsilon), \text{ e } A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}}. \quad (2.33)$$

Lema 2.13.2. *Suponha que a família de operadores $\{A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon,\ \epsilon \in [0,1]\}$ satisfaz (2.33). Então, para cada $\lambda \in \rho(A_0)$, existe $\epsilon_\lambda > 0$ tal que $\lambda \in \rho(A_\epsilon)$ para todo $\epsilon \in [0, \epsilon_\lambda]$ e existe uma constante $M_\lambda > 0$ tal que*

$$\|(\lambda - A_\epsilon)^{-1}\| \leqslant M_\lambda, \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon_\lambda]. \quad (2.34)$$

Além disso, $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (\lambda - A_0)^{-1}$ quando $\epsilon \to 0$.

Prova: De (2.33) e do fato que $\lambda \in \rho(A_0)$ é fácil ver que $(\lambda - A_0)^{-1} = -A_0^{-1}(I - \lambda A_0^{-1})^{-1}$. Como $A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$, aplicando o Lema 2.13.1 i) e ii), obtemos que o operador $-A_\epsilon^{-1}(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1}$ está bem definido e é limitado. Cálculos simples mostram que $-A_\epsilon^{-1}(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1} = (\lambda - A_\epsilon)^{-1}$. Logo $\lambda \in \rho(A_\epsilon)$ e obtemos (2.34).

Para provar a convergência compacta de $(\lambda - A_\epsilon)^{-1}$ para $(\lambda - A_0)^{-1}$ procedemos da seguinte maneira: Como A_ϵ^{-1} converge compactamente para A_0^{-1} e como $\{(I - \lambda A_\epsilon^{-1}) : 0 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon_\lambda\}$ é limitado, concluímos que

- Se $\|u_\epsilon\|_{X_\epsilon} = 1$ então $(\lambda - A_\epsilon)^{-1}u_\epsilon = -A_\epsilon^{-1}w_\epsilon$ com $w_\epsilon = (I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1}u_\epsilon$ que é uniformemente limitado em ϵ. Logo $(\lambda - A_\epsilon)^{-1}u_\epsilon$ tem uma subseqüência E-convergente.

- Se $u_\epsilon \xrightarrow{E} u$ então $A_\epsilon^{-1}u_\epsilon \xrightarrow{E} A_0^{-1}u$. Agora, para qualquer subseqüência de $\{(\lambda - A_\epsilon)^{-1}u_\epsilon\}$ existe uma subseqüência (que novamente denotamos por $\{(\lambda - A_\epsilon)^{-1}u_\epsilon\}$) e $y \in X$ tal que,

  $$(\lambda - A_\epsilon)^{-1}u_\epsilon = -(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1}A_\epsilon^{-1}u_\epsilon = -A_\epsilon^{-1}(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1}u_\epsilon = z_\epsilon \xrightarrow{E} y.$$

  Logo,

  $$A_0^{-1}u \xleftarrow{E} A_\epsilon^{-1}u_\epsilon = -(I - \lambda A_\epsilon^{-1})z_\epsilon \xrightarrow{E} -(I - \lambda A_0^{-1})y$$

  e isto implica que $y = (\lambda - A_0)^{-1}u$. Em particular, y é independente da subseqüência tomada. Isto implica que a seqüência inteira $(\lambda - A_\epsilon)^{-1}u_\epsilon$ E-converge para $y = (\lambda - A_0)^{-1}u$ quando $\epsilon \to 0$. Portanto, $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{EE} (\lambda - A_0)^{-1}$ quando $\epsilon \to 0$.

Disto segue a convergência compacta $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (\lambda - A_0)^{-1}$ quando $\epsilon \to 0$ e o resultado está provado.$\square$

Exercício 2.13.4. *Dada uma seqüência $\{u_n\}$ com $u_n \in X_{\epsilon_n}$ e $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, se toda subseqüência de $\{u_n\}$ possui uma subseqüência $E-$convergente para um vetor u independente da subseqüência tomada, então $u_n \xrightarrow{E} u$.*

Exercício 2.13.5. *Seja $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e suponha que $B_{\epsilon_n} \xrightarrow{CC} B_0$ e que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_0$ em $\mathbb{C}$ e mostre que $\lambda_n B_{\epsilon_n} \xrightarrow{CC} \lambda_0 B_0$.*

Exercício 2.13.6. *Se $X_\epsilon = X$ e $E_\epsilon = I_X$ para todo $\epsilon \in [0,1]$ e $\mathcal{K}(X) \ni B_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{L}(X)} B_0 \in \mathcal{K}(X)$, então $B_\epsilon \xrightarrow{CC} B_0$. Reciprocamente, se X é reflexivo e $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ implica $B_{\epsilon_n}x_n \xrightarrow{n\to\infty} B_0 x$ sempre que $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, então $B_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{L}(X)} B_0$.*

Exercício 2.13.7. *Seja $X = L^2(0,\pi)$, $\epsilon \in [0,1]$, $a_\epsilon : [0,\pi] \to (0,\infty)$ continuamente diferenciável para cada $\epsilon \in [0,1]$, $D(A_\epsilon) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ e defina $A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X \to X$ por*

$$(A_\epsilon \phi)(x) = -(a_\epsilon(x)\phi'(x))', \quad x \in (0,\pi).$$

Mostre que A_ϵ *é auto-adjunto e satisfaz* $\langle A_\epsilon\phi, \phi\rangle \geq \alpha_\epsilon \frac{2}{\pi^2}\|\phi\|_X^2$ *para todo* $\phi \in D(A_\epsilon)$, *onde* $\alpha_\epsilon = \min\limits_{x\in[0,\pi]} a_\epsilon(x)$. *Conclua que* $0 \in \rho(A_\epsilon)$ *e mostre que* $A_\epsilon^{-1} \in \mathcal{K}(X)$ $\epsilon \in [0,1]$.

Exemplo 2.13.1. *No Exercício 2.13.7, supondo que* $a_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} a_0$ *uniformemente em* $[0,\pi]$ *e que* $E_\epsilon = I$ *para todo* $\epsilon \in [0,1]$, *obtemos que* $A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$.

De fato, para $f \in L^2(0,\pi)$ *e* $\epsilon \in [0,1]$, *seja* u^ϵ *a solução do problema*

$$\begin{cases} -(a_\epsilon(x)u_x^\epsilon)_x = f(x), \ x \in (0,\pi), \\ \quad u^\epsilon(0) = u^\epsilon(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Mostraremos que existe $C > 0$, *independente de* ϵ, *tal que*

$$\begin{aligned} &\|u^\epsilon\|_{H_0^1(0,\pi)} \leq C\|f\|_{L^2(0,\pi)} \quad e \\ &\|u^\epsilon - u^0\|_{H_0^1(0,\pi)} \leq C\|f\|_{L^2(0,\pi)}\|a_\epsilon - a_0\|_\infty^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como a inclusão de $H^1(0,\pi)$ *em* $L^2(0,\pi)$ *é compacta e* $a_\epsilon \to a_0$ *uniformemente em* $[0,\pi]$ *segue facilmente que* $A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$.

Procedendo como no Exemplo 2.5.1 temos que $u^\epsilon \in H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi)$ *e é fácil ver que* $\|u^\epsilon\|_{H_0^1(0,\pi)} \leq C\|f\|_{L^2(0,\pi)}$.

Do Teorema de Lax-Milgram (veja [3, Corolário 5.8]) a solução u^ϵ *de* (2.35) *pose ser caracterizada por um processo de minimização. Isto é, se definimos*

$$\lambda_\epsilon := \min_{u\in H_0^1(0,\pi)} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^\pi a_\epsilon |u_x|^2\,dx - \int_0^\pi fu\,dx \right\},$$

então λ_ϵ *é atingido em* u^ϵ. *Logo*

$$\begin{aligned} \lambda_\epsilon &= \frac{1}{2}\int_0^\pi a_\epsilon|u_x^\epsilon|^2\,dx - \int_0^\pi fu^\epsilon\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi a_\epsilon|u_x^\epsilon - u_x^0 + u_x^0|^2\,dx - \int_0^\pi f(u^\epsilon - u^0 + u^0)\,dx \end{aligned}$$

e avaliando a expressão em u^ϵ*, tendo em conta que* u^ϵ *resolve* (2.35)*, obtemos*

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 - \frac{1}{2}\int_0^\pi a_\epsilon(x)|u_x^\epsilon - u_x^0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi (a_\epsilon(x) - a_0(x))|u_x^0|^2\,dx, \qquad (2.36)$$

que nos dá

$$\lambda_\epsilon - \lambda_0 \leq \frac{1}{2}\int_0^\pi (a_\epsilon(x) - a_0(x))|u_x^0|^2\,dx. \qquad (2.37)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\lambda_0 :&= \min_{u \in H_0^1(0,\pi)} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^\pi a_0(x)|u_x|^2\,dx - \int_0^\pi fu\,dx \right\} \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\pi a_0(x)|u_x^\epsilon|^2\,dx - \int_0^\pi fu^\epsilon\,dx = \lambda_\epsilon + \frac{1}{2}\int_0^\pi (a_0(x) - a_\epsilon(x))|u_x^\epsilon|^2\,dx.\end{aligned}$$

Com isto, obtemos

$$\lambda_\epsilon - \lambda_0 \geq \frac{1}{2}\int_0^\pi (a_\epsilon(x) - a_0(x))|u_x^\epsilon|^2\,dx; \qquad (2.38)$$

e, com o auxílio de (2.37) *e* (2.38)*,*

$$|\lambda_\epsilon - \lambda_0| \leq \|a_\epsilon - a_0\|_\infty \sup_{\epsilon \in [0,\epsilon^0]} \|u^\epsilon\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq C\|f\|^2_{L^2(0,\pi)}\|a_\epsilon - a_0\|_\infty.$$

Disto e de (2.36) *deduzimos que*

$$\|u^\epsilon - u^0\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq C\|f\|^2_{L^2(0,\pi)}\|a_\epsilon - a_0\|_\infty. \square$$

Fim da Décima Segunda Aula ↑

Início da Décima Terceira Aula ↓

Lema 2.13.3. *Suponha que a família de operadores* $\{A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon,\ \epsilon \in [0,1]\}$ *satisfaz* (2.33). *Se* Σ *é um subconjunto compacto de* $\rho(A_0)$, *existe* $\epsilon_\Sigma > 0$ *tal que* $\Sigma \subset \rho(A_\epsilon)$ *para todo* $\epsilon \leqslant \epsilon_\Sigma$ *e*

$$\sup_{\epsilon\in[0,\epsilon_\Sigma]} \sup_{\lambda\in\Sigma} \|(\lambda - A_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} < \infty. \tag{2.39}$$

Além disso, para cada $u \in X$ *temos que*

$$\sup_{\lambda\in\Sigma} \|(\lambda - A_\epsilon)^{-1}E_\epsilon u - E_\epsilon(\lambda - A_0)^{-1}u\|_{X_\epsilon} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0. \tag{2.40}$$

Prova: Primeiramente mostremos que existe $\hat{\epsilon}_\Sigma > 0$ tal que $\Sigma \subset \rho(A_\epsilon)$ para todo $\epsilon \in [0, \hat{\epsilon}_\Sigma)$. Se este não fosse o caso, existiriam seqüências $\epsilon_n \to 0$, $\lambda_n \in \Sigma$ (que podemos supor convergente para um $\lambda \in \Sigma$) e $u_{\epsilon_n} \in X_{\epsilon_n}$, $\|u_{\epsilon_n}\| = 1$ tais que $A_{\epsilon_n}u_{\epsilon_n} - \lambda_n u_{\epsilon_n} = 0$ ou, equivalentemente, $\lambda_n(A_{\epsilon_n})^{-1}u_{\epsilon_n} = u_{\epsilon_n}$. Da convergência compacta $\{u_{\epsilon_n}\}$ tem uma subseqüência E-convergente para $u \in X$, $\|u\|_X = 1$ e $A_0 u = \lambda u$ o que está em contradição com $\sigma(A_0) \cap \Sigma = \emptyset$.

Mostremos que existe $\epsilon_\Sigma \in (0, \hat{\epsilon}_\Sigma)$ tal que (2.39) vale. Para isto, é suficiente provar que existe $\epsilon_\Sigma \in (0,1]$ tal que

$$\{\|(I - \lambda A_\epsilon^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} : \epsilon \in [0, \epsilon_\Sigma] \text{ e } \lambda \in \Sigma\} \text{ é limitado.}$$

Se este não fosse o caso, existiria uma seqüência $\{\lambda_n\}$ em Σ (que podemos supor convergente para um certo $\tilde{\lambda} \in \Sigma$) e uma seqüência $\{\epsilon_n\}$ em $(0,1]$ com $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tal que

$$\|(I - \lambda_n (A_{\epsilon_n})^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{\epsilon_n})} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Do Lema 2.13.1 obtemos uma contradição, já que $-\lambda_n(A_{\epsilon_n})^{-1} \xrightarrow{CC} -\tilde{\lambda}(A_0)^{-1}$ quando $n \to \infty$.

Também provamos (2.40) por contradição. Suponha que existem seqüências $\epsilon_n \to 0$, $\Sigma \ni \lambda_n \to \bar{\lambda} \in \Sigma$ e $\eta > 0$ tal que

$$\|(\lambda_n - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u - E_{\epsilon_n}(\lambda_n - A_0)^{-1} u\|_{X_{\epsilon_n}} \geqslant \eta. \tag{2.41}$$

Usando a identidade do resolvente, temos que

$$(\lambda_n - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u - (\bar{\lambda} - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u = (\bar{\lambda} - \lambda_n)(\lambda_n - A_{\epsilon_n})^{-1}(\bar{\lambda} - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u.$$

Disto e de (2.39) segue que

$$\|(\lambda_n - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u - (\bar{\lambda} - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u\|_{X_{\epsilon_n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.42}$$

Do Lema 2.13.2 temos que

$$\|(\bar{\lambda} - A_{\epsilon_n})^{-1} E_{\epsilon_n} u - E_{\epsilon_n}(\bar{\lambda} - A_0)^{-1} u\|_{X_{\epsilon_n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.43}$$

Finalmente, da continuidade do resolvente que

$$\|(\lambda_n - A_0)^{-1} u - (\bar{\lambda} - A_0)^{-1} u\|_X \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.44}$$

Agora, (2.42), (2.43) e (2.44) estão em contradição com (2.41) e o resultado está provado. $\square$

Para cada $\delta > 0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ defina $S_\delta(\lambda_0) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$.

A um ponto isolado $\lambda \in \sigma(A_0)$ associamos o seu auto-espaço generalizado $W(\lambda, A_0) = Q(\lambda, A_0)X$ onde

$$Q(\lambda, A_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - \lambda| = \delta} (\xi I - A_0)^{-1} d\xi$$

e δ é escolhido de forma que não haja nenhum outro ponto de $\sigma(A_0)$ no disco $\overline{B}^{\mathbb{C}}_\delta(\lambda) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda| \leqslant \delta\}$. Segue do Lema 2.13.3 que existe $\epsilon_{S_\delta(\lambda)}$ tal que $\rho(A_\epsilon) \supset S_\delta(\lambda)$ para todo $\epsilon \leqslant \epsilon_{S_\delta(\lambda)}$. Seja $W(\lambda, A_\epsilon) := Q(\lambda, A_\epsilon)X_\epsilon$ onde

$$Q(\lambda, A_\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - \lambda| = \delta} (\xi I - A_\epsilon)^{-1} d\xi.$$

Exercício 2.13.8. *Seja X um espaço de Banach. Se M, N são subespaços de X com $\dim(M) > \dim(N)$, mostre que existe $u \in M$, $\|u\| = 1$ tal que $\operatorname{dist}(u, N) = 1$ (Veja Lemma IV.2.3 em [12]).*

Exercício 2.13.9. *Seja X um espaço de Banach. Mostre que, se P e Q são projeções e $\dim(R(P)) > \dim(R(Q))$, então $\|P - Q\|_{\mathcal{L}(X)} \geq 1$.*

O resultado a seguir diz que o espectro de A_ϵ *se aproxima* do espectro de A_0 quando ϵ tende a zero. Já sabemos que o espectro de A_ϵ ou A_0 contém apenas auto-valores isolados de multiplicidade finita.

Teorema 2.13.1. *Seja $\{A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon,\ \epsilon \in [0,1]\}$ uma família de operadores satisfazendo (2.33). Então, valem as seguintes afirmativas:*

(i) Se $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$, existe seqüência $\{\epsilon_n\}$ em $(0,1]$ com $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e seqüência $\{\lambda_n\}$ em $\mathbb{C}$ com $\lambda_n \in \sigma(A_{\epsilon_n})$, para $n = 1, 2, 3 \cdots$, e $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$.

(ii) Se $\{\epsilon_n\}$ é uma seqüência em $(0,1]$ com $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, e $\{\lambda_n\}$ é uma seqüência em $\mathbb{C}$ com $\lambda_n \in \sigma(A_{\epsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, então $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$.

(iii) Se $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$, existe $\epsilon_1 \in (0,1]$ tal que $\dim W(\lambda_0, A_\epsilon) = \dim W(\lambda_0, A_0)$ para todo $0 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon_1$.

(iv) Se $u \in W(\lambda_0, A_0)$, então existe uma seqüência $\{\epsilon_n\}$ em $(0,1]$ com $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $u_{\epsilon_n} \in W(\lambda_0, A_{\epsilon_n})$ e tal que $u_{\epsilon_n} \stackrel{E}{\longrightarrow} u$ quando $n \to \infty$.

(v) Se $\{\epsilon_n\}$ é uma seqüência em $(0,1]$ com $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, e $\{u_n\}$ é uma seqüência com $u_n \in W(\lambda_0, A_{\epsilon_n})$, $\|u_n\|_{X_{\epsilon_n}} = 1$, então $\{u_n\}$ tem uma subseqüência $E-$convergente para um vetor u em $W(\lambda_0, A_0)$.

Prova: (i) Seja $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$ e $\delta_0 > 0$ tal que $\overline{B}^{\mathbb{C}}_{\delta_0}(\lambda_0) \cap \sigma(A_0) = \{\lambda_0\}$. Do Lema 2.13.3, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\{\|(\lambda - A_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} : \epsilon \in [0, \epsilon_0]$ e $\lambda \in S_{\delta_0}(\lambda_0)\}$ é limitado.

Suponha agora que, existe $0 < \delta < \delta_0$ e seqüência $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que, $\overline{B}_\delta(\lambda_0) \subset \rho(A_{\epsilon_n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{B}_\delta(\lambda_0) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A_{\epsilon_n})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é analítica para cada $n \in \mathbb{N}$, da prova do Lema 2.13.3 e do Teorema do Máximo Módulo (Teorema 1.5.1) temos que

$$\|(I - \lambda_0 A_{\epsilon_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{\epsilon_n})} \leqslant \sup_{\substack{|\lambda-\lambda_0|=\delta \\ n\in\mathbb{N}}} \|(I - \lambda A_{\epsilon_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{\epsilon_n})} < \infty.$$

Portanto, se $u \in X_0$, segue que

$$\|(\lambda_0 A_0^{-1} - I)u\|_X = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda_0 A_{\epsilon_n}^{-1} - I)E_{\epsilon_n} u\|_{X_{\epsilon_n}} \geqslant c\|u\|_X,$$

para algum $c > 0$ e, consequentemente, $\lambda_0 \in \rho(A_0)$. Isto contradiz a escolha de λ_0 e prova que, para cada $\delta > 0$, $\overline{B}_\delta(\lambda_0)$ contém algum ponto de $\sigma(A_\epsilon)$, para todo ϵ suficientemente pequeno.

(ii) Sejam $\{\epsilon_n\}$ uma seqüência em $(0,1]$ com $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\{\lambda_n\}$ uma seqüência em $\mathbb{C}$ com $\lambda_n \in \sigma(A_{\epsilon_n})$ tal que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ e $\{u_n\}$ uma seqüência com $u_n \in X_{\epsilon_n}$, $(I - \lambda_n (A_{\epsilon_n})^{-1})u_n = 0$ e $\|u_n\| = 1$. Então

$$\|(I - \lambda (A_{\epsilon_n})^{-1})u_n\|_{X_{\epsilon_n}} = \|(I - \lambda_n (A_{\epsilon_n})^{-1})u_n - (\lambda - \lambda_n)(A_{\epsilon_n})^{-1}u_n\|_{X_{\epsilon_n}} \to 0$$

quando $n \to \infty$. Uma vez que $\|u_n\| = 1$ temos, tomando subseqüências se necessário, $\lambda(A_{\epsilon_n})^{-1}u_n \overset{E}{\longrightarrow} u$ e $u_n \overset{E}{\longrightarrow} u$ com $\|u\| = 1$. Portanto $u - \lambda A_0^{-1}u = 0$, $u \neq 0$ e $\lambda \in \sigma(A_0)$.

(iii) Como $(\lambda - A_\epsilon)^{-1} \overset{EE}{\longrightarrow} (\lambda - A_0)^{-1}$ uniformemente para $\lambda \in S_\delta(\lambda_0)$ (veja (2.40) no Lema 2.13.3) segue que $Q_\epsilon(\lambda_0) \overset{EE}{\longrightarrow} Q(\lambda_0)$ quando $\epsilon \to 0$.

Se $v_1, \cdots, v_k$ é uma base para $W(\lambda_0, A_0) = Q_0(\lambda_0)X$, é fácil ver que, para ϵ suficientemente pequeno,

$$\{Q_\epsilon(\lambda_0)E_\epsilon v_1, \cdots, Q_\epsilon(\lambda_0)E_\epsilon v_k\}$$

é um conjunto linearmente independente em $Q_\epsilon(\lambda_0)X_\epsilon$. Disto segue que $\dim(Q_\epsilon(\lambda_0)(X_\epsilon)) \geqslant \dim(Q(\lambda_0)(X))$.

Provamos a igualdade supondo que $Q_\epsilon(\lambda_0) \xrightarrow{CC} Q(\lambda_0)$. Suponha, por redução ao absurdo que, para alguma seqüência $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

$$\dim(Q_{\epsilon_n}(\lambda_0)(X_{\epsilon_n})) > \dim(Q(\lambda_0)(X)).$$

Do Exercício 2.13.8 segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in W(\lambda_0, A_{\epsilon_n})$ com $\|u_n\| = 1$ tal que $\mathrm{dist}(u_n, E_{\epsilon_n}W(\lambda_0, A_0)) = 1$. Da convergência compacta podemos supor que $Q_{\epsilon_n}(\lambda_0)u_n = u_n \xrightarrow{E} Q_0(\lambda_0)u_0 = u_0$ e temos um absurdo, já que

$$1 \leqslant \|u_n - E_{\epsilon_n}Q_0(\lambda_0)u_0\|_{X_{\epsilon_n}} = \|Q_{\epsilon_n}(\lambda_0)u_n - E_{\epsilon_n}Q_0(\lambda_0)u_0\|_{X_{\epsilon_n}} \to 0.$$

Assim precisamos apenas provar a convergência compacta $Q_\epsilon(\lambda_0) \xrightarrow{CC} Q(\lambda_0)$ quando $\epsilon \to 0$ e isto segue de $Q_\epsilon(\lambda_0) \xrightarrow{EE} Q(\lambda_0)$, da convergência compacta $A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$ quando $\epsilon \to 0$, da limitação uniforme de $\|(\zeta A_\epsilon^{-1} - I)^{-1}\|$ para $\zeta \in S_\delta(\lambda_0)$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, dada na prova do Lema 2.13.3, e da fórmula

$$Q_\epsilon(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\lambda_0|=\delta}(\zeta I - A_\epsilon)^{-1}d\zeta = A_\epsilon^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\lambda_0|=\delta}(\zeta A_\epsilon^{-1} - I)^{-1}d\zeta.$$

(iv) Segue tomando $u_\epsilon = Q_\epsilon(\lambda_0)E_\epsilon u$.

(v) Segue da convergência compacta de Q_ϵ para Q_0 provada em (iii). $\square$

Exercício 2.13.10. *No Exemplo 2.13.1, mostre que os auto-valores e auto-funções de A_ϵ convergem para auto-valores e auto-funções de A_0. Conclua que a convergência de auto-funções ocorre na norma de $H^1(0,\pi)$.*

Exercício 2.13.11 (*). *No Exemplo 2.13.1, se λ_ϵ é um auto-valor de A_ϵ, $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$ e $\lambda_\epsilon \to \lambda_0$ quando $\epsilon \to 0$, mostre que existe $C > 0$ tal que*

$$|\lambda_\epsilon - \lambda_0| \le C\|a_\epsilon - a_0\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Fim da Décima Terceira Aula ↑

Estudar ↓

2.13.1 Perturbação

Em diversas circunstâncias estaremos interessados em analisar o comportamento, em termos de convergência compacta, espectro, etc., de operadores que surgem como linearização em torno de certas soluções estacionárias de problemas semi-lineares. Isto nos conduz a estudar o comportamento de operadores da forma $A_\epsilon + V_\epsilon$ onde $V_\epsilon : X_\epsilon \to X_\epsilon$ é um operador limitado (tipicamente a multiplicação por um potencial). Veremos que sob hipóteses bastante gerais, uma vez que se tenha convergência compacta de A_ϵ^{-1} para A_0^{-1} quando $\epsilon \to 0$, podemos obter o mesmo para operadores da forma $A_\epsilon + V_\epsilon$.

Iremos supor que a seguinte condição esteja satisfeita

$$\boxed{\text{(2.33) vale e } \; V_\epsilon \in \mathcal{L}(X_\epsilon, X_\epsilon), \; \epsilon \in [0,1] \; \text{ tal que } A_\epsilon^{-1} V_\epsilon \xrightarrow{CC} A_0^{-1} V_0.} \tag{2.45}$$

Além disso, suporemos que

$$\boxed{0 \notin \sigma(A_0 + V_0) \; .} \tag{2.46}$$

É claro que $A_0 + V_0$ tem resolvente compacto. Seja $\bar{A}_\epsilon = A_\epsilon + V_\epsilon$, $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$.

Proposição 2.13.1. *Suponha que* (2.45) *e* (2.46) *estejam satisfeitas. Então, existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que* $0 \notin \sigma(A_\epsilon + V_\epsilon)$ *para todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $\sup_{\epsilon \in (0,\epsilon_0]} \|(A_\epsilon + V_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\epsilon)} < \infty$. *Além disso,*

$$(A_\epsilon + V_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (A_0 + V_0)^{-1} \; \textit{quando} \; \epsilon \to 0.$$

Em particular, os operadores $\bar{A}_\epsilon = A_\epsilon + V_\epsilon$, $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$, *satisfazem a condição* (2.33).

Prova: Para provar o resultado note que

$$(A_\epsilon + V_\epsilon)^{-1} = (I + A_\epsilon^{-1}V_\epsilon)^{-1}A_\epsilon^{-1}$$

Como $-A_\epsilon^{-1}V_\epsilon$ converge compactamente para $-A_0^{-1}V_0$ e $-A_\epsilon^{-1}$ converge compactamente para $(-A_0)^{-1}$, a limitação uniforme segue do Lema 2.13.1.

Para provar que $(A_\epsilon + V_\epsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (A_0 + V_0)^{-1}$ observe que, para cada seqüência $u_\epsilon \in X_\epsilon$ com $\|u_\epsilon\|_{X_\epsilon} \leqslant 1$, temos

$$v_\epsilon = (A_\epsilon + V_\epsilon)^{-1}u_\epsilon = (I + A_\epsilon^{-1}V_\epsilon)^{-1}A_\epsilon^{-1}u_\epsilon$$

é uma seqüência limitada e que

$$v_\epsilon = -A_\epsilon^{-1}V_\epsilon v_\epsilon + A_\epsilon^{-1}u_\epsilon.$$

Tomando subseqüências podemos supor que $\{A_\epsilon^{-1}V_\epsilon v_\epsilon\}$ e $\{A_\epsilon^{-1}u_\epsilon\}$ são convergentes e segue que $\{v_\epsilon\}$ tem uma subseqüência convergente. Além disso, se $\{u_\epsilon\}$ E-converge para u, do que foi provado acima segue que $\{v_\epsilon\}$ $E-$converge para v com

$$v = -A_0^{-1}V_0v + A_0^{-1}u.$$

e $v = (A_0 + V_0)^{-1}u$. $\square$

Corolário 2.13.1. *Sob as hipóteses da Proposição 2.13.1, todos os resultados do Lema 2.13.3 e do Teorema 2.13.1, permanecem válidos para a família de operadores $\bar{A}_\epsilon = A_\epsilon + V_\epsilon$, $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$.*

Prova: Simplesmente observe que, da Proposição 2.13.1, os operadores $\bar{A}_\epsilon$ satisfazem a condição (2.33). $\square$

Estudar $\uparrow$

Início da Décima Quarta Aula ↓

2.14 Primeira prova

1ª Prova de SMA 5878 Análise Funcional II - Turma de 2012

Professor: Alexandre N. Carvalho

Nome:____________________________

05.05.2012

Questões	Notas	Questões	Notas
1ª		**6ª**	
2ª		**7ª**	
3ª		**8ª**	
4ª		**9ª**	
5ª		**10ª**	
Total		**Total**	

1ª Questão Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo (dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$ implica $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$).

1. Para cada $0 \neq x^* \in X^*$, $x^*(x_0) = \|x^*\|$ para no máximo um $x_0 \in \bar{B}_1(0)$.

2. Se Δ é um conjunto aberto e conexo em $\mathbb{C}$, seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e $f : \Delta \to X$ analítica. Se $\|f(\lambda)\|$ atinge um máximo absoluto em algum ponto de Δ, então $f(\lambda)$ é constante em Δ.

2ª Questão Sejam X, Y, espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$ e Λ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Se $J : \Lambda \to \mathcal{L}(X, Y)$, as seguintes afirmativas são equivalentes:

(a) Para cada $x \in X$ e $y^* \in Y^*$, a função $\Lambda \ni \lambda \mapsto y^*(J(\lambda)x) \in \mathbb{C}$ é analítica.

(b) Para cada $x \in X$, a função $\Lambda \ni \lambda \mapsto J(\lambda)x \in Y$ é analítica.

(c) A função $\Lambda \ni \lambda \mapsto J(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$ é analítica.

$\boxed{\textbf{3}^{\underline{a}}\textbf{ Questão}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e suponha que $S, T \in \mathcal{L}(X)$.

1. Se $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$, então os resolventes de S e T satisfazem a equação

$$(\lambda - S)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} = (\lambda - S)^{-1}(S - T)(\lambda - T)^{-1}$$

2. Para um $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ fixo, o conjunto $\mathcal{S}$ de todos os $T \in \mathcal{L}(X)$ tais que $\lambda_0 \in \rho(T)$ é aberto.

3. Dados um conjunto aberto e não vazio Δ em $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$ com $\sigma(T) \subset \Delta$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\sigma(S) \subset \Delta$ sempre que $S \in \mathcal{L}(X)$ e $\|S - T\| < \epsilon$; isto é, espectro de T é uma função semicontinua superiormente de T.

$\boxed{\textbf{4}^{\underline{a}}\textbf{ Questão}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Λ um subconjunto do plano complexo e $S : \Lambda \to \mathcal{L}(X)$ tal que

$$S(\lambda) - S(\mu) = (\mu - \lambda)S(\lambda)S(\mu), \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda.$$

1. Mostre que $N(S(\lambda))$ e $R(S(\lambda))$ são independentes de $\lambda \in \Lambda$.

2. Mostre que existe um operador fechado e densamente definido $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $\Lambda \subset \rho(A)$ e $S(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ se, e somente se, $N(S(\lambda)) = \{0\}$ e $R(S(\lambda))$ é denso em X para algum $\lambda \in \Lambda$

5ª Questão Seja $X = \ell^1(\mathbb{C}) = \big\{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\big\}$ com a norma $\|\{x_n\}\|_{\ell^1(\mathbb{C})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Seja $A : D(A) \subset X \to X$ definido por

$$D(A) = \{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ exceto para um número finito de } n's\}$$
$$A\{x_n\} = \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} x_j \right\}.$$

Mostre que $0 \in \rho(A)$ e que A não é fechável.

6ª Questão Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$.

1. Se $A \in \mathcal{L}(X)$, mostre que $\lambda A(\lambda - A)^{-1}$ converge para A quando $\lambda \to \infty$.

2. Se $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador fechado, densamente definido, dissipativo e tal que $R(I - A) = X$, mostre que $\lambda A(\lambda - A)^{-1}x \stackrel{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} Ax$ para todo $x \in D(A)$ e que $\lambda(\lambda - A)^{-1}x \stackrel{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} x$ para todo $x \in X$.

3. Se $A : D(A) \subset X \to X$ é como no ítem anterior, como você definiria e^A?

4. Se A fechado, densamente definido e tal que A e A^* são dissipativos, então $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1, \forall\, \lambda > 0$.

7ª Questão Seja A uma matriz $n \times n$ com coeficiente reais. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, $k \leq n$ os auto-valores de A e P_j a projeção associada ao conjunto espectral $\sigma_j = \{\lambda_j\}$, $1 \leq j \leq k$.

1. Se m_j é a dimensão da imagem de P_j, mostre que

$$(\xi - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{P_j}{\xi - \lambda_j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m_j - 1} (\xi - \lambda_j)^{-i-1} (-1)^i D_j^i P_j$$

Use isto para encontrar uma expressão para e^{At}, para cada $t \in \mathbb{R}$. (Sugestão: Faça o desenvolvimento em série de Laurent de $(\xi - A)^{-1}$ em torno de λ_j para cada $j = 1, \cdots, k$).

2. Se $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é simétrico resolva a equação

$$(\lambda - A)u = f$$

para $\lambda \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$. Use isto para encontrar uma expressão para e^{At}, para cada $t \in \mathbb{R}$ (Sugestão: Mostre que $R(P_{\{\lambda_j\}}) = N(\lambda_j - A)$ e use a função inteira $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$ para calcular e^{At}).

$\boxed{\textbf{8}^{\underline{a}}\ \textbf{Questão}}$ Seja H um espaço de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto e $f : D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função analítica em um aberto que contém $\bar{B}^{\mathbb{C}}_{\|A\|_{\mathcal{L}(H)}}(0)$. Dê condições sobre f para que

1. $f(A)$ seja auto-adjunto e
2. $f(A)$ seja compacto.

$\boxed{\textbf{9}^{\underline{a}}\ \textbf{Questão}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado densamente definido.

1. Defina a imagem numérica de A.
2. Se $W(A)$ é a imagem numérica de A e Σ um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C} \backslash W(A)$, mostre que:

   (a) Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é injetora e tem imagem fechada e satisfaz

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq d(\lambda, W(A))\|x\|. \tag{2.47}$$

(b) Se $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}, \quad \forall \lambda \in \Sigma. \tag{2.48}$$

onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$.

3. Mostre que, se H é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(H)$ é auto-adjunto, então $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

10ª Questão Para cada $\epsilon \in [0,1]$ seja X_ϵ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $E_\epsilon \in \mathcal{L}(X_0, X_\epsilon)$ tal que $\|E_\epsilon x\|_{X_\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \to 0} \|x\|_{X_0}$ para todo $x \in X_0$.

- Defina E convergência de seqüências, EE convergência de operadores e convergência compacta de operadores.

Sejam $A_\epsilon : D(A_\epsilon) \subset X_\epsilon \to X_\epsilon$ operadores fechados tais que, $0 \in \rho(A_\epsilon)$ para todo $\epsilon \in [0,1]$ e suponha que $\mathcal{K}(X_\epsilon) \ni A_\epsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1} \in \mathcal{K}(X_0)$. Se λ é um ponto isolado de $\sigma(A_0)$ definimos $W(\lambda, A_0) = Q(\lambda, A_0)X$ onde

$$Q(\lambda, A_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - \lambda| = \delta} (\xi I - A_0)^{-1} d\xi$$

e δ é escolhido tal que $\sigma(A_0) \cap \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda| \leqslant \delta\} = \{\lambda\}$.

1. Mostre que existe $\epsilon_{S_\delta(\lambda)}$ tal que $\rho(A_\epsilon) \supset S_\delta(\lambda) := \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda| = \delta\}$ para todo $\epsilon \leqslant \epsilon_{S_\delta(\lambda)}$. Seja $W(\lambda, A_\epsilon) := Q(\lambda, A_\epsilon)X_\epsilon$ onde
$$Q(\lambda, A_\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - \lambda| = \delta} (\xi I - A_\epsilon)^{-1} d\xi.$$
2. Mostre que existe $\epsilon_0 \leq \epsilon_{S_\delta(\lambda)}$ tal que $\dim W(\lambda, A_\epsilon) = \dim W(\lambda, A_0)$ para todo $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$.

Fim da Décima Quarta Aula ↑

Capítulo 3

Semigrupos e Seus Geradores

Início da Décima Quinta Aula ↓

Neste capítulo apresentamos os fatos básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares e contínuos indispensáveis ao entendimento das técnicas de solução de problemas parabólicos e hiperbólicos semilineares. Começamos com uma revisão da teoria básica mas com o objetivo principal de apresentar a teoria de semigrupos fortemente contínuos e semigrupos analíticos. A exposição apresentada neste capítulo segue [2, 7, 16]. Grande parte da exposição estará concentrada na caracterização dos geradores de semigrupos lineares já que nas aplicações da teoria, em geral, conhecemos a equação diferencial e não o operador solução.

3.1 Definições e resultados básicos

Definição 3.1.1. *Um* **semigrupo** *de operadores lineares em X é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que*

(i) $T(0) = I_X$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$.

Se, além disso,

(iii) $\|T(t)-I_X\|_{\mathcal{L}(X)} \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, *diremos que o semigrupo é uniformemente contínuo*

(iv) $\|T(t)x - x\|_X \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, *para cada* $x \in X$, *diremos que o semigrupo é fortemente contínuo.*

O estudo dos semigrupos de operadores lineares está associado ao estudo de problemas de Cauchy lineares da forma

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \\ &x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear (em geral ilimitado). O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é o operador solução de (3.1); isto é, para cada $x_0 \in X$, $t \mapsto T(t)x_0$ é a solução (em algum sentido) de (3.1). Para explicar melhor esta observação consideremos primeiramente o caso em que A é um operador linear contínuo. Neste caso, o semigrupo $t \mapsto T(t)$ é o operador solução (no sentido usual) do problema

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) \\ &T(0) = B \in \mathcal{L}(X). \end{aligned} \tag{3.2}$$

com $B = I$. Esta solução será denotada por $T(t) =: e^{tA}$. Vamos mostrar que existe uma única solução para (3.2) e que as propriedades de semigrupo estão satisfeitas. Isto segue do princípio da contração de Banach que enunciamos a seguir.

Lema 3.1.1. *Seja* X *um espaço métrico completo com métrica* $d_X : X\times X \to \mathbb{R}^+$ *e uma função* $F : X \to X$ *tal que* $d_X(F^n(x), F^n(y)) \leq k\, d_X(x, y)$ *para algum inteiro positivo* n *e* $k < 1$ (F^n *é uma contração*). *Então, existe um único* $\bar{x} \in X$ *tal que* $F(\bar{x}) = \bar{x}$. *O ponto* $\bar{x}$ *é chamado ponto fixo de* F.

Agora vamos procurar soluções para (3.2) que sejam funções em $\{U(\cdot) \in C([0,\tau],\ \mathcal{L}(X)) \cap C^1((0,\tau],\ \mathcal{L}(X)) : U(0) = B\}$ que verifiquem (3.2). Seja $K = \{U(\cdot) \in C([0,\tau], \mathcal{L}(X)) : U(0) = B\}$ e defina a transformação $F : K \to K$ por

$$F(U)(t) = B + \int_0^t AU(s)ds$$

e observe que uma solução de (3.2) é um ponto fixo de F em K e que um ponto fixo de F é uma solução de (3.2). Note que K é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma de $C([0,\tau], \mathcal{L}(X))$. Queremos mostrar que existe um inteiro positivo n tal que F^n é uma contração. De fato:

$$\begin{aligned}
\|F(U)(t) - F(V)(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \left| \int_0^t \|AU(s) - AV(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \right| \\
&\leq |t| \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \tau \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)}
\end{aligned}$$

Suponha que, para $t \in [0,\tau]$,

$$\|F^{n-1}U(t) - F^{n-1}V(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{|t|^{n-1}\|A\|^{n-1}_{\mathcal{L}(X)}}{(n-1)!} \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)},$$

então

$$\begin{aligned}
\|F^n(U)(t) - F^n(V)(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \left| \int_0^t \|AF^{n-1}U(s) - AF^{n-1}V(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \right| \\
&\leq \frac{|t|^n\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \frac{|\tau|^n\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \sup_{t\in[0,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)}.
\end{aligned}$$

Notando que $\frac{|\tau|^n\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \to 0$ quando $n \to \infty$, temos que existe um inteiro positivo n_0 tal que F^{n_0} é uma contração e segue do Princípio da Contração de Banach que existe um único ponto fixo para F. É fácil ver que este ponto fixo é uma função contínuamente diferenciável e que satisfaz (3.2).

Como a argumentação acima vale para todo $\tau \in \mathbb{R}$ obtemos que toda solução de (3.2) está globalmente definida. Vamos agora verificar que a propriedade de semigrupo está satisfeita para a solução $T(t)$ de (3.2) com $B = I$. Note que $U(t) = T(t+s)$ e $V(t) = T(t)T(s)$ são soluções de (3.2) satisfazendo $U(0) = V(0) = T(s)$. Segue da unicidade de soluções que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Portanto, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados.

É claro que estaremos interessados em situações mais gerais, já que em muitas aplicações o operador A não é limitado. Reciprocamente, dado um semigrupo de operadores lineares qualquer podemos associá-lo a uma equação differencial através da seguinte definição

Definição 3.1.2. *Se $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu* **gerador infinitesimal** *é o operador definido por $A : D(A) \subset X \to X$, onde*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \mathit{existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Exemplo 3.1.1. *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e defina $e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$. Então $\{e^{At} : t \in \mathbb{R}\}$ define um grupo uniformemente contínuo com gerador A e satisfazendo $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}$.*

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$ converge absolutamente, uniformemente em subconjuntos *compactos de* $\mathbb{R}$*, visto que* $\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}$*, portanto*

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n t^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|\, \|A\|_{\mathcal{L}(X)})^n}{n!} = e^{|t|\, \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|\, \|A\|_{\mathcal{L}(X)})^n}{n!} = \|A\|_{\mathcal{L}(X)} e^{|t|\, \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Também

$$\|e^{At} - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leq |t| \|A\|_{\mathcal{L}(X)} e^{|t| \|A\|_{\mathcal{L}(X)}} \to 0$$

quando $t \to 0$*. Segue que* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é a única solução de (3.2) com* $B = I$*. O resultado agora segue das considerações anteriores.*

O resultado a seguir é extremamente útil na obtenção de propriedades de regularidade de semigrupos.

Lema 3.1.2. *Seja* ϕ *uma função contínua e diferenciável a direita no intervalo* $[a, b)$*. Se* $D^+\phi$ *é contínua em* $[a, b)$*, então* ϕ *é continuamente diferenciável em* $[a, b)$*.*

Prova: Exercício.

Todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial que é dada no teorema a seguir.

Teorema 3.1.1. *Suponha que* $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *é um semigrupo fortemente contínuo. Então, existe* $M \geq 1$ *e* β *tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Para qualquer $\ell > 0$ *podemos escolher* $\beta \geq \frac{1}{\ell} \log \|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}$ *e então escolher* M*.*

Prova: Primeiramente note que existe $\eta > 0$ tal que $\sup_{t\in[0,\eta]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$. Isto é conseqüência do fato que, para cada sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,\infty)$ com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0^+$, $\{T(t_n)x\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada para todo $x \in X$ e, do Princípio da Limitação Uniforme, $\{\|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Escolha $\ell > 0$ tal que $\sup\{\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, 0 \leq t \leq \ell\} = M < \infty$ e seja $\beta \geq \frac{1}{\ell}\log\{\|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}\}$ isto é $\|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\beta\ell}$ e então

$$\begin{aligned}\|T(n\ell+t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(\ell)^nT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|T(\ell)\|^n_{\mathcal{L}(X)}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta n\ell}\\ &\leq Me^{|\beta|\ell}e^{\beta(n\ell+t)}, \quad 0 \leq t \leq \ell; n = 0,1,2\cdots\end{aligned}$$

e a afirmativa segue.□

O teorema a seguir caracteriza completamente os semigrupos uniformemente contínuos de operadores através de seus geradores.

Teorema 3.1.2. *Dado um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) *O semigrupo é uniformemente contínuo,*

(b) *O seu gerador infinitesimal está definido em todo X,*

(c) *Para algum A em $\mathcal{L}(X)$, $T(t) = e^{tA}$.*

Prova: Se $T(t) = e^{tA}$ para algum $A \in \mathcal{L}(X)$ as demais afirmativas foram provadas no Exemplo 3.1.1. Se o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$ está globalmente definido, então $\left\{\left\|\frac{T(t)x-x}{t}\right\|_X\right\}_{0\leq t\leq 1}$ é limitado para cada x e pelo Princípio da Limitação Uniforme temos que $\left\{\left\|\frac{T(t)-I}{t}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\right\}_{0\leq t\leq 1}$ é limitado e portanto $T(t) \to I$ quando $t \to 0^+$. É suficiente provar que, se $T(t) \stackrel{t\to 0^+}{\longrightarrow} I$ em $\mathcal{L}(X)$, existe $A \in \mathcal{L}(X)$ com $T(t) = e^{At}$.

Assumindo que $T(t) \to I$ quando $t \to 0^+$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/2$, $0 \leq t \leq \delta$. Ainda

$$\|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(T(h) - I)T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,$$
$$\|T(t) - T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(T(h) - I)T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$$

quando $h \to 0^+$, já que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada em $[0, \delta]$. Portanto $t \to T(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é contínuo e a integral $\int_0^t T(s)ds$ está bem definida. Além disso,

$$\left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s)ds - I \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/2$$

e portanto $\left(\int_0^\delta T(s)ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Defina

$$A = (T(\delta) - I) \left(\int_0^\delta T(s)ds \right)^{-1}.$$

Para cada $h > 0$,

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I) \int_0^\delta T(s)ds &= h^{-1} \left\{ \int_h^{\delta+h} T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds \right\} \\ &= h^{-1} \int_\delta^{\delta+h} T(s)ds - h^{-1} \int_0^h T(s)ds \xrightarrow{h \to 0^+} T(\delta) - I. \end{aligned}$$

Logo $h^{-1}(T(h) - I) \xrightarrow{h \to 0^+} A$ e $h^{-1}(T(t+h) - T(t)) = T(t)\frac{T(h)-I}{h} = \frac{T(h)-I}{h}T(t) \xrightarrow{h \to 0^+} T(t)A = AT(t)$. Portanto $t \to T(t)$ tem uma derivada a direita

$$\frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A = AT(t)$$

que é contínua para $t \geq 0$. Segue do Lema 3.1.2 que $t \mapsto T(t)$ é continuamente diferenciável e, da unicidade de soluções para o problema (3.2) com $B = I$ segue que $T(t) = e^{At}$, $t \geq 0$.$\square$

Em vista desse teorema a teoria de semigrupos concentra-se no estudo dos semigrupos fortemente contínuos e seus geradores.

Fim da Décima Quinta Aula ↑

Início da Décima Sexta Aula ↓

O resultado a seguir coleta alguns fatos importantes sobre semigrupos fortemente contínuos que serão utilizados com freqüência no restante do capítulo.

Teorema 3.1.3. *Suponha que* $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *seja um semigrupo fortemente contínuo.*

1. *Para qualquer* $x \in X$, $t \to T(t)x$ *é contínuo para* $t \geq 0$.

2. $t \to \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ *é semicontínua inferiormente e portanto mensurável.*

3. *Seja* A *o gerador infinitesimal de* $T(t)$*; então,* A *é densamente definido e fechado. Para* $x \in D(A)$, $t \mapsto T(t)x$ *é continuamente diferenciável e*
$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

4. $\cap_{m \geq 1} D(A^m)$ *é denso em* X.

5. *Para* $\mathrm{Re}\lambda > \beta$ *e* β *dado no Teorema 3.1.1,* λ *está no resolvente* $\rho(A)$ *de* A *e*
$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X$$

Prova: *1.* A continuidade de $t \mapsto T(t)x$ é uma consequência do Theorem 3.1.1 e do fato que, se $t > 0$ e $x \in X$,
$$\|T(t+h)x - T(t)x\|_X = \|(T(h) - I)T(t)x\|_X \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$
$$\|T(t)x - T(t-h)x\|_X \leq \|T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(h)x - x\|_X \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

2. Mostramos que $\{t \geq 0 : \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} > b\}$ é aberto em $[0, \infty)$ para cada b o que implica a afirmativa. Mas $\|T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} > b$ implica que existe $x \in X$ com $\|x\|_X = 1$ tal que $\|T(t_0)x\| > b$. Segue de *1.* que $\|T(t)x\| > b$ para todo t suficientemente próximo de t_0, logo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} > b$ para t em uma vizinhança de t_0 e o resultado segue.

3. Seja $x \in X$ e para $\epsilon > 0$, $x_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T(t)x\,dt$; então $x_\epsilon \to x$ quando $\epsilon \to 0^+$ e, para $h > 0$,

$$h^{-1}(T(h)x_\epsilon - x_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon h}\left\{\int_\epsilon^{\epsilon+h} T(t)x\,dt - \int_0^h T(t)x\,dt\right\} \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{\epsilon}(T(\epsilon)x - x).$$

Logo $x_\epsilon \in D(A)$. Será uma consequência imediata de *5.* que A é fechado pois $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $x \in D(A)$ é claro que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{T(t+h)x - T(t)x\right\} = AT(t)x = T(t)Ax$$

é contínuo e toda função com derivada a direita contínua é continuamente diferenciável.

4. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi(t) = 0$ em uma vizinhança de $t = 0$ e também para t suficientemente grande, seja $x \in X$ e $f = \int_0^\infty \phi(t)T(t)x\,dt$. Segue facilmente de $h^{-1}(T(h)f - f) = h^{-1}\int_h^\infty (\phi(t-h) - \phi(t))T(t)x\,dt$ que $f \in D(A)$ e que $Af = -\int_0^\infty \phi'(t)T(t)x\,dt$. Como $-\phi'$ satisfaz as mesmas condições que ϕ,

$$A^m f = (-1)^m \int_0^\infty \phi^{(m)}(t)T(t)x\,dt$$

para todo $m \geq 1$ e $f \in \cap_{m\geq 1} D(A^m)$. Para mostrar que tal conjunto de pontos é denso em X, escolha ϕ acima satisfazendo também $\int_0^\infty \phi(t)dt = 1$; então se, $f_n = \int_0^\infty n\phi(nt)T(t)xdt = \int_0^\infty \phi(s)T(s/n)xds$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ e temos que $f_n \in \cap_{m\geq 1} D(A^m)$ e $f_n \to x$ quando $n \to \infty$.

5. Defina $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ por

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

e note que $\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \beta}$, se Re$\lambda > \beta$ e $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$. Seja $x \in X$ e $h > 0$

$$\begin{aligned}
h^{-1}(T(h)-I)R(\lambda)x &= R(\lambda)\frac{T(h)x-x}{h} \\
&= h^{-1}\left[\int_h^\infty e^{-\lambda t+\lambda h}T(t)x - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\right] \\
&= h^{-1}\left[-\int_0^h e^{\lambda(h-t)}T(t)x + \int_0^\infty (e^{\lambda h}-1)e^{-\lambda t}T(t)x\right] \\
&\overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -x+\lambda R(\lambda)x.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto $R(\lambda)x \in D(A)$ e $(\lambda - A)R(\lambda)x = x$, e $\lambda - A$ é sobrejetivo. Também, se $x \in D(A)$ então, integrando por partes, $R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - x = AR(\lambda)x$. Segue que $(\lambda - A)R(\lambda)x = x = R(\lambda)(\lambda - A)x$ para todo $x \in D(A)$ e $\lambda - A$ é também um-a-um. Logo $(\lambda - A)$ é uma bijeção de $D(A)$ sobre X com inversa limitada $R(\lambda)$ e a prova está completa.$\square$

Teorema 3.1.4. *Sejam $\{T(t), t \geq 0\}$ e $\{S(t), t \geq 0\}$ semigrupos fortemente contínuos com geradores infinitesimais A e B repectivamente. Se $A = B$ então $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$.*

Prova: Seja $x \in D(A) = D(B)$. Do Teorema 3.1.3 segue facilmente que a função $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é diferenciável e que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\
&= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.
\end{aligned}$$

Portanto $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante e em particular seus valores em $s = 0$ e $s = t$ são os mesmos, isto é $T(t)x = S(t)x$. Isto vale para todo $x \in D(A)$ e como $D(A)$ é denso em X e $S(t)$, $T(t)$ são limitados, $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$.$\square$

↓ Estudar

Definição 3.1.3. *Seja X um espaço de Banach. Diremos que $\{T(t) : -\infty < t < \infty\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um grupo de operadores lineares limitados se*

1. $T(0) = I$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$

   Se, além disso,

3. $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$, *para todo* $x \in X$,

   diremos que $\{T(t) : -\infty < t < \infty\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um grupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados.

É claro que, se $\{T(t) : -\infty < t < \infty\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um grupo de operadores lineares limitados, então para cada $t \in \mathbb{R}$, $0 \in \rho(T(t))$ e $T(-t) = T(t)^{-1}$.

Exercício 3.1.1. *Seja*

$$X = \{u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{K}) : u \text{ é limitada e uniformemente contínua}\}$$

com a norma $\|u\|_X = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$. Defina $(T(t)u)(x) = u(t+x)$ para $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ e $u \in X$.

1. *Mostre que $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações,*
2. *Mostre que podemos definir um grupo fortemente contínuo $\{T(t) : -\infty < t < \infty\} \subset \mathcal{L}(X)$ com $T(-t) = T(t)^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*
3. *Mostre que $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ não é um semigrupo uniformemente contínuo,*

4. *Calcule o gerador infinitesimal de* $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$,

5. *Mostre que podemos definir o mesmo semigrupo em* $L^p(I)$, $1 \leq p < \infty$ *e em* $\{u \in C(I, \mathbb{K}) : u$ *é limitada e uniformemente contínua*$\}$ *com as normas usuais onde* $I = \mathbb{R}$ *ou* $I = \mathbb{R}^+$.

O Exemplo a seguir foi extraído de [7, 8] com apenas algumas poucas adaptações estéticas e alguns cálculos adicionais.

Exemplo 3.1.2 (Notável em teoria espectral de semigrupos)**.** *Seja* $X = L^p([0,1], \mathbb{C})$ *com a norma* $\|u\|_X = \|e^{-x}u(x)\|_{L^p(0,1)}$, $1 \leq p < \infty$. *Defina a integral iterada fracionária de ordem* t *de* $u \in X$ *por*

$$(I^t u)(x) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^x (x-s)^{t-1} u(s) ds, \quad x \in [0,1], \ t > 0.$$

Se $I^0 = I_X$, *então* $\{I^t : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *é um semigrupo fortemente contínuo de contrações cujo gerador* $A : D(A) \subset X \to X$ *tem espectro vazio, é ilimitado e* $\mathbb{C} \ni \lambda \to (\lambda - A)^{-1}$ *é inteira.*

Mostremos primeiramente que $\|I^t\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, $t > 0$. *Se* $u \in X$, *então*

$$e^{-x}(I^t u)(x) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^x (x-s)^{t-1} e^{-(x-s)} e^{-s} u(s) ds.$$

Assim, se p' *é tal que* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, *da desigualdade de Hölder*

$$\begin{aligned} |e^{-x}(I^t u)(x)|^p &\leq \left(\frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^x \left((x-s)^{t-1} e^{-(x-s)} \right)^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{p}} e^{-s} |u(s)| ds \right)^p \\ &\leq \frac{\Gamma(t)^{\frac{p}{p'}}}{\Gamma(t)^p} \int_0^x (x-s)^{t-1} e^{-(x-s)} e^{-ps} |u(s)|^p ds \end{aligned}$$

e integrando em $[0,1]$ *obtemos, aplicando o Teorema de Fubini, que*

$$\begin{aligned}\int_0^1 |e^{-x}(I^t u)(x)|^p dx &\leq \frac{\Gamma(t)^{\frac{p}{p'}}}{\Gamma(t)^p}\int_0^1\int_0^x (x-s)^{t-1}e^{-(x-s)}e^{-ps}|u(s)|^p ds\, dx\\ &\leq \frac{\Gamma(t)^{\frac{p}{p'}}}{\Gamma(t)^p}\int_0^1\int_s^\infty (x-s)^{t-1}e^{-(x-s)}dx\; e^{-ps}|u(s)|^p\, ds\\ &\leq \int_0^1 e^{-ps}|u(s)|^p ds.\end{aligned}$$

Logo $\|I^t u\|_X \leq \|u\|_X$*, para todo* $u\in X$ *e* $t>0$.

Mostremos agora que $I^{t+\tau} = I^t I^\tau$ *para todo* $t,\tau>0$. *De fato,*

$$\begin{aligned}(I^t(I^\tau u))(x) &= \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^x (x-r)^{t-1}(I^\tau u)(r)dr\\ &= \frac{1}{\Gamma(t)\Gamma(\tau)}\int_0^x\int_0^r (x-r)^{t-1}(r-s)^{\tau-1}u(s)dsdr\\ &= \frac{1}{\Gamma(t)\Gamma(\tau)}\int_0^x\int_s^x (x-r)^{t-1}(r-s)^{\tau-1}dru(s)ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(t)\Gamma(\tau)}\int_0^x (x-s)^{t+\tau-1}\int_0^1 (1-\theta)^{t-1}\theta^{\tau-1}d\theta u(s)ds\\ &= \frac{B(t,\tau)}{\Gamma(t)\Gamma(\tau)}\int_0^x (x-s)^{t+\tau-1}u(s)ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(t+\tau)}\int_0^x (x-s)^{t+\tau-1}u(s)ds = (I^{t+\tau}u)(x)\end{aligned}$$

Agora vamos tratar de mostrar que $I^t u \xrightarrow{t\to 0^+} u$ *em* X. *Em vista do fato que* $\|I^t\|_{\mathcal{L}(X)}\leq 1$ *para todo* $t\geq 0$*, é suficiente mostrar que* $I^t u \xrightarrow{t\to 0^+} u$ *para* u *continuamente diferenciável e com derivada limitada. Note que,*

$$\begin{aligned}&|(I^t u)(x) - u(x)|\\ &\quad\leq \frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^x |(x-s)^t - \Gamma(t+1)||u'(s)|ds + \left|\frac{x^t}{\Gamma(t+1)} - 1\right| |u(0)|\\ &\quad\leq \frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^x |s^t - \Gamma(t+1)||u'(x-s)|ds + \left|\frac{x^t}{\Gamma(t+1)} - 1\right| |u(0)| \xrightarrow{t\to 0^+} 0\end{aligned}$$

uniformemente para x em subconjuntos compactos de $(0,1]$. Além disso

$$\begin{aligned}
&2^{-p}e^{-px}|(I^tu)(x)-u(x)|^p\\
&\leq \frac{e^{-px}}{\Gamma(t+1)^p}\left(\int_0^x |s^t-\Gamma(t+1)|ds\right)^p \sup_{s\in[0,1]}|u'(s)|^p + e^{-xp}\left|\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}-1\right|^p |u(0)|^p\\
&\leq \frac{e^{-px}}{\Gamma(t+1)^p}(x^{t+1}+\Gamma(t+1)x)^p \sup_{s\in[0,1]}|u'(s)|^p + e^{-xp}\left(\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}+1\right)^p |u(0)|^p.
\end{aligned}$$

Como a função do lado direito da última desigualdade acima é integrável, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\|I^tu-u\|_X = \left(\int_0^1 e^{-px}|(I^tu)(x)-u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Resta apenas mostrar que $\sigma(A)=\varnothing$. Mostraremos este fato provando que o espectro pontual de A é vazio e que $(\lambda-A)^{-1}$ é compacto para algum $\lambda>0$. Primeiramente suponha que $u\in D(A)$ e que $Au=\alpha u$ para alguma $\alpha\in\mathbb{C}$. Então

$$\frac{d}{dt}I^tu = I^t(Au) = \alpha I^tu, \quad t>0.$$

e $I^tu=e^{\alpha t}u$ para todo $t\geq 0$ e em particular para $t=1$. Assim,

$$(I^1u)(x) = \int_0^x u(s)ds = e^{\alpha}u(x).$$

E, usando a desigualdade de Gronwall, concluímos que $u=0$. Logo $\sigma_p(A)=\varnothing$. Além disso, para $\mathrm{Re}\lambda>0$ e $x>0$

$$\begin{aligned}
e^{-x}((\lambda-A)^{-1}u)(x) &= e^{-x}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}I^tu\,dt\right)(x)\\
&= e^{-x}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^x (x-s)^{t-1}u(s)ds\ dt\\
&= \int_0^x\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-(x-s)}\frac{(x-s)^{t-1}}{\Gamma(t)}dt e^{-s}u(s)\ ds\\
&= \int_0^x e^{-(x-s)}E(x-s,\lambda)\ e^{-s}u(s)\ ds
\end{aligned}$$

onde

$$E(\theta,\lambda)=\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(t)}e^{-\lambda t}\,\theta^{\,t-1}dt$$

é tal que

$$\left|\int_0^1 e^{-\theta}E(\theta,\lambda)d\theta\right| \leq \int_0^\infty e^{-\theta}\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(t)}e^{-\mathrm{Re}\lambda t}\,\theta^{\,t-1}dt\; d\theta$$
$$= \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda t}\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^\infty e^{-\theta}\,\theta^{\,t-1}dt\; d\theta = \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$$

Definimos $E(\theta,\lambda)=0$ *para* $\theta<0$. *Para um* $\lambda>0$ *fixo, dado* $\epsilon>0$ *seja* p_ϵ *um polinômio tal que*

$$\int_{-1}^1 e^{-\theta}\,|E(\theta,\lambda)-p_\epsilon(\theta)|d\theta<\epsilon.$$

Defina $R_\epsilon\in\mathcal{L}(X)$ *por*

$$(R_\epsilon u)(x)=\int_0^1 p_\epsilon(x-s)u(s)ds = \textit{polinômio em } x$$

para cada $u\in X$. *Como* R_ϵ *tem imagem de dimensão finita, ele é compacto. Note que*

$$e^{-x}((\lambda-A)^{-1}u)(x)-e^{-x}(R_\epsilon u)(x)$$
$$=\int_0^1 e^{-(x-s)}(E(x-s,\lambda)-p_\epsilon(x-s))\;e^{-s}u(s)\;ds$$

Logo, procedendo como na prova de que $\|I^t\|_{\mathcal{L}(X)}\leq 1$, *obtemos que*

$$\|(\lambda-A)^{-1}u-R_\epsilon u\|_X\leq\int_{-1}^1 e^{-\theta}|E(\theta,\lambda)-p(\theta)|d\theta\;\|u\|_X<\epsilon\|u\|_X$$

Como $R_\epsilon\in\mathcal{L}(X)$ *é compacto obtemos que* $(\lambda-A)^{-1}$ *é compacto e portanto* $\sigma((\lambda-A)^{-1})=\{0\}$ *(já que o espectro pontual de* $(\lambda-A)^{-1}$ *em* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *é vazio).*

Segue que $\sigma(A)=\varnothing$, A *é ilimitado e* $\mathbb{C}\ni\lambda\to(\lambda-A)^{-1}$ *é inteira.*

Exercício 3.1.2. *Seja* $X = \{u : [0,\infty) \to \mathbb{C} : e^{-x}u(x) \in L^p([0,\infty),\mathbb{C})\}$ *com a norma* $\|u\|_X = \|e^{-x}u(x)\|_{L^p([0,\infty),\mathbb{C})}$, $1 \leq p < \infty$. *Defina a integral fracionária de ordem* t *de* $u \in X$ *por*

$$(I^t u)(x) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^x (x-s)^{t-1} u(s) ds, \quad x \geq 0, \ t > 0.$$

Se $I^0 = I_X$, *então* $\{I^t : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *é um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

$\uparrow$ Estudar

3.2 Soluções fracas e fortes

Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo, $A : D(A) \subset X \to X$ é o seu gerador e $x_0 \in D(A)$, vimos que $[0, \infty) \ni t \mapsto x(t) := T(t)x_0 \in X$ é continuamente diferenciável e

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t), t > 0, \\ &x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

No caso em que $x_0 \in X$ não pertence a $D(A)$, também podemos dar sentido para $x(\cdot)$ como solução de (3.4). A seguir definimos soluções fracas e fortes.

Definição 3.2.1.

a) *Uma função $x \in C([0, \infty), X) \cap C^1(0, \infty), X)$ é dita uma* **solução forte** *de (3.4) se $x(0) = x_0$, $x(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e (3.4) vale para $t > 0$.*

b) *Uma* **solução fraca** *de (3.4) é uma função $x \in C([0, \infty), X)$ tal que $x(0) = x_0$, para todo $x^* \in D(A^*)$, $[0, \infty) \ni t \mapsto \langle x(t), x^* \rangle \in \mathbb{K}$ é diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), x^* \rangle = \langle x(t), A^* x^* \rangle, \quad t \geq 0. \tag{3.5}$$

O teorema a seguir caracteriza as soluções fracas e fortes de (3.4).

Teorema 3.2.1.

1. *Uma solução forte de (3.4) é também uma solução fraca.*

2. *Uma função $x : [0, \infty) \to X$ é solução fraca de (3.4) se, e somente se,*

$$x(t) = T(t)x_0, \quad t \geq 0. \tag{3.6}$$

   Em particular, existe uma única solução fraca de (3.4). Do Teorema 3.1.3 parte 3., se $x_0 \in D(A)$ a solução fraca de (3.4) *é também uma solução forte.*

Prova: A afirmativa *1.* e a última parte da afirmativa *2.* são triviais. Vamos provar a afirmativa *2.* provando que a função dada por (3.6) é uma solução fraca de (3.4) e que soluções fracas são únicas. Defina $x : [0,\infty) \to X$ por (3.6) e seja $x^* \in D(A^*)$. Para qualquer $x_0 \in D(A)$ $t \mapsto \langle T(t)x_0, x^*\rangle$ é diferenciável com derivada $\langle T(t)x_0, A^*x^*\rangle$ e

$$\langle T(t)x_0, x^*\rangle - \langle x_0, x^*\rangle = \int_0^t \langle T(s)x_0, A^*x^*\rangle ds.$$

Por continuidade a expressão acima vale para todo $x_0 \in X$. Consequentemente, $t \mapsto \langle T(t)x_0, x^*\rangle$ é diferenciável com derivada $\langle T(t)x_0, A^*x^*\rangle$ para todo $x \in X$ e $x(\cdot)$ é uma solução fraca de (3.4).

A diferença de duas soluções de (3.4) é uma função contínua $u : [0,\infty) \to X$ que satisfaz $u(0) = 0$ e $\frac{d}{dt}\langle u(t), x^*\rangle = \langle u(t), A^*x^*\rangle$, para todo $t \geq 0$ e para todo $x^* \in D(A^*)$. Se $U(t) = \int_0^t u(s)ds$ então,

$$\langle u(t), x^*\rangle = \int_0^t \langle u(s), A^*x^*\rangle ds$$

e $\langle \frac{d}{dt}U(t), x^*\rangle = \langle U(t), A^*x^*\rangle$.

Note que $(T(t))^*D(A^*) \subset D(A^*)$ para $t \geq 0$, já que $\langle Ax, (T(t))^*x^*\rangle = \langle T(t)x, A^*x^*\rangle$ para $x^* \in D(A^*)$, $x \in D(A)$. Logo, para qualquer $t^* > 0$

$$\langle T(t^* - t)\frac{d}{dt}U(t), x^*\rangle = \langle T(t^* - t)U(t), A^*x^*\rangle$$

e $\frac{d}{dt}\langle T(t^* - t)U(t), x^*\rangle = 0$ para $0 \leq t \leq t^*$.

Como $U(0) = 0$, $\langle U(t^*), x^*\rangle = 0$ para todo $x^* \in D(A^*)$, portanto (do fato que $D(A^*)$ é total - Exercício 2.3.3) $U(t^*) = 0$ e $u(s) = 0$ para $0 \leq s < \infty$. $\square$

Fim da Décima Sexta Aula ↑

↓ Estudar

3.2.1 Semigrupos fracamente contínuos

Poder-se-ia imaginar que a classe dos semigrupos *fracamente contínuos* fosse maior que a classe dos semigrupos fortemente contínuos. Surpreendentemente, as duas classes são coincidentes. O objetivo desta seção é apresentar este resultado surpreendente e difícil (veja [5, Theorem 5.8]).

Além do Princípio da Limitação Uniforme, utilizaremos o o Teorema de Krein-Šmulian (Teorema B.2.1) e o Teorema B.0.1.

Agora estamos prontos para enunciar e demonstrar o resultado principal desta seção.

Teorema 3.2.2. *Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ em um espaço de Banach X é fortemente contínuo se, e somente se, é fracamente contínuo; isto é,*

$$\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle \in \mathbb{K}$$

é contínuo para cada $x^* \in X^*$.

Prova: Basta mostrar que continuidade fraca implica continuidade forte. Ainda, por aplicações sucessivas do Princípio da Limitação Uniforme concluímos que existe $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}.$$

Com isto, é suficiente mostrar que o subespaço vetorial $E = \{x \in X : \|T(t)x - x\|_X \xrightarrow{t \to 0^+} 0\}$ é denso em X na topologia forte.

Para cada $r > 0$ e $x \in X$, definimos $x_r^{**} \in X^{**}$ por

$$\langle x^*, x_r^{**} \rangle_{X^*, X^{**}} = \frac{1}{r} \int_0^r \langle T(s)x, x^* \rangle_{X,X^*} ds, \text{ para cada } x^* \in X^*.$$

Por outro lado, o conjunto

$$F_{x,r} = \{T(s)x : s \in [0,r]\},$$

é a imagem de $[0,r]$ pela aplicação contínua $[0,r] \ni t \mapsto T(t)x \in (X, \tau(X, X^*))$, onde $\tau(X, X^*)$ denota a topologia fraca em X. Segue que $F_{x,r}$ é um subconjunto compacto de $(X, \tau(X, X^*))$.

Do Teorema B.2.1, $\overline{\text{co}}F_{x,r}$ é compacto na topologia fraca. Seja $\{P_n\}$, $P_n : t_0 < t_1 < \cdots < t_{N_{P_n}}$, $\tau_i^n \in [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq N_{P_n}$, uma seqüência de partições e marcas do intervalo $[0,r]$ com malhas $\|P_n\| = \max\{t_i - t_{i-1} : i \leq i \leq N_{P_n}\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x^* \rangle_{X,X^*} = \frac{1}{r}\int_0^r \langle T(s)x, x^* \rangle_{X,X^*} ds, \text{ para cada } x^* \in X^*,$$

onde $\langle x_n, x^* \rangle_{X,X^*} = \langle \sum_{i=1}^{N_{P_n}} \frac{t_i - t_{i-1}}{r} T(\tau_i^n)x, x^* \rangle_{X,X^*}$ segue que existe $x_r \in \overline{\text{co}}F_{r,x}$ tal que $\langle x_r, x^* \rangle_{X,X^*} = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x^* \rangle_{X,X^*} = \langle x^*, x_r^{**} \rangle_{X^*,X^{**}}$ para todo $x^* \in X^*$. Ainda $x_r^{**} = Jx_r$

$$\langle x_r, x^* \rangle_{X,X^*} = \frac{1}{r}\int_0^r \langle T(s)x, x^* \rangle_{X,X^*} ds, \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

É claro que o conjunto $D = \{x_r : r > 0, x \in X\}$ é fracamente denso em

X. Por outro lado, se $x_r \in D$

$$
\begin{aligned}
\|T(t)x_r - x_r\|_X &= \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} |\langle x_r, T(t)^*x^*\rangle_{X,X^*} - \langle x_r, x^*\rangle_{X,X^*}| \\
&= \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} \left| \frac{1}{r}\int_0^r \langle T(s)x, T(t)^*x^*\rangle_{X,X^*} ds - \frac{1}{r}\int_0^r \langle T(s)x, x^*\rangle_{X,X^*} ds \right| \\
&= \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} \left| \frac{1}{r}\int_t^{t+r} \langle T(s)x, x^*\rangle_{X,X^*} ds - \frac{1}{r}\int_0^r \langle T(s)x, x^*\rangle_{X,X^*} ds \right| \\
&\leq \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} \left| \frac{1}{r}\int_r^{t+r} \langle T(s)x, x^*\rangle_{X,X^*} ds \right| + \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} \left| \frac{1}{r}\int_0^t \langle T(s)x, x^*\rangle_{X,X^*} ds \right| \\
&\leq \frac{2t}{r}\|x\|_X \sup_{t\in[0,r]} \|T(s)x\|_X \stackrel{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Logo $D \subset E$ e E é fracamente denso em X. Como E é um subespaço de X, segue que E é denso em X com a topologia forte. Isto completa a demonstração.□

Vamos dar uma prova mais elementar para o caso em que X é um espaço de Banach separável. Em lugar de aplicar o Teorema B.2.1 (Krein-Šmulian), vamos utilizar o o Lema B.2.1.

A parte final da prova do Teorema 3.2.2 pode ser modificada, no caso em que X é separável, da seguinte forma: Em lugar de utilizar o Teorema B.2.1, observamos que, se $\langle x, x_n^*\rangle_{X,X^*} \to \langle x, x^*\rangle_{X,X^*}$ para todo $x \in X$, então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$
\langle x_n^*, x_r^{**}\rangle = \frac{1}{r}\int_0^r \langle T(s)x, x_n^*\rangle ds \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{r}\int_0^r \langle T(s)x, x^*\rangle ds = \langle x^*, x_r^{**}\rangle
$$

Segue do Lema B.2.1 que $x_r^{**} = Jx_r$ e

$$
\langle x_r, x^*\rangle_{X,X^*} = \frac{1}{r}\int_0^r \langle T(s)x, x^*\rangle_{X,X^*} ds, \text{ para todo } x^* \in X^*.
$$

O restante da prova segue de forma idêntica.□

↑ Estudar

Início da Décima Sétima Aula ↓

Exercício 3.2.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado, densamente definido e com $1 \in \rho(A)$. Defina em $D(A)$ a norma $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_X$. Mostre que*

1. $\overline{D(A^2)}^X = X$
2. $Y := (D(A), \|\cdot\|_1)$ *é um espaço de Banach.*
3. $\overline{D(A^2)}^Y = Y$ *(Sugestão: tome $D(A) \ni f_n \to Ax \in X$, $x_n = (I - A)^{-1}(x - f_n)$ e mostre que $x_n \to x$ e $Ax_n \to Ax$).*

3.3 O Teorema de Hille-Yosida

Teorema 3.3.1 (Hille-Yosida)**.** *Suponha que $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear. Então os fatos seguintes são equivalentes*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0;$$

(ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido cujo conjunto resolvente contém (ω, ∞) e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega.$$

Prova: (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) é provado no Teorema 3.1.3, parte *3.*, em particular

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_X \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|_X dt \leq \frac{1}{\lambda - \omega}\|x\|_X$$

se $\lambda > \omega$.

Note que $T(t)e^{-\omega t} = T_1(t)$ é um semigrupo com $\|T_1(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ (chamado semigrupo de contrações) e o gerador de $T_1(t)$ é $A-\omega$ logo é suficiente tratar o caso $\omega = 0$. Suponha que **(ii)** vale com $\omega = 0$. Para $\lambda > 0$

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \lambda(\lambda - A)^{-1} = I + A(\lambda - A)^{-1}$$

então $x \in D(A)$ implica

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|_X = \|(\lambda - A)^{-1}Ax\|_X \leq \lambda^{-1}\|Ax\|_X \to 0$$

quando $\lambda \to \infty$ e, como A é densamente definido,

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}x \to x \tag{3.7}$$

para cada $x \in X$. Para cada $\lambda > 0$, defina $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Então,

$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} = \lambda\|A(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2\lambda$$

e se $x \in D(A)$, $A_\lambda x \to Ax$ quando $\lambda \to \infty$. A_λ é a **Aproximação de Yosida** do operador A. Obtemos $T(t)$ como o limite de e^{tA_λ} quando $\lambda \to \infty$. Primeiro note que

$$A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I_X$$

logo

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2(\lambda - A)^{-1}}\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leq e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq 1\end{aligned}$$

e para qualquer $\lambda, \mu > 0$ (e $t > 0$), desde que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$,

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x)ds\right\|_X\\ &\leq \int_0^1 t\left\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\right\|_X ds\\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X.\end{aligned}$$

Portanto para $x \in D(A)$, $T(t)x \equiv \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ existe uniformemente para $0 \leq t \leq t_0$, qualquer que seja $t_0 > 0$. Assim, $[0,\infty) \ni t \to T(t)x \in X$ é contínuo para $t \geq 0$ e $\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0$ e $\|T(t)x\|_X \leq \|x\|_X$. Podemos definir de forma única $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para cada $t \geq 0$.

Se $x \in X$, dado $\epsilon > 0$ existem $x_1 \in D(A)$ e $\delta > 0$ tais que, $\|x_1 - x\|_X < \epsilon/3$ e $\|T(t)x_1 - x_1\|_X < \epsilon/3$, $t \in [0,\delta]$. Assim, para todo $t \in [0,\delta]$,

$$\|T(t)x - x\|_X \leq \|T(t)(x - x_1)\|_X + \|T(t)x_1 - x_1\|_X + \|x_1 - x\|_X < \epsilon.$$

Isto mostra que $\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0$ para todo $x \in X$.

Se $x \in D(A^2)$, então $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x$ e $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}Ax = T(t)Ax$. Do fato que A é fechado obtemos que $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Segue da parte *3.* do Exercício 3.2.1 que $T(t)x \in D(A)$ sempre que $t \geq 0$ e $x \in D(A)$. Disto obtemos facilmente que $T(t)(T(s)x) = T(t+s)x$ para todo $x \in D(A)$ e $t, s \geq 0$. Da densidade de $D(A)$ em X, obtemos que $T(t)(T(s)x) = T(t+s)x$, para todo $x \in X$ e $t, s \geq 0$.

Portanto $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo. Só resta provar que A é o seu gerador.

Seja $x \in D(A^2)$, então

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Axds. \end{aligned}$$

Tomando limites, a igualdade acima também vale para $x \in D(A)$ (isto é feito usando a parte *3.* do Exercício 3.2.1).

Agora $\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds \to Ax$ quando $t \to 0^+$, para qualquer $x \in D(A)$. Portanto o gerador B de $T(t)$ deve ser uma extensão de A (isto é $D(B) \supset D(A)$ e $Bx = Ax$ quando $x \in D(A)$). Mas, por hipótese, $1 \in \rho(A)$ e, do fato que B é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, $1 \in \rho(B)$. Logo

$$X = (I - A)D(A) = (I - B)D(A),$$

então $(I - B)D(A) = X = (I - B)D(B)$, $D(A) = R((I - B)^{-1}) = D(B)$, e segue que $A = B$ e a prova está completa.$\square$

Ambas as condições **(i)** e **(ii)** dependem da escolha da norma em X. Daremos uma formulação independente da norma, mas na prática devemos usualmente procurar normas especiais para a qual o Teorema 3.3.1 se aplica.

Lema 3.3.1. *Suponha que A é um operador linear cujo conjunto resolvente contém $(0, \infty)$ e que satisfaz*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\lambda^{-n}, \quad n \geq 1,\ \lambda > 0.$$

Então existe uma norma $|\cdot|_X$ em X tal que

$$\|x\|_X \leq |x|_X \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

e

$$|(\lambda - A)^{-1}x|_X \leq \lambda^{-1}|x|_X, \quad \forall x \in X,\ \lambda > 0.$$

Prova: Se $\mu > 0$ e $|\mu - \lambda| < \mu$ então

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - \mu + (\mu - A))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu - \lambda)^k(\mu - A)^{-k-1}$$

A série converge pois $\dfrac{|\mu - \lambda|}{\mu} < 1$ e

$$\|(\mu - \lambda)^k(\mu - A)^{-k-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\frac{|\mu - \lambda|^k}{\mu^{k+1}}.$$

Isto vale, em particular, para $0 < \lambda < \mu$ e como esta é uma série de potências

$$\begin{aligned}\frac{1}{p!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^p(\lambda - A)^{-1} &= (-1)^p(\lambda - A)^{-p-1}\\ &= \sum_{k=p}^{\infty}(-1)^p\frac{k!(\mu-\lambda)^{k-p}}{p!(k-p)!}(\mu - A)^{-k-1},\end{aligned}$$

então

$$(\lambda - A)^{-p-1} = \sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}(\mu-\lambda)^{k-p}(\mu - A)^{-k-1} \tag{3.8}$$

e $0 < \lambda < \mu$

$$\|\lambda^{p+1}(\lambda - A)^{-p-1}x\|_X \le \sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{k-p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{p+1}\|\mu^{k+1}(\mu - A)^{-k-1}x\|_X.$$

Defina $\|x\|_\mu = \sup_{n\ge 0}\|\mu^n(\mu - A)^{-n}x\|_X$ para $\mu > 0$, então $\|x\|_X \le \|x\|_\mu \le M\|x\|_X$ e para $0 < \lambda < \mu$, $\|x\|_\lambda \le \|x\|_\mu$ pois, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$\|\lambda^{p+1}(\lambda - A)^{-p-1}x\|_X \le \sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{k-p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{p+1}\|x\|_\mu = \|x\|_\mu$$

onde, na última igualdade, utilizamos (3.8) com $A = 0$. Como $\lambda \mapsto \|x\|_\lambda$ é crescente e limitada superiormente, seja

$$|x|_X = \lim_{\lambda\to\infty}\|x\|_\lambda = \sup_{\lambda>0}\|x\|_\lambda.$$

Esta é uma norma em X.

Então $\|x\|_X \le |x|_X \le M\|x\|_X$ e para $0 < \lambda < \mu$

$$\begin{aligned}\|\mu^p(\mu - A)^{-p}\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_X &= \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\mu^p(\mu - A)^{-p}x\|_X\\ &\le \|\mu^p(\mu - A)^{-p}x\|_\lambda\\ &\le \|\mu^p(\mu - A)^{-p}x\|_\mu \le \|x\|_\mu \le |x|_X\end{aligned}$$

então $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \le |x|_X$ e $|\lambda(\lambda - A)^{-1}x|_X \le |x|_X$.$\square$

Fim da Décima Sétima Aula ↑

Início da Décima Oitava Aula ↓

Teorema 3.3.2. *[Forma Geral do Teorema de Hille-Yosida] Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. As seguintes afirmativas são equivalentes*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0;$$

(ii) *A é fechado, densamente definido, o conjunto resolvente de A contém (ω, ∞) e*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - \omega)^{-n}, \quad \forall \lambda > \omega, n = 1, 2, \cdots .$$

Prova: Considerando $e^{-\omega t}T(t)$ e $A - \omega$ podemos supor sem perda de generalidade que $\omega = 0$. Suponha **(i)**, da parte *5.* do Teorema 3.1.3, qualquer $\lambda > 0$ está no conjunto resolvente de A e

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

e derivando, temos

$$(\lambda - A)^{-p-1}x = \frac{1}{p!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^pT(t)xdt$$

logo $\|(\lambda - A)^{-p-1}x\|_X \leq \frac{1}{p!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^p dt \ M\|x\|_X = \lambda^{-p-1}M\|x\|_X$ para $p = 0, 1, 2, \cdots$.

Agora suponha que **(ii)** vale (com $\omega = 0$). Pelo Lema 3.3.1, podemos escolher uma norma equivalente $|\cdot|_X$ para X, tal que $\|x\|_X \leq |x|_X \leq M\|x\|_X$ e $|(\lambda - A)^{-1}x|_X \leq \lambda^{-1}|x|_X$ para $\lambda > 0$. Portanto o Teorema 3.3.1 (Teorema de Hille-Yosida) se aplica e A gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ com $|T(t)x|_X \leq |x|_X$ donde conluímos que

$$\|T(t)x\|_X \leq |T(t)x|_X \leq |x|_X \leq M\|x\|_X . \square$$

3.4 O Teorema de Lumer-Phillips

Teorema 3.4.1 (Lumer-Phillips)**.** *Suponha que $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear em um espaço de Banach X.*

(i) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, então A é fechado, densamente definido, dissipativo (veja Definição 2.7.1) e $R(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$. De fato,* $\mathrm{Re}\,\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$ *para todo $x^* \in J(x)$.*

(ii) *Se A é dissipativo, $\overline{D(A)} = X$ e $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Prova: (i) Do Teorema de Hille-Yosida, se A gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ com $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, então $R(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e para qualquer $x \in X$, $x^* \in J(x)$, $t > 0$,

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|x^*\|_{X^*} \|T(t)x\|_X \leq \|x\|_X^2$$

então,

$$\mathrm{Re}\left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle = \frac{1}{t}\left\{ \mathrm{Re}\,\langle T(t)x, x^* \rangle - \|x\|_X^2 \right\} \leq 0.$$

Portanto se $x \in D(A)$, $\mathrm{Re}\,\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

(ii) Do Teorema 2.7.1, todas as hipóteses do Teorema 3.3.1 (Teorema de Hille-Yosida) **(ii)** estão verificadas e a prova está completa.□

O seguinte resultado é uma conseqüência imediata do Corolário 2.7.1 e do Teorema 3.4.1 (Teorema de Lumer-Phillips).

Corolário 3.4.1. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em X.*

Teorema 3.4.2. *Seja A um operador dissipativo em X*

(a) *Se $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$ então, $R(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

(b) *Se A é fechável então o seu fecho $\bar{A}$ é também dissipativo.*

(c) *Se $\overline{D(A)} = X$ então, A é fechável.*

Prova: A afirmativa (a) foi provada no Teorema 2.7.1 (Teorema de Lumer). Para provar (b) seja $x \in D(\bar{A})$, $f = \bar{A}x$. Então existe uma sequência $\{x_n\} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to f = \bar{A}x$. Do Lema 2.7.1 segue que $\|\lambda x_n - Ax_n\|_X \geq \lambda \|x_n\|_X$, para $\lambda > 0$ e fazendo $n \to \infty$ temos

$$\|\lambda x - \bar{A}x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \quad \lambda > 0. \tag{3.9}$$

Como (3.9) vale para todo $x \in D(\bar{A})$, $\bar{A}$ é dissipativo pelo Lema 2.7.1. Para provar (c) suponha que A não é fechável. Então existe uma sequência $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to 0$ e $Ax_n \to f$ com $\|f\|_X = 1$. Do Lema 2.7.1 segue que para todo $t > 0$ e $x \in D(A)$

$$\|(x + t^{-1}x_n) - tA(x + t^{-1}x_n)\|_X \geq \|x + t^{-1}x_n\|_X.$$

Fazendo $n \to \infty$ e então $t \to 0$ resulta $\|x - f\|_X \geq \|x\|_X$ para todo $x \in D(A)$. Mas isto está em contradição com o fato de $D(A)$ ser denso em X. Segue que A é fechável. $\square$

Teorema 3.4.3. *Seja A dissipativo com $R(I - A) = X$. Se X é reflexivo então $\overline{D(A)} = X$.*

Prova: Seja $x^* \in X^*$ tal que $\langle x, x^* \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Mostraremos que $x^* = 0$. Como $R(I - A) = X$ é suficiente mostrar que $\langle x - Ax, x^* \rangle = 0$

para todo $x \in D(A)$ o que é equivalente a $\langle Ax, x^* \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Seja $x \in D(A)$ então, pelo Teorema 3.4.2, parte (a), existe um x_n tal que $x = x_n - (1/n)Ax_n$. Como $Ax_n = n(x_n - x) \in D(A)$, $x_n \in D(A^2)$ e $Ax = Ax_n - (1/n)A^2x_n$ ou $(I - (1/n)A)Ax_n = Ax$. Do Lema 2.7.1 segue que $\|Ax_n\|_X \leq \|Ax\|_X$. Assim, $\|x_n - x\|_X \leq (1/n)\|Ax_n\|_X \leq (1/n)\|Ax\|_X$ e $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como X é reflexivo, existe uma subsequência Ax_{n_k} de Ax_n tal que $Ax_{n_k} \stackrel{w}{\longrightarrow} f$ quando $k \to \infty$. Segue do fato que A é fechado que $f = Ax$. Finalmente, como $\langle y, x^* \rangle = 0$ para todo $y \in D(A)$, temos

$$\langle Ax_{n_k}, x^* \rangle = n_k \langle x_{n_k} - x, x^* \rangle = 0. \tag{3.10}$$

Fazendo $n_k \to \infty$ em (3.10) temos $\langle Ax, x^* \rangle = 0$. Isto vale para $x \in D(A)$ e portanto $x^* = 0$ e $\overline{D(A)} = X$.$\square$

Exemplo 3.4.1. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto (consequentemente, A é fechado e densamente definido). Suponha que A seja limitado superiormente; isto é, que exista uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Au, u \rangle \leq a \langle u, u \rangle$. Então $\mathbb{C}\backslash(-\infty, a] \subset \rho(A)$, e existe uma constante $M \geq 1$ dependendo somente de φ tal que*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \varphi\}$, $\varphi < \pi$. Segue que A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisfazendo

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{a\,t}.$$

Na verdade $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico como mostraremos posteriormente.

Prova: Note que $A - aI = A^* - aI$ são dissipativos e portanto, do Corolário 3.4.1, $A - aI$ gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Do

Exemplo 2.7.1, segue que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])} \leq \frac{1}{\sin\varphi}\frac{1}{|\lambda - a|}, \forall\, \lambda \in \Sigma_a,$$

e o resultado segue.$\square$

Fim da Décima Oitava Aula $\uparrow$

↓ Estudar

Exemplo 3.4.2 (Operadores Diferenciais de Primeira Ordem). *Seja* $a : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *uma função contínua tal que*

$$\int_0^x \frac{1}{a(s)} ds \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Seja $X = \{u \in C([0,\infty),\mathbb{K}) : u(0) = 0 \text{ e } u(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$ *com a norma* $\|u\|_X = \sup\{|u(x)| : x \in [0,\infty)\}$ *e defina* $A : D(A) \subset X \to X$ *por*

$$\begin{aligned} &D(A) = \{u \in X : \ u \text{ é diferenciável e } au' \in X\} \\ &Au = -au', \quad u \in D(A). \end{aligned}$$

É fácil ver que $D(A)$ *é denso em* X*. Vamos mostrar que* A *gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações em* X *utilizando o Teorema de Lumer-Phillips.*

Mostremos que A *é dissipativo. Seja* $\lambda > 0$*,* $u \in D(A)$ *e* $f = (\lambda - A)u$*. Vamos lidar apenas com o caso em que* u *e* f *tomam valores em* $\mathbb{R}$*, o caso complexo segue do caso real tomando partes real e imaginária.*

Seja $\xi \in (0,\infty)$ *tal que* $u(\xi) = \pm\|u\|_X$*. Assim* $u'(\xi) = 0$ *e*

$$\lambda\|u\|_X = \lambda|u(\xi)| = |\lambda u(\xi) + a(\xi)u'(\xi)| = |f(\xi)| \leq \|f\|_X = \|(\lambda - A)u\|_X,$$

mostrando que A *é dissipativo.*

Resta mostrar que $R(\lambda - A) = X$ *para algum* $\lambda > 0$*; ou seja, que dado* $f \in X$ *existe* $u \in X$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\lambda u(x) + a(x)u'(x) = f(x), \quad \forall\, x \in (0,\infty), \\ &u(0) = 0, \quad u(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Multiplicando-se pelo fator integrante $e^{\lambda\int_0^x \frac{1}{a(s)}ds}$ *a equação torna-se*

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)e^{\lambda\int_0^x \frac{1}{a(s)}ds}\right) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{\lambda\int_0^x \frac{1}{a(s)}ds}, \quad \forall\, x \in (0,\infty).$$

Agora, integrando entre 0 *e* x *e usando que* $u(0)=0$ *resulta que*

$$u(x)=\int_0^x \frac{f(\xi)}{a(\xi)}e^{-\lambda\int_\xi^x \frac{1}{a(s)}ds}d\xi.$$

Se pudermos mostrar que esta função satisfaz $u(x)\stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ *teremos mostrado que* $R(\lambda-A)=X$*. De fato, já sabemos que a função* u *definida acima é continuamente diferenciável e como* $au'=f-\lambda u$ *obtemos que* $au'\in X$ *e portanto* $u\in D(A)$*.*

Dado $\epsilon>0$ *seja* $x_\epsilon>0$ *tal que* $|f(\xi)|<\lambda\epsilon$*, para todo* $\xi>x_\epsilon$*. Se* $x>x_\epsilon$*,*

$$u(x)=\int_0^{x_\epsilon}\frac{f(\xi)}{a(\xi)}e^{-\lambda\int_\xi^{x_\epsilon}\frac{1}{a(s)}ds}d\xi\ e^{-\lambda\int_{x_\epsilon}^x\frac{1}{a(s)}ds}+\int_{x_\epsilon}^x\frac{f(\xi)}{a(\xi)}e^{-\lambda\int_\xi^x\frac{1}{a(s)}ds}d\xi.$$

Agora, se

$$B_\epsilon=\int_0^{x_\epsilon}\frac{|f(\xi)|}{a(\xi)}e^{-\lambda\int_\xi^{x_\epsilon}\frac{1}{a(s)}ds}d\xi,$$

obtemos

$$|u(x)|\le B_\epsilon\ e^{-\lambda\int_{x_\epsilon}^x\frac{1}{a(s)}ds}+\lambda\epsilon\int_{x_\epsilon}^x\frac{1}{a(\xi)}e^{-\lambda\int_\xi^x\frac{1}{a(s)}ds}d\xi$$

e, como

$$\lambda\int_{x_\epsilon}^x\frac{1}{a(\xi)}e^{-\lambda\int_\xi^x\frac{1}{a(s)}ds}d\xi=\lambda\int_0^{\int_{x_\epsilon}^x\frac{1}{a(\xi)}d\xi}e^{-\lambda\tau}d\tau\stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow}1,$$

$\limsup\limits_{x\to\infty}|u(x)|\le\epsilon$*. Desde que* $\epsilon>0$ *é arbitrário obtemos que* $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=0$*.*

Seja $\{T(t):t\ge 0\}$ *o semigrupo de contrações gerado por* A*. Se* $\phi\in D(A)$ *temos que* $u(t,x)=(T(t)\phi)(x)$*,* $t,x\ge 0$*, satisfaz o seguinte problema de valor inicial e fronteira*

$$\begin{aligned}
&u_t(t,x)+a(x)u_x(t,x)=0,\quad t,x>0\\
&u(t,0)=0,\quad u(t,x)\stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow}0,\\
&u(0,x)=\phi(x).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4.3 (O Operador de Laplace)**.** *Seja* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$*. Denote por* $C_0^2(\Omega,\mathbb{C})$ *o espaço das funções* $u:\bar{\Omega}\to\mathbb{C}$ *que são de classe* C^2 *e* *tais que* $u_{|\partial\Omega} = 0$. *Se* $1 < p < \infty$, *defina* $A_0 : D(A_0) \subset L^p(\Omega, \mathbb{C}) \to L^p(\Omega, \mathbb{C})$ *onde* $D(A_0) = C_0^2(\Omega, \mathbb{C})$ *e* $A_0 u = \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$, *se* $u \in D(A_0)$.

Se $\|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} = 1$, *defina* $\xi_u : L^p(\Omega, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *por*

$$\langle \xi_u, v\rangle := \int_\Omega \bar{u}|u|^{p-2}\, v\, dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega, \mathbb{C}).$$

Então, ξ_u *é um funcional linear contínuo com a propriedade que* $\|\xi_u\|_{[L^p(\Omega,\mathbb{C})]^*} = \|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} = \xi_u(u) = 1$. *Como* $L^p(\Omega, \mathbb{C})$ *é uniformemente convexo, segue se este é o único funcional com essas propriedades. Vamos usar esses funcionais para mostrar que* A_0 *é dissipativo e para calcular* $W(A_0)$ *(veja (2.16)).*

Primeiramente considere o caso $p \geq 2$,

$$\int_\Omega \bar{u}|u|^{p-2}\, \Delta u\, dx = -\int_\Omega J\, dx$$

onde

$$\begin{aligned} J &= |u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \bar{u} + \bar{u}\nabla u \cdot \nabla |u|^{p-2} \\ &= |u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \bar{u} + (p-2)|u|^{p-4}\bar{u}\nabla u \cdot |u|\nabla|u| \end{aligned}$$

Agora, se $u = u_1 + iu_2$,

$$\begin{aligned} &|u|^2\nabla u \cdot \nabla \bar{u} = \bar{u}\nabla u \cdot u\nabla\bar{u} = (\mathrm{Re}(\bar{u}\nabla u))^2 + (\mathrm{Im}(\bar{u}\nabla u))^2 \\ &\bar{u}\nabla u = u_1\nabla u_1 + u_2\nabla u_2 + i(u_1\nabla u_2 - u_2\nabla u_1) \\ &|u|\nabla|u| = u_1\nabla u_1 + u_2\nabla u_2 = \mathrm{Re}(\bar{u}\nabla u) \end{aligned}$$

e assim,

$$J = |u|^{p-4}\left\{(p-1)(\mathrm{Re}\,\bar{u}\nabla u)^2 + (\mathrm{Im}\,\bar{u}\nabla u)^2 + i(p-2)(\mathrm{Re}\,\bar{u}\nabla u)\cdot(\mathrm{Im}\,\bar{u}\nabla u)\right\}.$$

Logo,

$$\frac{|\mathrm{Im} J|}{\mathrm{Re} J} \leq \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}$$

e a imagem numérica $W(A_0)$ de A_0 satisfaz

$$W(A_0) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \le 0,\ \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}} \mathrm{Re}\,\lambda + |\mathrm{Im}\,\lambda| \le 0 \right\}$$

Por outro lado, se $\lambda > 0$, e $u \in D(A_0)$ com $\|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} = 1$,

$$\mathrm{Re}\left(\int_\Omega \bar{u}|u|^{p-2}(\lambda u - \Delta u)dx \right) = \lambda + \int_\Omega \mathrm{Re}J\, dx \ge \lambda$$

e, da desigualdade de Hölder,

$$\|\lambda u - \Delta u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} \ge \mathrm{Re}\left(\int_\Omega \bar{u}|u|^{p-2}(\lambda u - \Delta u)dx \right).$$

Segue que, para todo $u \in D(A_0)$,

$$\|\lambda u - \Delta u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} \ge \lambda \|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})}$$

mostrando que A_0 é dissipativo.

No caso $1 < p < 2$, devemos ser mais cuidadosos ao aplicarmos o Teorema da Divergência, visto que $\bar{u}|u|^{p-2}$ deixa de ser de classe C^1, nos pontos onde u se anula. Em princípio suponhamos u de classe C^∞. Neste caso a aplicação $x \mapsto |u(x)|^2$ é também de classe C^∞, e portanto, pelo Teorema de Sard[1], quase todo $\epsilon > 0$ é valor regular de $|u(\cdot)|^2$, e dessa forma

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega :\ |u(x)|^2 > \epsilon\}$$

possui fronteira suave. Podemos agora aplicar o Teorema da Divergência em Ω_ϵ, obtendo

$$z_\epsilon := \int_{\Omega_\epsilon} (A_0 u(x))\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} |u(x)|^{p-2}\,\bar{u}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}d\sigma - \int_{\Omega_\epsilon} J\, dx$$

[1]Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação suficientemente regular. Dizemos que $y \in \mathbb{R}^p$ é um valor regular para a aplicação f, se $f'(x)$ for um operador linear sobrejetor sempre que $x \in f^{-1}(\{y\})$. Dessa forma, $y \in \mathbb{R}^p$ é um valor regular para f se, ou $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$ ou $f^{-1}(\{y\})$ é uma subvariedade suave de $\mathbb{R}^n$ de codimensão p. Dizemos que $y \in \mathbb{R}^p$ é um valor singular de f se não for regular. Nestas condições temos o seguinte Teorema Teorema(Sard). Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ for uma aplicação suficientemente regular, então o conjunto dos valores singulares de f tem medida nula em $\mathbb{R}^p$.

onde ν representa a normal unitária exterior a $\partial\Omega_\epsilon$.

Como visto acima,

$$\mathrm{Re}J \geq 0 \ \text{e} \ \frac{|\mathrm{Im}J|}{\mathrm{Re}J} \leq \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}.$$

Além disso, como $\nabla(|u|^2) = 2|u|\nabla|u|$ é normal à superfície de nível ϵ, $|u(x)|^2 > \epsilon$ em Ω_ϵ e $|u(x)|^2 = \epsilon$ em $\partial\Omega_\epsilon$, vemos que $\nu(x) = -\eta(x)\nabla|u|(x)$, onde $\eta(x) \geq 0$ em $\partial\Omega_\epsilon$. E dessa forma,

$$\mathrm{Re}\left(\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \mathrm{Re}\left(\bar{u}\nabla u \cdot \nu\right) = |u|\frac{\partial |u|}{\partial \nu} \leq 0\,.$$

Assim, para $u \in C^\infty(\Omega) \cap D(A_0)$,

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\Omega_\epsilon} (A_0 u)(x)\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx\right) \leq 0\,,$$

para quase todo $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \to 0^+$ através dos valores regulares de $|u(\cdot)|^2$, obtemos

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\Omega} (A_0 u)(x)\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx\right) \leq 0.$$

Agora, tomando-se limites na topologia C^2, segue que A_0 é um operador dissipativo e densamente definido em $L^p(\Omega)$, para $1 < p < 2$.

Como $D(A_0)$ é denso em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$ temos do Teorema 3.4.2 que A_0 é fechável. Se A_p denota o fecho de A_0, temos que:

- *A_p é dissipativo e*
- *$W(A_p) \subset \overline{W(A_0)} \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \leq 0,\ \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}\,\mathrm{Re}\,\lambda + |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq 0\right\}$.*

Além disso, se $R(\lambda - A_p) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$ para algum $\lambda > 0$ ($\rho(A_p) \cap (0, \infty) \neq \varnothing$),

- *do Teorema 3.4.1, A_p gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações e,*

- *do Teorema 2.7.2,* $\sigma(A_p) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \leq 0,\ \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}\,\mathrm{Re}\,\lambda + |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq 0\right\}$ *e* $-A_p$ *é setorial e portanto gera um semigrupo analítico.*

Para mostrar que $R(\lambda - A_p) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$ *para algum* $\lambda > 0$ *observamos que, o Teorema 9.25 em [3] garante que, se* $\partial\Omega$ *é de classe* C^{m+2} *com* $m > \frac{n}{2}$*, toda função* $C^m(\bar{\Omega})$ *está em* $R(I - A_p)$*, qualquer que seja* $p > 1$*. Como* $C^m(\bar{\Omega})$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *e* $R(\lambda - A_p)$ *é fechado, segue que* $R(\lambda - A_p) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$*.*

Do Teorema 3.4.1, o operador A_p *é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em* $L^p(\Omega, \mathbb{C})$*. Além disso* $-A_p$ *é setorial e portanto gera um semigrupo analítico.*

Uma outra maneira de obter que $R(\lambda - A_p) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$ *é utilizar o seguinte resultado*

Teorema 3.4.4. *Para* $1 < p < \infty$ $D(A_p) = W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C})$ *e, se* $p' = \frac{p}{p-1}$*, o operador* $A_{p'} : D(A_{p'}) \subset L^{p'}(\Omega, \mathbb{C}) \to L^{p'}(\Omega, \mathbb{C})$ *é o adjunto do operador* $A_p : D(A_p) \subset L^p(\Omega, \mathbb{C}) \to L^p(\Omega, \mathbb{C})$*.*

Prova: *Para ver que* $D(A_p) = W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C})$ *é suficiente mostrar que, dado* $u \in W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C})$*, existe uma seqüência* $\{u_n\}$ *em* $C_0^2(\Omega)$ *tal que* $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ *e* $\Delta u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Delta u$ *fracamente em* $L^p(\Omega, \mathbb{C})$ *(a prova deste fato é deixada como exercício para o leitor). O restante da prova segue facilmente.* $\square$

Do Corolário 2.7.1 e do Teorema 3.4.1, o operador A_p *é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em* $L^p(\Omega, \mathbb{C})$*. Além disso, do Teorema 2.7.2,* $\sigma(A_p) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda + \frac{2\sqrt{p-1}}{|p-2|}\,|\mathrm{Im}\,\lambda| \leq 0\right\}$ *e* $-A_p$ *é setorial e portanto gera um semigrupo analítico*

Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é o semigrupo gerado por* A_p *e* $\phi \in D(A_0)$*, então*

$u(t,x) = (T(t)\phi)(x)$, $t \geq 0$ e $x \in \Omega$, satisfaz

$$\begin{aligned} &u_t(t,x) = \Delta u(t,x), \quad t > 0, x \in \Omega \\ &u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ &u(0,x) = \phi(x) \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Mais geralmente, se $\phi \in L^p(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt}\int u(t,x)\psi(x)dx = \int_\Omega u(t,x)\Delta\psi(x)dx, \quad t \geq 0, \psi \in D(A_p^*).$$

Mais adiante veremos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico e que, se $\phi \in L^p(\Omega)$, então $u(t,x)$ também satisfaz (3.11).

Exercício 3.4.1. *Mostre que o operador $A_2 : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, com $D(A_2) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, do Exemplo 3.4.3 é um operador auto-adjunto tal que $\langle A_2 u, u\rangle_{L^2(\Omega)} \leq 0$ para todo $u \in D(A_2)$.*

Exemplo 3.4.4 (O Operador da Onda)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Defina*

$$C_\beta : D(C_\beta) \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

onde $D(C_\beta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e

$$C_\beta \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & -\beta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v \\ \Delta u - \beta v \end{bmatrix}$$

Se dotamos $H_0^1(\Omega)$ do produto interno $\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v}$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ do produto interno

$$\left\langle \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} \right\rangle_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \langle u, u'\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle v, v'\rangle_{L^2(\Omega)},$$

então para todo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(C_\beta)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\langle C_\beta \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} &= \mathrm{Re}\left\langle \begin{bmatrix} v \\ \Delta u - \beta v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\
&= \mathrm{Re}[\langle v, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \Delta u - \beta v, v\rangle_{L^2(\Omega)}] \\
&= \mathrm{Re}[\langle v, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \beta\langle v, v\rangle_{L^2(\Omega)}] \\
&= \mathrm{Re}[2i\mathrm{Im}\langle v, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \beta\|v\|^2_{L^2(\Omega)}] \\
&= -\beta\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0
\end{aligned}$$

e C_β *é dissipativo. É fácil ver que* C_β^* *é dado por* $D(C_\beta^*) = D(C_\beta)$*,*

$$C_\beta^* \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & -\beta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -v \\ -\Delta u - \beta v \end{bmatrix}, \text{ para todo } \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(C_\beta^*)$$

e que C_β^* *é dissipativo.*

Se $A_2 : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *é dado por,* $D(A_2) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *e* $A_2 u = \Delta u$ *para* $u \in D(A_2)$*, temos que* $0 \in \rho(C_\beta)$*, pois*

$$C_\beta^{-1} = \begin{bmatrix} \beta A_2^{-1} & A_2^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue do Teorema de Lumer-Philips (Teorema 3.4.1) que C_β *é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Se $\{T(t)_\beta : t \geq 0\}$ *é o semigrupo gerado por* C_β *e* $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in D(C_\beta)$*, então*

$$\begin{bmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{bmatrix} = \left(T(t)_\beta \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right)(x), \quad t \geq 0 \text{ e } x \in \Omega,$$

satisfaz

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}(t,x) + \beta u_t(t,x) = \Delta u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \Omega \\
&u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\
&u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \Omega \\
&u_t(0,x) = v_0(x) \quad x \in \Omega.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Para $\beta > 0$ a equação (3.12) é conhecida como equação da onda amortecida (simplesmente equação da onda se $\beta = 0$). Mais adiante veremos que a equação da onda define um grupo fortemente contínuo de operadores unitários.

Exercício 3.4.2. *Mostre que a equação da onda define um grupo de operadores lineares limitados.*

Exercício 3.4.3. *Mostre que o semigrupo fortemente contínuo gerado pelo operador da onda decai exponencialmente quando t tende a $+\infty$.*
Sugestão: *Troque a norma do espaço adicionando ao quadrado da norma um parâmetro pequeno vezes o produto escalar em $L^2(\Omega)$ das duas coordenadas.*

Exemplo 3.4.5 (O Operador de Stokes)**.** *A seguir consideramos o operador de Stokes que surge no contexto das equações de Navier-Stokes. Seja Ω um subconjunto limitado e com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$ e considere as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que são continuamente diferenciáveis,* $\operatorname{div} u = 0$, *e cuja componente normal à fronteira de Ω u_n se anula. Então, para cada função continuamente diferenciável $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$*

$$\int_\Omega u \cdot \nabla\phi = 0.$$

Por outro lado, se um campo vetorial suave u é ortogonal a todos os gradientes, devemos ter que $\operatorname{div} u = 0$ *em* Ω *e* $u_n = 0$ *em* $\partial\Omega$. *De fato, se* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *é continuamente diferenciável, então*

$$\int_\Omega \operatorname{div} u\, \phi = \int_{\partial\Omega} \phi\, u_n - \int_\Omega u \cdot \nabla\phi.$$

Tomando ϕ *com suporte compacto, segue que* $\operatorname{div} u = 0$ *em* Ω *e consequentemente, para toda* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *continuamente diferenciável*

$$\int_{\partial\Omega} \phi\, u_n = \int_\Omega u \cdot \nabla\phi = 0,$$

o que implica $u_n = 0$ *em* $\partial\Omega$.

Seja $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, H_π *o fecho em* $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *de*

$$\{\nabla\phi : \phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})\},$$

e H_σ *o fecho de* $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *de*

$$\{u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) : \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } u_n = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Claramente H_π *e* H_σ *são subespaços fechados e ortogonais de* H *e, além disso,* $H = H_\pi \oplus H_\sigma$. *Para provar isto, é suficiente provar que toda função suave* $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *que se anula próximo a* $\partial\Omega$, *pode ser escrita na forma* $u = v + \nabla\phi$ *com* $v \in H_\sigma$ *e* $\nabla\phi \in H_\pi$. *Seja* ϕ *uma solução de*

$$\Delta\phi = \operatorname{div} u \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial n} = u_n = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

que existe pois $\operatorname{div} u$ *é ortogonal às funções constantes. Então,* ϕ *é suave e* $v = u - \nabla\phi$ *é suave,* $\operatorname{div} v = 0$ *em* Ω *e* $v_n = 0$ *em* $\partial\Omega$.

Seja P *a projeção de 'Leray'; isto é, a projeção ortogonal em* H *sobre* H_σ. *O operador de Stokes é o operador* $A : D(A) \subset H_\sigma \to H_\sigma$ *definido por*

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N) : \operatorname{div} u = 0 \text{ e } u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$$

e

$$Au = P\Delta u \qquad \textit{para todo } u \in D(A).$$

Como P *é auto-adjunto (pois é ortogonal), para* $u, v \in D(A)$ *temos que* $Pu = u$, $Pv = v$, *e*

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega P\Delta u \cdot v = \int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega u \cdot \Delta v = \int_\Omega u \cdot P\Delta v = \langle u, Av\rangle$$

e, para algum $\lambda > 0$,

$$\langle Au, u\rangle = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq -\lambda \int_\Omega |u|^2.$$

Portanto, A *é simétrico e limitado superiormente. Agora provamos que* A *é sobrejetor, e do Teorema 2.5.1 temos que* A *é auto-adjunto.*

Como $R(A)$ *é fechada e* A *é injetor, é suficiente mostrar que* $R(A)$ *é densa; isto é, dado* $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, *existe* $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *e* $p \in H^1(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \ \textit{ em } \Omega, \\ \mathrm{div} u &= 0 \ \textit{ em } \Omega, \\ u &= 0 \ \textit{ em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Este problema de Stokes é um sistema fortemente elípico, no sentido de [1] e portanto resolúvel. Isto mostra que A *é auto-adjunto, positivo e tem resolvente compacto. Consequentemente* A *gera um semigrupo fortemente contíno de contrações.*

Veremos mais tarde que A *gera um semigrupo analítico.*

Estudar $\uparrow$

Início da Décima Nona Aula ↓

3.5 Fórmulas exponenciais

Teorema 3.5.1. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo fortemente contínuo em* X. *Se*

$$A(h)x = \frac{T(h)x - x}{h}$$

então para todo $x \in X$ *temos*

$$T(t)x = \lim_{h \to 0^+} e^{tA(h)}x \tag{3.13}$$

e o limite é uniforme em t *em qualquer intervalo limitado de* $[0, \infty)$.

Prova: Seja $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ com $\omega \geq 0$ e seja A o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$. Como para todo $h > 0$ $A(h)$ é limitado o semigrupo $e^{t\,A(h)}$ está bem definido. Além disso $A(h)$ e $T(t)$ comutam, logo o mesmo ocorre com $e^{t\,A(h)}$ e $T(t)$. Ainda

$$\|e^{t\,A(h)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-t/h} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^k \frac{\|T(hk)\|_{\mathcal{L}(X)}}{k!} \leq Me^{\frac{t}{h}(e^{\omega h}-1)}.$$

Portanto, para $0 < h \leq 1$ temos

$$\|e^{t\,A(h)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{t\omega e^{\omega}}.$$

É facil ver que para $x \in D(A)$, $e^{(t-s)A(h)}T(s)x$ é diferenciável em s e que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)A(h)}T(s)x\right) &= -A(h)e^{(t-s)A(h)}T(s)x + e^{(t-s)A(h)}AT(s)x \\ &= e^{(t-s)A(h)}T(s)(Ax - A(h)x).\end{aligned}$$

Consequentemente, para $0 < h \leq 1$ e $x \in D(A)$ temos

$$\begin{aligned}\|T(t)x - e^{t\,A(h)}x\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)A(h)}T(s)x\right) ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)A(h)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\, ds \|Ax - A(h)x\|_X \\ &\leq tM^2 e^{t\omega(e^{\omega}+1)} \|Ax - A(h)x\|_X.\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0^+$ obtemos (3.13) para $x \in D(A)$. Como ambos $\|e^{t\,A(h)}\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ são uniformemente limitados em um intervalo finito de tempo e como $D(A)$ é denso em X obtemos que (3.13) vale para todo $x \in X$.$\square$

Exemplo 3.5.1. *Seja $X = LUC(\mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas e unifomemente contínuas em $\mathbb{R}$. Seja*

$$(T(t)f)(x) = f(x+t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações em X. Seu gerador infinitesimal tem domínio

$$D(A) = \{f \in X : f' \in X\}$$

e em $D(A)$, $Af = f'$. Para este semigrupo temos

$$(A(h)f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (\Delta_h f)(x),$$

É fácil verificar que

$$(A(h)^k f)(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(x+mh) = (\Delta_h^k f)(x).$$

Usando o Teorema 3.5.1 obtemos

$$f(x+t) = \lim_{h \to 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\Delta_h^k f)(x).$$

O limite acima existe uniformemente para $x \in \mathbb{R}$ e t em intervalos limitados de $[0,\infty)$. A fórmula acima é uma generalização do Teorema de Taylor para funções que são somente contínuas. Note que se f tem k derivadas contínuas então $\lim_{h\to 0^+}(\Delta_h^k f)(x) = f^{(k)}(x)$.

Teorema 3.5.2 (O Segundo Limite Fundamental). *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X. Se A é o seu gerador infinitesimal, então*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right]^n x, \quad \forall x \in X$$

e os limites são uniformes para t em intervalos limitados de $\mathbb{R}^+$.

Prova: Suponha que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. Vimos que para $Re\lambda > \omega$, $(\lambda - A)^{-1}$ é analítica em λ e

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\, ds, \quad x \in X.$$

Derivando n vezes em λ, substituindo $s = vt$ e tomando $\lambda = n/t$ encontramos

$$\left(\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right)^{(n)} x = (-1)^n t^{n+1}\int_0^\infty (ve^{-v})^n T(tv)x dv.$$

Mas

$$\left((\lambda - A)^{-1}\right)^{(n)} = (-1)^n n!(\lambda - A)^{-n-1}$$

e portanto

$$\left[\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right]^{n+1} x = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty (ve^{-v})^n T(tv)x\, dv.$$

Notando que

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty (ve^{-v})^n\, dv = 1$$

obtemos

$$\left[\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right]^{n+1} x - T(t)x = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty (ve^{-v})^n [T(tv)x - T(t)x]\, dv. \quad (3.14)$$

Dado $\epsilon > 0$ escolhemos $0 < a < 1 < b < \infty$ tal que $t \in [0, t_0]$ implica

$$\|T(tv)x - T(t)x\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon, \quad a \leq v \leq b.$$

Então quebramos a integral em quatro integrais I_1, I_2, I_3, I_4 nos intervalos $[0,a]$, $[a,b]$, $[b,c]$ e $[c,\infty)$ respectivamente onde $c > b$ é tal que $ve^{-v} \leq \min\{e^{-4}, e^{-v/2}\}$ para todo $v \geq c$. Logo

$$\|I_1\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{n^{n+1}}{n!}(ae^{-a})^n \int_0^a \|T(tv)x - T(t)x\|_{\mathcal{L}(X)} dv,$$

$$\|I_2\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \epsilon \frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b (ve^{-v})^n dv < \epsilon,$$

$$\|I_3\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{n^{n+1}}{n!}(be^{-b})^n \int_b^c \|T(tv)x - T(t)x)\|_{\mathcal{L}(X)} dv,$$

$$\|I_4\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{n^{n+1}}{n!} e^{-2n} \int_c^\infty (e^{-v/2})^{n/2} \|(T(tv)x - T(t)x) dv\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Aqui usamos o fato que $ve^{-v} \geq 0$ é não decrescente para $0 \leq v \leq 1$ e não crescente para $v \geq 1$. Como além disso $ve^{-v} < e^{-1}$ para $v \neq 1$, $\|I_1\|_{\mathcal{L}(X)}, \|I_3\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ uniformemente para $t \in [0, t_0]$ quando $n \to \infty$. Escolhendo n suficientemente grande em I_4, vemos que a integral na estimativa de I_4, converge e que $\|I_4\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ uniformemente para $t \in [0, t_0]$ quando $n \to \infty$. Consequentemente

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} \right]^{n+1} x - T(t)x \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \epsilon$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário temos

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} \right]^{n+1} x = T(t)x.$$

Ainda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} x = x.$$

e o resultado segue.$\square$

3.6 Pseudo-resolventes

Seja A um operdor fechado e densamente definido em X. Se μ e λ estão em $\rho(A)$, então temos

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

Motivado por isto definimos

Definição 3.6.1. *Seja Δ um subconjunto do plano complexo. Uma família $J(\lambda)$, $\lambda \in \Delta$, de operadores lineares limitados em X satisfazendo*

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu), \quad \lambda, \mu \in \Delta \tag{3.15}$$

é chamado um pseudo-resolvente *em Δ.*

O objetivo final desta seção é determinar condições sob as quais existe um operador fechado e densamente definido A tal que $J(\lambda)$ é o resolvente de A.

Lema 3.6.1. *Seja Δ um subconjunto de $\mathbb{C}$. Se $J(\lambda)$ é pseudo-resolvente em Δ então, $J(\lambda)J(\mu) = J(\mu)J(\lambda)$. O núcleo $N(J(\lambda))$ e a imagem $R(J(\lambda))$ são independentes de $\lambda \in \Delta$. $N(J(\lambda))$ é um subespaço fechado de X.*

Prova: É evidente de (3.15) que $J(\lambda)$ e $J(\mu)$ comutam para $\lambda, \mu \in \Delta$ e que $N(J(\lambda))$ é fechado. Reescrevendo (3.15) na forma

$$J(\lambda) = J(\mu)[I + (\mu - \lambda)J(\lambda)]$$

é claro que $R(J(\mu)) \supset R(J(\lambda))$ e por simetria temos a igualdade. Semelhantemente $N(J(\lambda)) = N(J(\mu))$. $\square$

Fim da Décima Nona Aula ↑

Início da Vigésima Aula ↓

Teorema 3.6.1. *Seja Δ um subconjunto de $\mathbb{C}$ e seja $J(\lambda)$ pseudo-resolvente em Δ. Então, $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador linear fechado densamente definido se, e somente se, $N(J(\lambda)) = \{0\}$ e $R(J(\lambda))$ é denso em X.*

Prova: Claramente se $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador fechado e densamente definido A, temos $N(J(\lambda)) = \{0\}$ e $R(J(\lambda)) = D(A)$ é denso em X. Suponha agora que $N(J(\lambda)) = \{0\}$ e $R(J(\lambda))$ é denso em X. De $N(J(\lambda)) = \{0\}$ segue que $J(\lambda)$ é um-a-um. Seja $\lambda_0 \in \Delta$ e defina

$$A = \lambda_0 I - J(\lambda_0)^{-1}.$$

O operador A assim definido é claramente linear, fechado e $D(A) = R(J(\lambda_0))$ é denso em X. Da definição de A é claro que

$$(\lambda_0 I - A)J(\lambda_0)x = J(\lambda_0)(\lambda_0 I - A)x = x, \quad \forall x \in D(A)$$

e portanto $J(\lambda_0) = (\lambda_0 I - A)^{-1}$. Se $\lambda \in \Delta$ então

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)J(\lambda) &= ((\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A))J(\lambda) \\
&= ((\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A))J(\lambda_0)[I - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda)] \\
&= I + (\lambda - \lambda_0)[J(\lambda_0) - J(\lambda) - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda_0)J(\lambda)] \\
&= I
\end{aligned}$$

e semelhantemente $J(\lambda)(\lambda I - A)x = x$ para todo $x \in D(A)$. Portanto $J(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ para todo $\lambda \in \Delta$. Em particular A é independente de λ_0 e é unicamente determinado por $J(\lambda)$.$\square$

A seguir damos condições suficientes para que pseudo-resolventes sejam resolventes.

Teorema 3.6.2. *Seja $\Delta \subset \mathbb{C}$ ilimitado e seja $J(\lambda)$ um pseudo-resolvente em Δ. Se $R(J(\lambda))$ é denso em X e existe uma sequência $\lambda_n \in \Delta$ com $|\lambda_n| \to \infty$ e*

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \tag{3.16}$$

para alguma constante M, então $J(\lambda)$ é o resolvente de um único operador fechado e densamente definido.

Prova: De (3.16) segue que $\|J(\lambda_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Seja $\mu \in \Delta$. De (3.15) deduzimos que

$$\|(\lambda_n J(\lambda_n) - I)J(\mu)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Portanto, se $x \in R(J(\mu))$ temos

$$\lambda_n J(\lambda_n)x \to x, \quad n \to \infty. \tag{3.17}$$

Como $R(J(\mu))$ é denso em X e $\lambda_n J(\lambda_n)$ é uniformemente limitada, temos que (3.17) vale para todo $x \in X$. Se $x \in N(J(\lambda))$ então $\lambda_n J(\lambda_n)x = 0$ e de (3.17) deduzimos que $x = 0$. Portanto $N(J(\lambda)) = \{0\}$ e, do Teorema 3.6.1, $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador fechado e densamente definido A. $\square$

Corolário 3.6.1. *Seja $\Delta \subset \mathbb{C}$ ilimitado e $J(\lambda)$ um pseudo-resolvente em Δ. Se existe uma sequência $\lambda_n \in \Delta$ tal que $|\lambda_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n J(\lambda_n)x = x, \quad \forall x \in X \tag{3.18}$$

então $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador (unicamente definido) fechado e densamente definido A.

Prova: Do Princípio da Limitação Uniforme e de (3.18) seque que (3.16) vale. Do Lema 3.6.1 sabemos que $R(J(\lambda))$ é independente de $\lambda \in \Delta$ e portanto (3.18) implica que $R(J(\lambda))$ é denso em X. Portanto, as condições do Teorema 3.6.2 estão satisfeitas e o resultado segue do Teorema 3.6.1.$\square$

3.7 O semigrupo dual e o Teorema de Stone

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X e seja $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ o *semigrupo dual*. O semigrupo dual não precisa ser fortemente contínuo em X^*. Nesta seção caracterizaremos o subespaço de X^* onde o semigrupo dual é fortemente contínuo e utilizaremos este resultado para demonstrar o Teorema de Stone.

Definição 3.7.1. *Seja $S : D(S) \subset X \to X$ um operador linear em X e seja Y_0 um subespaço de X. O operador $\tilde{S}$ definido por $D(\tilde{S}) = \{x \in D(S) \cap Y_0 : Sx \in Y_0\}$ e $\tilde{S}x = Sx$ para $x \in D(\tilde{S})$ é chamado parte de S em Y_0.*

Teorema 3.7.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X com gerador infinitesimal A e $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ o semigrupo dual. Se A^* é o adjunto de A e $X^\odot$ é o fecho de $D(A^*)$ em X^*, então a restrição $\{T(t)^\odot : t \geq 0\}$ de $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ a $X^\odot$ é um semigrupo fortemente contínuo em $X^\odot$. O gerador infinitesimal $A^\odot$ de $\{T(t)^\odot : t \geq 0\}$ é a parte de A^* em $X^\odot$. Além disso,*

$$X^\odot = \{x^* \in X^* : \lim_{t \to 0^+} T(t)^* x^* = x^*\}.$$

Prova: Como A é o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$, do Teorema 3.3.2, existem constantes ω e M tais que para todo $\lambda > \omega$, $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Segue que $\lambda \in \rho(A^*)$ e

$$\|(\lambda I^* - A^*)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X^*)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Seja $J(\lambda)$ a restrição de $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ a $X^\odot$. Segue que

$$\|J(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X^\odot)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu), \quad \lambda, \mu > \omega$$

e, procendendo como na prova de (3.17) (provando o resultado primeiramente em $D(A^*)$ e estendendo a $X^\odot$ por passagem ao limite), temos que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda J(\lambda)x^* \to x^*, \quad \forall x^* \in X^\odot.$$

Segue do Corolário 3.6.1 que $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador fechado e densamente definido $A^\odot$ em $X^\odot$. Ainda, $A^\odot$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)^\odot : t \geq 0\}$ em $X^\odot$. Para $x \in X$ e $x^\odot \in X^\odot$ temos

$$\left\langle \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x, x^\odot \right\rangle_{X,X^*} = \left\langle x, \left(I^\odot - \frac{t}{n}A^\odot\right)^{-n} x^\odot \right\rangle_{X,X^*}, \quad n = 1, 2, 3 \cdots .$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando o Teorema 3.5.2 obtemos

$$\langle T(t)x, x^\odot \rangle_{X,X^*} = \langle x, T(t)^\odot x^\odot \rangle_{X,X^*}.$$

Segue que para $x^\odot \in X^\odot$, $T(t)^* x^\odot = T(t)^\odot x^\odot$ e $T(t)^\odot$ é a restrição de $T(t)^*$ a $X^\odot$.

Note ainda que, se $x^* \in X^*$ é tal que $\lim_{t\to 0^+} T(t)^* x^* = x^*$, então

$$x_\epsilon^* = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T(t)^* x^* dt \overset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} x^*$$

e se $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\langle x, T(h)^* x_\epsilon^* - x_\epsilon^* \rangle_{X,X^*} &= \frac{1}{h}\langle [T(h) - I]\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T(t)x\, dt, x^* \rangle_{X,X^*} \\
&\overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \langle \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T(t)Ax\, dt, x^* \rangle_{X,X^*} = \langle \frac{1}{\epsilon}[T(\epsilon)x - x], x^* \rangle_{X,X^*} = \langle Ax, x_\epsilon^* \rangle_{X,X^*}.
\end{aligned}$$

Segue que $x_\epsilon^* \in D(A^*)$ e consequentemente $x^* \in X^\odot$. Isto mostra que $X^\odot$ é exatamente o conjunto dos $x^* \in X^*$ para os quais $\lim_{t\to 0^+} T(t)^* x^* = x^*$.

Para concluir a prova temos que mostrar que $A^{\odot}$ é a parte de A^* em $X^{\odot}$. Primeiramente mostremos que, $A^{\odot} \subset A^*$. De fato, se $x^{\odot} \in D(A^{\odot})$ então, para cada $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}\langle x, A^{\odot}x^{\odot}\rangle_{X,X^*} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\langle x, T(t)^{\odot}x^{\odot} - x^{\odot}\rangle_{X,X^*}\\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\langle T(t)x - x, x^{\odot}\rangle_{X,X^*} = \langle Ax, x^{\odot}\rangle_{X,X^*}.\end{aligned}$$

Consequentemente, $x^{\odot} \in D(A^*)$ e $A^*x^{\odot} = A^{\odot}x^{\odot}$, provando a afirmativa.

Seja $x^* \in D(A^*)$ tal que $A^*x^* \in X^{\odot}$. É claro que $x^* \in X^{\odot}$. Além disso, $(\lambda I^* - A^*)x^* \in X^{\odot}$ e

$$x^* = (\lambda I^* - A^*)^{-1}(\lambda I^* - A^*)x^* = (\lambda I^{\odot} - A^{\odot})^{-1}(\lambda I^* - A^*)x^*.$$

Portanto $x^* \in D(A^{\odot})$ e aplicando $\lambda I^{\odot} - A^{\odot}$ em ambos os lados da igualdade acima temos $(\lambda I^* - A^*)x^* = (\lambda I^{\odot} - A^{\odot})x^*$ e portanto $A^{\odot}x^* = A^*x^*$. Isto mostra que $A^{\odot}$ é a parte de A^* em X^*.$\square$

O seguinte resultado identifica alguns casos em que o semigrupo dual é fortemente contínuo e segue diretamente do Lema 2.3.2 e do Teorema 3.7.1.

Corolário 3.7.1. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X com gerador infinitesimal A. O semigrupo dual $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X^* cujo gerador infinitesimal é A^*.*

Uma vez que a restrição de $T(t)^*$ ao subespaço $X^{\odot}$ é um semigrupo fortemente contínuo, estamos exatamente na mesma posição que começamos. Em um espaço de Banach $X^{\odot}$ e com um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)^{\odot} : t \geq 0\}$ gerado pela parte $A^{\odot}$ de A^* em $X^{\odot}$.

Podemos introduzir o espaço $X^{\odot *}$ e o semigrupo dual $T(t)^{\odot *}$ que é fortemente contínuo em $X^{\odot\odot} := \overline{D(A^{\odot *})}$.

A dualidade entre os elementos de X e $X^{\odot}$ pode ser usada para definir uma imersão j (note que $X^{\odot}$ é fraco-$*$ denso em X^*) de X em $X^{\odot *}$ com

$$\langle x^{\odot}, jx\rangle_{X^{\odot},X^{\odot *}} = \langle x, x^{\odot}\rangle_{X,X^{\odot}}.$$

É claro que

$$T(t)^{\odot *} jx = j(T(t)x)$$

e portanto $j(X) \subset X^{\odot\odot}$. Sempre que $j(X) = X^{\odot\odot}$ diremos que X é $\odot-$reflexivo com respeito ao semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Fim da Vigésima Aula $\uparrow$

Início da Vigésima Primeira Aula ↓

Seja H um espaço de Hilbert. Um operador linear limitado limitado U em H é unitário se $U^* = U^{-1}$. Recorde que U é unitário se, e somente se, $R(U) = H$ e U é uma isometria.

Teorema 3.7.2 (Stone)**.** *Um operador A é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo de operadores unitários em um espaço de Hilbert H se, e somente se, iA é auto-adjunto.*

Prova: Se A é o gerador de um grupo fortemente contínuo de operadores unitários $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$, então A é densamente definido e utilizando o Corolário 3.7.1 obtemos, para $x \in D(A)$,

$$-Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{U(-t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{U^*(t)x - x}{t}.$$

Logo $x \in D(A^*)$ e $-Ax = A^*x$; ou seja, $A \subset -A^*$. Procedendo exatamente da mesma forma, para $x \in D(A^*)$ obtemos que $A \supset -A^*$. Logo $A = -A^*$ e $(iA)^* = iA$ é auto-adjunto.

Se por outro lado iA é auto-adjunto, então A é densamente definido e $A = -A^*$. Portanto, para todo $x \in D(A)$ temos

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = -\overline{\langle Ax, x\rangle}$$

e $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$, isto é, A é dissipativo. Como $A = -A^*$, $\mathrm{Re}\langle A^*x, x\rangle = 0$ para todo $x \in D(A) = D(A^*)$ e também A^* é dissipativo. Logo A e A^* são densamente definidos, fechados, dissipativos e, do Corolário 3.4.1, ambos A e $A^* = -A$ são geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos de contrações em H. Se $\{U(t) : t \geq 0\}$ e $\{U^*(t) : t \geq 0\}$ são os semigrupos gerados por A e A^* respectivamente definimos

$$T(t) = \begin{cases} U(t), & t \geq 0, \\ U^*(-t), & t \leq 0. \end{cases}$$

Então $T(t)$ é um grupo. De fato: Como A e $-A$ são geradores de semigrupos fortemente contínuos $U(t)$ e $U^*(t)$. Se $W(t) = U(t)U^*(t)$, então para $x \in D(A) = D(-A)$

$$\begin{aligned}\frac{W(t+h)x - W(t)x}{h} &= \frac{[U(t+h)x - U(t)]U^*(t+h)x}{h} \\ &+ \frac{U(t)[U^*(t+h) - U^*(t)]x}{h} \\ &\to U(t)[A - A]U^*(t)x = 0, \quad \text{quando } h \to 0^+.\end{aligned}$$

Portanto, para $x \in D(A)$ temos que $W(t)x = x$, $t \geq 0$. Como $D(A)$ é denso em H e $W(t)$ é limitado temos que $W(t) = I$. De modo completamente análogo obtemos que $U^*(t)U(t) = I$ e $U^*(t) = (U(t))^{-1}$, $t \geq 0$. Como $T(t)^{-1} = T(-t) = T(t)^*$, segue que $T(t)$ é unitário e,

$$\begin{aligned}T(t+s) &= U(t+s)U(-s)U(-s)^* = U(t)U(-s)^* \\ &= T(t)T(s), \text{ se } s < 0 < t,\ t+s > 0 \quad \text{ e} \\ T(t+s) &= T(-t-s)^{-1} = (T(-s)T(-t))^{-1} \\ &= T(t)T(s), \text{ se } s < 0 < t,\ t+s < 0.\end{aligned}$$

Os demais casos são imediatos da definição de $T(t)$. Consequentemente, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo fortemente contínuo de operadores unitários sobre H e a prova está completa.$\square$

Exemplo 3.7.1. *Considere o semigrupo* $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ *do Exemplo 3.4.4. Note que, neste caso o gerador* C_0 *de* $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ *satisfaz* $C_0^* = -C_0$ *e consequentemente,* iC *é auto-adjunto. Segue do Teorema de Stone (Teorema 3.7.2) que* $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ *se estende a um grupo fortemente contínuo de operadores unitários* $\{T_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 3.7.2. *Considere o operador* $iA_2 : D(A_2) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *onde* A_2 *é o operador do Exercício 3.4.1. Como* A_2 *é auto-adjunto, segue do Teorema de Stone (Teorema 3.7.2) que* iA_2 *gera um grupo fortemente contínuo de operadores unitários.*

Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é o semigrupo gerado por* iA_2 *e* $\phi \in D(A_2)$*, então* $u(t,x) = (T(t)\phi)(x)$, $t \geq 0$ *e* $x \in \Omega$*, satisfaz*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i}\, u_t(t,x) = \Delta u(t,x), \quad t > 0, x \in \Omega \\ &u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ &u(0,x) = \phi(x) \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Mais geralmente, se $\phi \in L^2(\Omega)$,

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\int u(t,x)\psi(x)dx = \int_\Omega u(t,x)\Delta\psi(x)dx, \quad t \geq 0, \psi \in D(A_2).$$

A equação em (3.19) *aparece na literatura associada com a equação de Schrödinger.*

3.8 Transformada inversa de Laplace

Vimos no Teorema 3.1.3, *5.* que

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt,$$

se Reλ é grande. Isto sugere que usando a transformada inversa de Laplace poderemos encontrar $T(t)$, conhecido A. No que se segue perseguiremos este objetivo.

Lema 3.8.1. **(a)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$

(b) *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é tal que* $\dfrac{f(t)}{(1+|t|)}$ *é integrável em* $\mathbb{R}$ *e* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| dt < \infty$*, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin Nt}{\pi t} dt \to f(0) \quad \textit{quando } N \to +\infty.$$

Prova: **(a)** Note que, se σ é a curva no plano complexo dada pela figura abaixo,

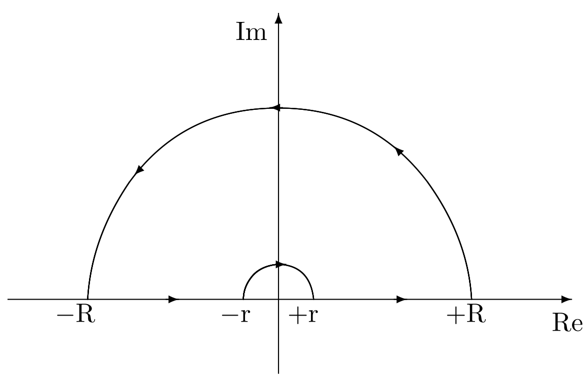


Figure 3

integrando a função analítica $\mathbb{C}\backslash\{0\} \ni z \mapsto e^{iz} \in \mathbb{C}$ ao longo de σ, temos

$$0 = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{r}^{R} \frac{e^{it}}{t} dt + i \int_{\pi}^{0} e^{ire^{i\theta}} d\theta + i \int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta.$$

O resultado agora segue notando que $\dfrac{\text{sen} t}{t}$ é par, fazendo $r \to 0$, $R \to \infty$ e considerando que (do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)

$$\left| \int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \right| \leq \int_{0}^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) $\int_{-1}^{1} \frac{\sin Nt}{\pi t} dt = \int_{-N}^{N} \frac{\sin t}{\pi t} dt \to 1$ quando $N \to \infty$ e

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin Nt}{\pi t} dt - f(0) \int_{-1}^{1} \frac{\sin Nt}{\pi t} dt &= \int_{|t|\leq 1} \frac{f(t) - f(0)}{\pi t} \sin Nt \, dt \\ &+ \int_{|t|\geq 1} \frac{f(t)}{\pi t} \sin Nt \, dt,\end{aligned}$$

ambos os termos a direita tendem a zero quando $N \to \infty$ pelo Lema de Riemann-Lebesgue.$\square$

Teorema 3.8.1. *Suponha que A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. Se $\gamma > \max\{0, \omega\}$, $x \in D(A^2)$ e $t > 0$*

$$T(t)x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda.$$

Além disso, para cada $\epsilon > 0$, o limite acima é uniforme no intervalo $[\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]$.

Prova: Como $\mathrm{Re}\lambda = \gamma > \omega$, $(\lambda - A)^{-1}$ existe e é uniformemente limitada. De fato, como $x \in D(A^2)$ temos

$$(\lambda - A)^{-1} x = \lambda^{-1} x + \lambda^{-2} Ax + \lambda^{-2} (\lambda - A)^{-1} A^2 x$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iM}^{\gamma+iN} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iM}^{\gamma+iN}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}d\lambda\right)x\\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iM}^{\gamma+iN}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2}[Ax+(\lambda-A)^{-1}A^2x]d\lambda\end{aligned}$$

e ambos os termos convergem, uniformemente para t em $[\epsilon,\epsilon^{-1}]$, quando $N,M\to\infty$, o primeiro por integração por partes e o segundo porque o integrando tem norma menor ou igual a $\mathrm{C}/|\lambda|^2$, para alguma constante positiva C, e portanto converge absolutamente. Só resta mostrar que o limite é $T(t)x$.

Agora para $\mathrm{Re}\lambda=\gamma$

$$(\lambda-A)^{-1}x=\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds,$$

então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda &= \int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN}e^{\lambda(t-s)}d\lambda\right\}T(s)x\,ds\\ &= \int_0^\infty\frac{\sin N(t-s)}{\pi(t-s)}e^{\gamma(t-s)}T(s)x\,ds\\ &= \int_{-t}^\infty\frac{\sin N\tau}{\pi\tau}e^{-\gamma\tau}T(t+\tau)x\,d\tau.\end{aligned}$$

A função

$$f(\tau)=\begin{cases}\langle e^{-\gamma\tau}T(t+\tau)x,x^*\rangle_{X,X^*}, & \tau\geq -t\\ 0, & \tau<-t\end{cases}$$

satisfaz as condições do Lema 3.8.1 para qualquer $x^*\in X^*$ e $t>0$ pois f é diferenciável em $\tau=0$ com $f'(0)=\langle T(t)(A-\gamma)x,x^*\rangle_{X,X^*}$ e

$$\frac{|f(\tau)|}{1+|\tau|}\leq C\,e^{-(\gamma-\omega)|\tau|},\quad \tau\in\mathbb{R},$$

para alguma constante positiva C. Assim,

$$\langle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda,x^*\rangle_{X,X^*}\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(0)=\langle T(t)\,x,x^*\rangle_{X,X^*}.$$

Isto vale para todo $x^* \in X^*$ e a prova está completa.$\square$

Exercício 3.8.1. *Se a, b são números reais estendidos com $a < b$ e $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ é absolutamente integrável, mostre o Lema de Riemann-Lebesgue; isto é,*

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_a^b f(t)\,\mathrm{sen}\mu t\,dt = \lim_{\mu\to\infty}\int_a^b f(t)\cos\mu t\,dt = 0.$$

Sugestão: *No caso em que f é continuamente diferenciável e tem suporte compacto em (a, b), integre por partes para provar o resultado.*

Fim da Vigésima Primeira Aula $\uparrow$

Início da Vigésima Segunda Aula ↓

3.9 Operadores setoriais e analiticidade

Suponha que o gerador A de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ seja tal que $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \phi\} \subset \rho(A)$ para algum $\phi \in (\pi/2, \pi)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma.$$

Mostraremos que o semigrupo gerado por A é analítico em um setor contendo o eixo real positivo.

Se $x \in D(A^2)$ e $t > 0$ então, para algum $\gamma > 0$,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda.$$

O integrando é analítico para $\lambda \in \Sigma$ e portanto podemos deformar o contorno de integração para a curva Γ consistindo dos dois raios $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pm\phi, |\lambda| > r\}$, do arco $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r, |\arg \lambda| \leq \phi\}$ para r pequeno e orientada no sentindo da parte imaginária crescente (veja Figura 3.1).

De fato, quando $\mathrm{Im}\lambda = \pm N$, $-kN \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \gamma$ ($k = |\mathrm{cotg}\, \phi| > 0$),

$$\|e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x\|_X \leq \frac{e^{t\mathrm{Re}\lambda} C \|x\|_X}{\sqrt{(\mathrm{Re}\lambda)^2 + N^2}}$$

e, dividindo o intervalo de integração $[-kN, \gamma]$ em $[-kN, -N^{\frac{1}{2}}]$ e $[-N^{\frac{1}{2}}, \gamma]$, vemos que as integrais correspondentes tendem a zero quando $N \to \infty$.

Portanto

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda,$$

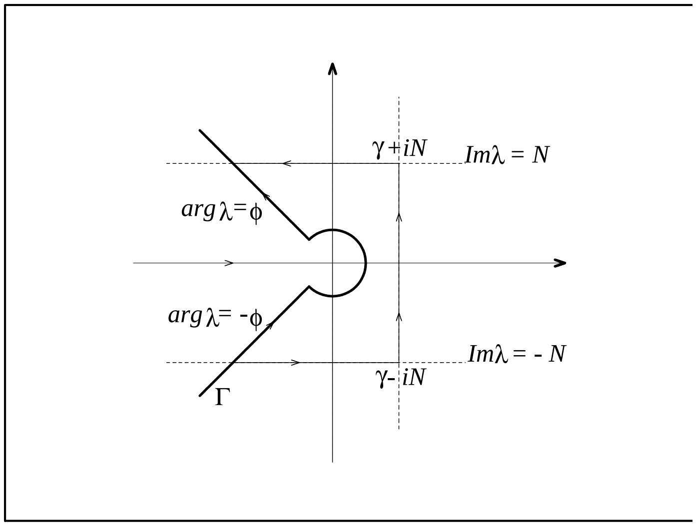


Figura 3.1:

e esta expressão vale para todo $x \in X$ porque converge em norma. De fato, para $t > 0$, $\arg\lambda = \pm\phi$

$$\|e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\frac{e^{-t|\lambda|k_1}}{|\lambda|}, \quad k_1 = |\cos\phi| > 0$$

então,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda,$$

com convergência na norma de $\mathcal{L}(X)$ qualquer $t > 0$. A convergência é uniforme para $\epsilon \leq t$, qualquer $\epsilon > 0$, então $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínuo para $t > 0$ (mas claramente a convergência não é uniforme quando $t \to 0$, a menos que A seja limitado). Ainda mais, a integral converge uniformemente para t complexo em $|\arg t| \leq \epsilon_1 < \phi - \pi/2$, $\epsilon_0 \leq |t|$, ($\epsilon_i > 0$, $i = 0, 1$), logo $t \mapsto T(t)$ é analítico em um setor $|\arg t| < \phi - \pi/2$ contendo o eixo real positivo.

Esta prova de analiticidade não usa o fato que A é o gerador de um semigrupo mas somente propriedades do resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ quando $|\lambda| \to \infty$. De fato, qualquer operador densamente definido A tal que $-A$ é setorial gera um semigrupo analítico.

Definição 3.9.1. *Se* $\Sigma^{\mathrm{o}}_{0,\theta}$ *denota o interior de* $\Sigma_{0,\theta}$*, diremos que* $\{T(t) : t \in \Sigma^{\mathrm{o}}_{0,\theta} \cup \{0\}\}$ *é um semigrupo analítico se* $\Sigma^{\mathrm{o}}_{0,\theta} \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ *é analítica,* $T(0) = I$*,* $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para todo* $t, s \in \Sigma_{0,\theta} \cup \{0\}$ *e* $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x$ *(observe que* $t \to 0$ *por pontos de* $\Sigma^{\mathrm{o}}_{0,\theta}$*).*

Teorema 3.9.1. *Suponha que* $A : D(A) \subset X \to X$ *seja densamente definido e que* $-A$ *seja setorial; isto é, que existam constantes* a, C *tais que* $\phi \in (\pi/2, \pi)$*,* $\Sigma_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \phi\} \subset \rho(A)$ *e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|} \quad \text{em } \Sigma_{a,\phi}.$$

Então A *gera um semigrupo fortemente contínuo* $\{T(t),\, t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *com*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0,$$

onde Γ_a *é a fronteira de* $\Sigma_{a,\phi} \backslash \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| \leq r\}$*,* r *pequeno, orientada no sentido da parte imaginária crescente. Além disso,* $t \mapsto T(t)$ *se estende a uma função analítica de* $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \phi - \pi/2\}$ *em* $\mathcal{L}(X)$ *(ou a complexificação de* X*, se* X *é um espaço de Banach real) e para algum* $K > 0$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{at}, \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K t^{-1} e^{at},$$

para todo $t > 0$*. Note que*

$$\frac{d}{dt} T(t) = AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$ *e que* $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ *é contínua.*

Prova: Defina $T(t)$ pela integral acima, se $\lambda = a + \mu$

$$e^{-at} T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu t}(\mu - (A - a))^{-1} d\mu$$

e $\|(\mu-(A-a))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\mu|}$. Não há perda de generalidade em supor que $a=0$.

Como observado acima, $t \mapsto T(t)$ é analítica. Primeiramente provaremos que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $t\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ são limitados para $t > 0$. Mudando variáveis para $\mu = \lambda t$,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}(\frac{\mu}{t} - A)^{-1}\frac{d\mu}{t},$$

e o contorno é ainda Γ_0 já que o integrando é analítico. Logo

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} e^{\mathrm{Re}\mu}\frac{C}{|\mu|/t}\frac{|d\mu|}{t} = K < \infty$$

uniformemente para $t > 0$. Semelhantemente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}A(\lambda - A)^{-1}d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}[-I + \lambda(\lambda - A)^{-1}]d\lambda\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}d\lambda + \frac{t^{-1}}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}\frac{\mu}{t}(\frac{\mu}{t} - A)^{-1}d\mu\end{aligned}$$

o primeiro termo é zero e o segundo é estimado da seguinte forma

$$\left\|\frac{t^{-1}}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}\frac{\mu}{t}(\frac{\mu}{t} - A)^{-1}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{2\pi t}\int_{\Gamma_0} e^{\mathrm{Re}\mu}C|d\mu| = K_1 t^{-1} < \infty.$$

Para ver que isto é $AT(t)$, note que A é um operador fechado, pois $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ para $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$. Como a integral que define $T(t)$ é um limite de somas de Riemann é fácil ver que $AT(t)x = T(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$.

Pela analiticidade e convergência uniforme para cada $t > 0$, temos

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda,$$

que é $AT(t)$ como mostrado acima. Seja $x \in D(A)$, $t > 0$ e

$$T(t)x = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\frac{d\lambda}{\lambda}\right)x + \frac{t}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}\frac{\mu}{t}(\frac{\mu}{t} - A)^{-1}Ax\frac{d\mu}{\mu^2}$$

logo

$$\|T(t)x - x\|_X \leq \frac{t}{2\pi}\int_{\Gamma_0} e^{\mathrm{Re}\mu}C\|Ax\|_X|\frac{d\mu}{\mu^2}| = \mathcal{O}(t)$$

quando $t \to 0^+$. Como $\{\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} : t \geq 0\}$ é limitado, $T(t)x \to x$ quando $t \to 0^+$ para todo $x \in X$. Finalmente, para $0 \leq s \leq t$ a aplicação $s \mapsto T(t-s)T(s)x$ é contínua e é diferenciável (analítica) para $0 < s < t$, com

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)T(s)x) = -AT(t-s)T(s)x + T(t-s)AT(s)x = 0$$

então é constante e

$$T(t-s)T(s)x = T(t)x, \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq t, x \in X.$$

Esta é a propriedade de semigrupo e a prova de que $T(t)$ é um semigrupo fortemente contínuo está completa. Para concluir a prova do teorema, devemos mostrar que A é seu gerador. Mas $T(t)x - x = \displaystyle\int_0^t T(s)Ax\,ds$, quando $t > 0$, $x \in D(A)$, então $\frac{1}{t}(T(t)x - x) \to Ax$ quando $t \to 0^+$ e A está contido no gerador. A é de fato o gerador pois 1 está no resolvente de A e do gerador. $\square$

Teorema 3.9.2. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ densamente definido e tal que $-A$ é setorial com resolvente compacto. Então o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ gerado por A é compacto.*

Qualquer operador auto-adjunto limitado superiormente é gerador de um semigrupo analítico (veja Exemplo 2.7.1) assim, o operador de Stokes do Exemplo 3.4.5 gera um semigrupo analítico. O operador de Laplace A_p do Exemplo 3.4.3 também gera um semigrupo analítico. No Exemplo 4.4.1 apresentaremos um operador matricial (associado a equação de ondas fortemente amortecidas) que gera um semigrupo analítico

Observação 3.9.1. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico em X, então para todo $x_0 \in X$, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto T(t)x_0 \in X$ é uma solução forte de* (3.4).

Fim da Vigésima Segunda Aula $\uparrow$

Capítulo 4

Potências Fracionárias

Início da Vigésima Terceira Aula ↓

4.1 Introdução

Este capítulo será dedicado à extensão do cálculo operacional desenvolvido na Seção 2.8.2 para incluir funções do tipo $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0] \ni \lambda \mapsto \lambda^\alpha \in \mathbb{C}$, que não estão em $\mathcal{U}_\infty(A)$.

As potências fracionárias de operadores setoriais desempenham papel fundamental na teoria de existência de soluções para equações diferenciais parciais não lineares do tipo parabólico e a análise do comportamento assintótico de soluções para estes problemas.

Vamos começar esta seção motivando a definição de potências fracionárias de operadores fechados. Em primeiro lugar observe que se γ é uma curva fechada, retificável e simples em $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ e $n(\gamma;a)$ denota o índice da curva γ em $a \in \mathbb{C}$ temos do Teorema dos Resíduos que

$$a^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - a}d\lambda$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ com $n(\gamma; a) = 1$. Aqui $\lambda^\alpha = e^{\alpha \log \lambda}$ e $\log \lambda$ é o ramo principal do logarítimo.

Se $A \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\sigma(A) \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ e γ é uma curva fechada, retificável e simples em $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ tal que $n(\gamma; a) = 1$, $\forall\, a \in \sigma(A)$, definimos na Seção 2.8.1 (em analogia com a observação acima)

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. É fácil ver, da expressão acima e das observações que precedem o Teorema 2.9.2, que $I^\alpha = I$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

É claro que $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$, $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ ($\{A^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}\}$ é um grupo) e que A^n coincide com a definição usual (a n-ésima iterada de A). Vimos que A^α é a α iterada de A quando $\alpha \in \mathbb{Z}$.

No que se segue buscamos expressões equivalentes de A^α que façam sentido para uma classe de operadores fechados mais ampla que aquela dos operadores limitados.

Para $0 < \phi < \pi$ defina $\Sigma_\phi = \{\lambda \in C : |\arg \lambda| \leq \phi\}\backslash B_r^{\mathbb{C}}(0)$. Como $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\sigma(A) \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, podemos escolher $0 < \phi < \pi$ e $0 < r < R$ tais que $\sigma(A) \subset \Sigma_\phi \cap B_R^{\mathbb{C}}(0) =: \Sigma_{R,\phi}$.

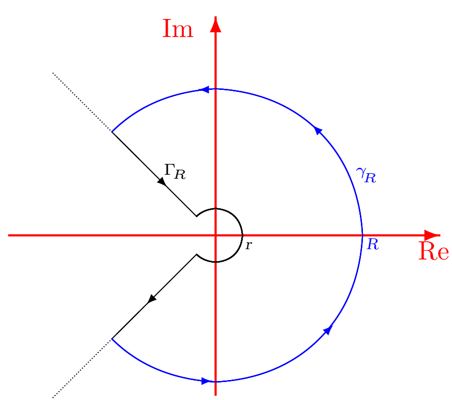


Figura 1

Denote por Γ_R a porção da fronteira de Σ_ϕ que está em B_R orientada no sentido da parte imaginária decrescente, γ_R a porção da fronteira de B_R que está em Σ_ϕ orientada no sentido anti-horário. Com isto, o traço da curva $\Gamma_R + \gamma_R$ é a fronteira de $\Sigma_{R,\phi}$. Escolha $R > 2\|A\|$. Com isto temos que

$$\begin{aligned} A^\alpha &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R+\gamma_R} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda \end{aligned} \tag{4.1}$$

e, para $|\lambda| = R > 2\|A\|$,

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| = \|(I - \lambda^{-1}A)^{-1}\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \| \leq \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{R}} \leq 2. \tag{4.2}$$

Se agora tomamos $\mathrm{Re}\alpha < 0$ vamos mostrar que a integral sobre γ_R em (4.1) converge para zero quando R tende para infinito. De fato,

$$\| \int_{\gamma_R} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda\| \leq \int_{-\phi}^{\phi} R^{\mathrm{Re}\alpha} e^{-\theta\,\mathrm{Im}\alpha} \|(Re^{i\theta} - A)^{-1}\| R\, d\theta$$

e de (4.2) é fácil ver que a integral sobre γ_R tende a zero quando R tende para infinito.

Se Γ denota a fronteira de Σ_ϕ orientada no sentido da parte imaginária decrescente, os cálculos acima mostram que sempre que $\mathrm{Re}\alpha < 0$

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda. \tag{4.3}$$

Observe que a convergência da integral em (4.3) somente depende da estimativa espectral em (4.2) e não do operador A. Isto segue facilmente se parametrizamos Γ. Vamos apenas considerar a parte Γ_+ de Γ com parte imaginária positiva e fora da bola de raio r. Então

$$\| \int_{\Gamma_+} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda\| \leq \int_r^\infty t^{\mathrm{Re}\alpha} e^{-\phi\,\mathrm{Im}\alpha} \|(te^{i\phi} - A)^{-1}\| dt.$$

Como o resolvente é contínuo sobre Γ a convergência da integral acima segue somente de (4.2) ainda mais esta convergência é uniforme para α em qualquer compacto de $\{\nu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\nu < 0\}$. A convergência da integral sobre a parte de Γ com parte real negativa segue de forma semelhante.

Esta observação nos indica uma classe mais geral de operadores A para os quais podemos definir as potências A^α com $\operatorname{Re}\alpha < 0$. Esta classe é a classe dos operadores fechados, densamente definidos A com resolvente contendo $\mathbb{C}\backslash\Sigma_\phi$ e tais que $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ é limitada em $\mathbb{C}\backslash\Sigma_\phi$, $0 < \phi < \pi$.

Note que se $\psi = \pi - \phi$, então $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ é limitado em $\mathbb{C}\backslash\Sigma_\phi$ se, e somente se, $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é limitado em $-\mathbb{C}\backslash\Sigma_\phi$ se, e somente se, $(1 + |\lambda|)\|(\lambda + A)^{-1}\|$ é limitado em $-\mathbb{C}\backslash\Sigma_\phi$.

A seguir mostramos que se $(1+s)\|(s+A)^{-1}\| \leq M$, $s \in [0,\infty)$, então $(1+|\lambda|)\|(\lambda+A)^{-1}\|$ é limitado em $-\mathbb{C}\backslash\Sigma_\phi$ para $\pi-\phi = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2M}$. Em particular, com isto teremos mostrado que podemos definir A^α através de (4.3) para todo operador A tal que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, $t \geq 0$.

4.2 Operadores de tipo positivo

Seja X um espaço de Banach. Um operador linear A em X é dito de **tipo positivo** com constante $M \geq 1$ (veja [2]), se é fechado, densamente definido, $\mathbb{R}^+ \subset \rho(-A)$ e

$$(1 + s)\|(s + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad s \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

Denotamos o conjunto dos operadores de tipo positivo por

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(X)$$

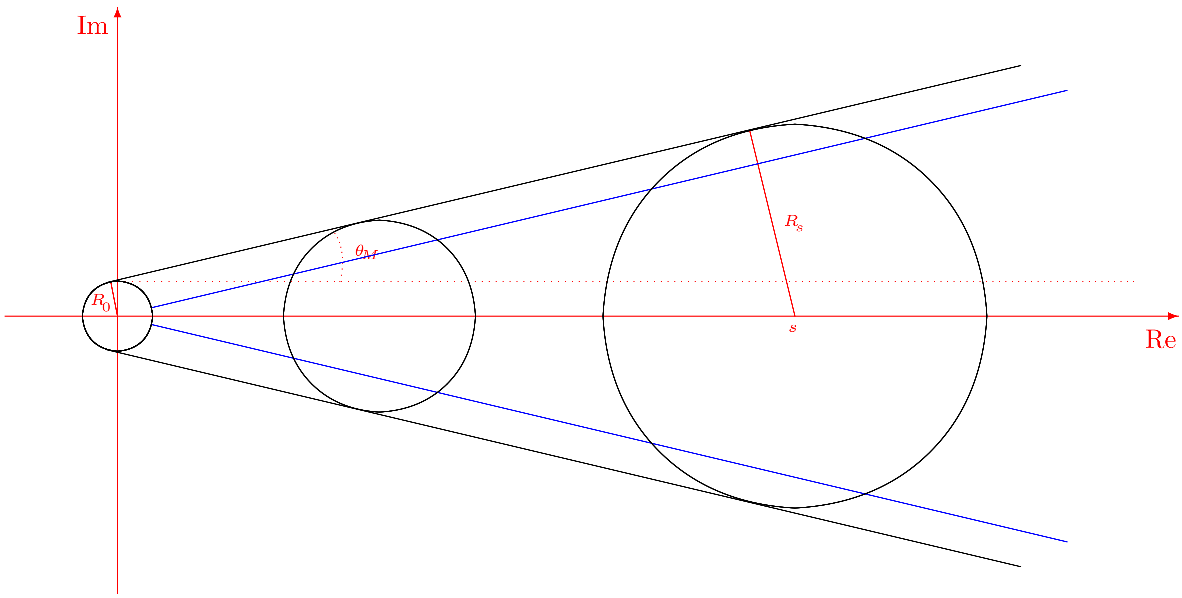


Figura 2

Teorema 4.2.1. *Seja A um operador de tipo positivo com constante M. Se $\theta_M := \operatorname{arcsen}(1/2M)$ e*

$$\Sigma_M := \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta_M\} + \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2M\},$$

então $\Sigma_M \subset \rho(-A)$ e

$$(1 + |\lambda|)\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2M + 1, \quad \lambda \in \Sigma_M. \tag{4.5}$$

Prova: Dado $s \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$|\lambda - s| \leq (1 + s)/(2M),$$

segue de $\lambda + A = (s + A)(1 + (\lambda - s)(s + A)^{-1})$ que $\lambda \in \rho(-A)$ e

$$\begin{aligned}\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|[1 + (\lambda - s)(s + A)^{-1}]^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|(s + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 2M(1 + s)^{-1} \leq \frac{2M}{1 + |\lambda|}\frac{1 + s + |\lambda - s|}{1 + s} \\ &\leq \frac{2M}{1 + |\lambda|}\left(1 + \frac{1}{2M}\right) = \frac{2M + 1}{1 + |\lambda|}.\end{aligned}$$

Disto deduzimos que $\lambda \in \rho(A)$ sempre que $|\lambda - s| < R_s$ com $R_s := \frac{1+s}{2M}$ (veja Figura 2). Segue que $\Sigma_M \subset \rho(A)$ e que (4.5) vale.$\square$

Com isto para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, Re$\alpha < 0$, definimos

$$A^\alpha := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^\alpha(\lambda + A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \qquad (4.6)$$

onde Γ é qualquer curva simples em $\Sigma_M\backslash\mathbb{R}^+$ suave por partes indo de $\infty e^{-i\theta}$ para $\infty e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \arcsin 1/(2M)]$, evitando $\mathbb{R}^+$. É claro que $-\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : -\lambda \in \Gamma\}$. Segue de (4.5) e (4.6) e do Teorema de Cauchy que A^α está bem definido em $\mathcal{L}(X)$ e independente da escolha de Γ. De fato, mais é verdade.

Lema 4.2.1. *Para todo α e β com parte real negativa $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$*

Prova: Dados α e β com Re$\alpha < 0$ e Re$\beta < 0$, escolha Γ_1 e Γ_2 como acima de forma que Γ_1 fica a esquerda de Γ_2. Então

$$\begin{aligned}
A^\alpha A^\beta &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} (-\lambda)^\alpha(-\mu)^\beta(\lambda + A)^{-1}(\mu + A)^{-1}d\mu\, d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} (-\lambda)^\alpha(-\mu)^\beta(\lambda - \mu)^{-1}[(\mu + A)^{-1} - (\lambda + A)^{-1}]d\mu\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} (-\mu)^\beta(\mu + A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{(-\lambda)^\alpha}{\lambda - \mu}d\lambda\right)d\mu \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (-\lambda)^\alpha(\lambda + A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{(-\mu)^\beta}{\mu - \lambda}d\mu\right)d\lambda.
\end{aligned}$$

Para cada $\mu \in \Gamma_2$, aplicação $\lambda \mapsto (\lambda - \mu)^{-1}(-\lambda)^\alpha$ é analítica sobre Γ_1 e a esquerda dela. Portanto, segue de (4.6) e do Teorema de Cauchy que a integral no primeiro parêntesis é zero e a no segundo é igual a $(-\lambda)^\beta$. Consequentemente,

$$A^\alpha A^\beta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (-\lambda)^{\alpha+\beta}(\lambda + A)^{-1}d\lambda = A^{\alpha+\beta},$$

o que prova a afirmativa.$\square$

É uma consequência simples do teorema da derivação sob o sinal de integração que a aplicação $z \mapsto A^z$ é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < 0\}$.

O teorema a seguir desempenha um papel fundamental na obtenção da Desigualdade do Momento (desigualdade de interpolação) que será apresentada na próxima seção.

Teorema 4.2.2. *Se $A \in \mathcal{P}(X)$ então,*

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty s^{-z}(s+A)^{-1} ds, \quad 0 < \mathrm{Re} z < 1. \tag{4.7}$$

Prova: Note que, para todo $\theta < \theta_M$, $r > 0$ e Γ como em (4.6),

$$\begin{aligned} A^{-z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (-\lambda)^{-z} (\lambda + A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_r^\infty s^{-z} e^{-i(-\pi+\theta)z} (se^{i\theta} + A)^{-1} e^{i\theta} ds \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_r^\infty s^{-z} e^{-i(\pi-\theta)z} (se^{-i\theta} + A)^{-1} e^{-i\theta} ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi-\phi}^{\phi} (re^{i(\pi-\xi)})^{-z} (re^{i\xi} + A)^{-1} ire^{i\xi}\, d\xi. \end{aligned}$$

Observando que o integrando nas duas primeiras integrais tem módulo menor ou igual a $c\, s^{-\mathrm{Re}\, z}(1+s)^{-1}$, para algum $c > 0$ independente de θ e r, e que na terceira integral (notando que $0 \in \rho(A)$) o integrando é menor o igual a $d\, r^{(1-\mathrm{Re}\, z)}$, para algum $d > 0$ independente de r, e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$A^{-z} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i} \int_0^\infty s^{-z}(s+A)^{-1} ds - \frac{e^{-i\pi z}}{2\pi i} \int_0^\infty s^{-z}(s+A)^{-1} ds$$

isto é (4.7) vale.$\square$

Fim da Vigésima Terceira Aula $\uparrow$

Início da Vigésima Quarta Aula ↓

Agora vamos considerar o caso A^z com Re$z > 0$. Note que, se Re$z > 0$ e $A^{-z}x = 0$, escolhendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq \operatorname{Re} z < n+1$ obtemos $A^{-z-(n+1-z)}x = A^{-n-1}x = 0$ e, do fato que $0 \in \rho(A)$, $x = 0$. Segue que A^{-z} é injetor e podemos definir $A^z : D(A^z) \subset X \to X$ por $D(A^z) := R(A^{-z})$ e $A^z x = (A^{-z})^{-1}x$; isto é,

$$A^z := (A^{-z})^{-1}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{4.8}$$

É claro que o operador A^z é fechado e seu domínio $D(A^z)$ dotado da norma $D(A^z) \ni x \mapsto \|A^z x\|_X + \|x\|_X \in \mathbb{R}^+$ é um espaço de Banach. Graças a limitação de A^{-z}, é fácil ver que $D(A^z) \ni x \mapsto \|A^z x\|_X \in \mathbb{R}^+$ é uma norma equivalente a $D(A^z) \ni x \mapsto \|A^z x\|_X + \|x\|_X \in \mathbb{R}^+$.

Definição 4.2.1. *Se $A \in \mathcal{P}$, os espaços de Banach $X^z := (D(A^z), \|A^z \cdot\|_X)$,* $\operatorname{Re} z \geq 0$*, são chamados espaços de potências fracionárias associados ao operador A.*

Lema 4.2.2. *Se $A \in \mathcal{P}$ e $z, w \in \mathbb{C}$ com $0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$, então $D(A^w) \subset D(A^z)$ e a inclusão $i : X^w \to X^z$ é contínua; isto é,*

$$X^w \hookrightarrow X^z \hookrightarrow X, \qquad \textit{sempre que} \;\; 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w. \tag{4.9}$$

Prova: Se $x \in D(A^w)$, então

$$x = A^{-w}A^w x = A^{-z-(w-z)}A^w x = A^{-z}A^{-(w-z)}A^w x$$

e $x \in D(A^z)$, isto é,

$$D(A^w) \subset D(A^z), \tag{4.10}$$

Além disso,

$$\|A^z x\|_X = \|A^{z-w}A^w x\|_X \leq \|A^{z-w}\|_{\mathcal{L}(X)} \|A^w x\|_X, \quad x \in D(A^w).$$

Segue que a inclusão de X^w em X^z é contínua.□

Lema 4.2.3. *Se* $A \in \mathcal{P}$ *e* $z, w \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w, \operatorname{Re}(z+w) \neq 0$, *então*

$$A^z A^w x = A^{z+w} x, \quad x \in D(A^u), \tag{4.11}$$

onde $u \in \{z, w, z+w\}$ *com* $\operatorname{Re} u = \max\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w, \operatorname{Re}(z+w)\}$.

Prova: Se $z, w \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Re} w > 0$, dado

$$x \in D(A^{z+w}) \subset D(A^w) \cap D(A^z),$$

faça $f := A^{z+w}x$. Então $x = A^{-(z+w)}f = A^{-w}A^{-z}f$ implica $A^w x = A^{-z}f$. Isto mostra que $A^w x \in D(A^z)$ e que $f = A^z A^w x$. Semelhantemente $f = A^w A^z x$; ou seja,

$$A^{z+w}x = A^z A^w x = A^w A^z x, \quad x \in D(A^{z+w}). \tag{4.12}$$

Disto segue facilmente que, se $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Re} w > 0$, então

$$A^{z+w} = A^z A^w,$$

onde $D(A^z A^w) = \{x \in D(A^w) : A^w x \in D(A^z)\}$.

Se $\operatorname{Re} w > \operatorname{Re} z > 0$ e $x \in D(A^z)$ então

$$A^{-w}A^z x = A^{-(w-z)}A^{-z}A^z x = A^{-(w-z)}x = A^{z-w}x$$

e, para todo $x \in X$

$$A^z A^{-w} x = A^z A^{-z} A^{-(w-z)} x = A^{-(w-z)} x = A^{z-w} x.$$

Além disso, se $x \in D(A^w)$, de (4.12),

$$A^{-z}A^w x = A^{-z}A^z A^{w-z} x = A^{w-z} x.$$

e, se $x \in D(A^{w-z})$, temos que $A^{-z}x \in D(A^w)$ e

$$A^w A^{-z} x = A^{w-z} A^z A^{-z} x = A^{w-z} x. \square$$

Lema 4.2.4. *Se $A \in \mathcal{P}$ e $z, w \in \mathbb{C}$ com $0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$, então X^w é denso em X^z; isto é,*

$$X^w \overset{d}{\hookrightarrow} X^z \overset{d}{\hookrightarrow} X, \quad \textit{sempre que} \;\; 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w.$$

Prova: Dado $x \in D(A)$ e $\epsilon > 0$, faça $f := Ax$. Como $D(A)$ é denso em X, podemos encontrar um elemento $u \in D(A)$ tal que $\|u - f\|_X \leq \epsilon / \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$. Portanto, fazendo $v := Au$,

$$\|A^{-2}v - x\|_X = \|A^{-1}u - A^{-1}f\|_X \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|u - f\|_X \leq \epsilon.$$

Isto mostra que $\overline{D(A^2)} \supset D(A)$. Portanto $\overline{D(A^2)} \supset \overline{D(A)} = X$ o que garante que $D(A^2)$ é denso em X. Por indução obtemos que $D(A^k)$ é denso em X para $k = 1, 2, 3, \cdots$. Segue de (4.10) que

$$\overline{D(A^z)} = X, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{4.13}$$

Dados $x \in D(A^z)$ e $\epsilon > 0$ faça $f := A^z x \in X$. Como $D(A^{w-z})$ é denso em X, existe $u \in D(A^{w-z})$ tal que $\|u - f\|_X < \epsilon$. Portanto

$$v := A^{-z}u \in D(A^w) \quad \text{e} \quad \|A^z(v - x)\|_X = \|u - f\|_X < \epsilon. \square$$

Exercício 4.2.1. *Mostre que, se $A \in \mathcal{P}(X)$ tem resolvente compacto, então as inclusões*

$$X^w \overset{d}{\hookrightarrow} X^z \overset{d}{\hookrightarrow} X, \quad 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w,$$

são compactas.

Exercício 4.2.2. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto que satisfaz $\langle Au, u\rangle \geq \delta \langle u, u\rangle$ para todo $u \in D(A)$ e para algum $\delta > 0$. Mostre que A^θ é auto-adjunto para todo $\theta \in \mathbb{R}$.*

4.3 Interpolação e potências fracionárias

Nesta seção mostraremos a *Desigualdade do Momento*; isto é, que $\|A^\alpha x\| \leq K\|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$, $x \in D(A)$. Em seguida utilizaremos a *Desigualdade do Momento* para obter resultados que mostram a estabilidade dos espaços de potências fracionárias e suas normas relativamente a perturbações por operadores subordinados as potências fracionárias.

Teorema 4.3.1 (Desigualdade do Momento)**.** *Se $A \in \mathcal{P}$ e $\alpha \in [0,1]$, existe uma constante K dependendo somente de A, tal que*

$$\|A^\alpha x\|_X \leq K\left[(1-\alpha)\mu^\alpha \|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X\right], \qquad \textit{para todo } \mu \in (0,\infty)$$

ou, equivalentemente,

$$\|A^\alpha x\|_X \leq K\|Ax\|_X^\alpha \|x\|_X^{1-\alpha}, \quad \textit{para} \;\; 0 \leq \alpha \leq 1, \; x \in D(A).$$

Prova: O reultado é trivial para $\alpha = 0$ e para $\alpha = 1$. Para $0 < \alpha < 1$, seque de (4.7) que, se $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} A^\alpha x = A^{-(1-\alpha)}Ax &= \frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{-(1-\alpha)}(s+A)^{-1}Axds \\ &= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}A(s+A)^{-1}xds \end{aligned}$$

logo, para todo $\mu \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned} \|A^\alpha x\|_X &\leq \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\int_0^\mu s^{\alpha-1}(M+1)\|x\|ds + \int_\mu^\infty s^{\alpha-2}M\|Ax\|ds\right] \\ &\leq \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}(M+1)\left[\frac{\mu^\alpha}{\alpha}\|x\|_X + \frac{\mu^{\alpha-1}}{1-\alpha}\|Ax\|_X\right] \\ &= \frac{\sin\pi\alpha}{\alpha(1-\alpha)\pi}(M+1)\left[(1-\alpha)\mu^\alpha\|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X\right] \\ &\leq 2(M+1)\left[(1-\alpha)\mu^\alpha\|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X\right]. \end{aligned}$$

É fácil ver que, o mínimo da função

$$(0,\infty) \ni \mu \stackrel{\psi}{\longmapsto} 2(M+1)\left[(1-\alpha)\mu^{\alpha}\|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X\right]$$

é alcançado em $\mu = \|Ax\|_X/\|x\|_X$ e, consequentemente,

$$\|A^{\alpha}x\|_X \leq \psi(\|Ax\|_X/\|x\|_X) = 2(M+1)\|Ax\|_X^{\alpha}\|x\|_X^{1-\alpha}.$$

Isto completa a prova.$\square$

Corolário 4.3.1. *Seja $A \in \mathcal{P}(X)$ e $B : D(B) \subset X \to X$ um operador fechado tal que $D(B) \supset D(A^{\alpha})$, para algum $\alpha > 0$. Então existem constantes $C, C_1 > 0$ tais que*

$$\|Bx\|_X \leq C\|A^{\alpha}x\|_X, \quad x \in D(A^{\alpha})$$

e, para todo $\mu > 0$ e $x \in D(A)$,

$$\|Bx\|_X \leq C_1[(1-\alpha)\,\mu^{\alpha}\,\|x\|_X\, +\, \alpha\,\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X].$$

Prova: Considere o operador fechado $BA^{-\alpha}$. Como $D(B) \supset D(A^{\alpha})$, $BA^{-\alpha}$ está definido em todo X e pelo teorema do gráfico fechado segue que $BA^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. Isto e o Teorema 4.3.1 implicam o resultado desejado.$\square$

Teorema 4.3.2. *Suponha que $A, B \in \mathcal{P}$ com $D(A) = D(B)$ e para algum $\alpha \in [0,1)$, $(A-B)A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. Então, para todo $\beta \in [0,1]$, $A^{\beta}B^{-\beta}$ e $B^{\beta}A^{-\beta}$ estão em $\mathcal{L}(X)$.*

Prova: Pelo Teorema 4.3.1, $\|A^{\beta}(s+A)^{-1}\| \leq Cs^{\beta-1}$ para $0 \leq \beta \leq 1$ e $s > 0$ e para alguma constante positiva C. Ainda, se $0 < \beta < 1$,

$$B^{-\beta} - A^{-\beta} = \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\beta}(s+B)^{-1}(A-B)(s+A)^{-1}ds.$$

Disto, segue facilmente que $B^\beta A^{-\beta}$ é limitado. Como

$$[I + A^\alpha (s + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha}]A^\alpha (s + B)^{-1} = A^\alpha (s + A)^{-1}$$

segue que $\|A^\alpha (s + B)^{-1}\| = O(s^{\alpha-1})$ quando $s \to \infty$. Trocando A por B na identidade integral acima obtemos que $A^\beta B^{-\beta}$ é também limitado. Os casos $\beta = 0$ e $\beta = 1$ seguem imediatamente.$\square$

Corolário 4.3.2. *Se A e B são como no Teorema 4.3.2, então $D(A^\beta) = D(B^\beta)$, com normas equivalentes $0 \leq \beta \leq 1$.*

Fim da Vigésima Quarta Aula $\uparrow$

Início da Vigésima Quinta Aula ↓

Exemplo 4.3.1. *Seja X um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador auto-adjunto e positivo ($\langle Au, u\rangle_X \geq \delta\langle u, u\rangle_X$ para todo $u \in D(A)$ e para algum $\delta > 0$). Segue que $A \in \mathcal{P}$ e, se $X^\alpha = (D(A^\alpha), \|A^\alpha \cdot \|_X)$, então X^α é um espaço de Hilbert. Para $\theta \in [0, 1]$ and $\eta \in \mathbb{R}$, considere o operador*

$$\mathcal{A}_{(\theta,\eta)} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & 2\eta A^\theta \end{bmatrix} : D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) \subset X^{\frac{1}{2}} \times X \to X^{\frac{1}{2}} \times X \tag{4.14}$$

definido por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) &= \left\{ \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in (X^{\frac{1}{2}} \cap X^{1-\theta}) \times X^{\frac{1}{2}};\ A^{1-\theta}\varphi + 2\eta\psi \in X^\theta \right\}, \\ \mathcal{A}_{(\theta,\eta)} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\psi \\ A^\theta(A^{1-\theta}\varphi + 2\eta\psi) \end{bmatrix}, \quad \text{para } \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Escreveremos Y^0 para denotar $X^{\frac{1}{2}} \times X$.

Observação 4.3.1. *É fácil ver que, se $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\eta \geq 0$, então $D(\mathcal{A}_{\theta,\eta}) = X^1 \times X^{\frac{1}{2}}$. Se $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\eta > 0$, não podemos escrever $D(\mathcal{A}_{\theta,\eta})$ como um produto carteziano e apenas podemos concluir que $D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) \subset X^{\frac{3}{2}-\theta} \times X^{\frac{1}{2}}$.*

Agora estabelecemos algumas propriedades básicas do operador $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ que são indispensáveis nas aplicações.

Proposição 4.3.1. *Para cada $\theta \in [0, 1]$ temos que:*

(i) $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ *é fechado,*

(ii) Se $\eta \geq 0$, $-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ *é dissipativo,*

(iii) $0 \in \rho(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$,

(iv) Se A tem resolvente compacto e $\theta \in [0,1)$, então $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ tem resolvente compacto.

(v) Se $\eta \geq 0$, $-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}t} : Y^0 \to Y^0 : t \geq 0\}$ que satisfaz $\|e^{-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}t}\|_{\mathcal{L}(Y^0)} \leq 1$, $t \geq 0$.

Prova: *Para provar (i) tomamos uma seqüência* $\left(\begin{bmatrix}\phi_n\\ \psi_n\end{bmatrix}, \mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\begin{bmatrix}\phi_n\\ \psi_n\end{bmatrix}\right)$ *no gráfico de* $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$, *que converge em* $Y^0 \times Y^0$ *para* $\left(\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\xi\\ \nu\end{bmatrix}\right)$. *Disto concluímos facilmente que* $\xi = -\psi$. *Agora, se* $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$\phi_n \xrightarrow{X^{\frac{1}{2}}} \phi \Rightarrow A^{1-\theta}\phi_n \xrightarrow{X} A^{1-\theta}\phi,$$
$$\psi_n \xrightarrow{X^{\frac{1}{2}}} \psi = -\xi,$$

e portanto $A^{1-\theta}\phi_n + 2\eta\psi_n \overset{X}{\to} A^{1-\theta}\phi + 2\eta\psi$. *Como*

$$A^\theta(A^{1-\theta}\phi_n + 2\eta\psi_n) \overset{X}{\to} \nu,$$

do fato que A^θ *é fechado, segue que* $A^{1-\theta}\phi + 2\eta\psi \in D(A^\theta)$ *e*

$$A^\theta(A^{1-\theta}\phi + 2\eta\psi) = \nu.$$

Logo $\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ *e* $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi\\ \nu\end{bmatrix}$.

Se, por outro lado, $\theta \in [0, \frac{1}{2})$,

$$\psi_n \xrightarrow{X^{\frac{1}{2}}} \psi = -\xi \Rightarrow A^\theta\psi_n \xrightarrow{X} A^\theta\psi,$$
$$A\phi_n = A^\theta(A^{1-\theta}\phi_n + 2\eta\psi_n) - 2\eta A^\theta\psi_n \xrightarrow{X} \nu - 2\eta A^\theta\psi.$$

Assim, do fato que A *é fechado,* $\phi \in D(A)$ *e* $A\phi = \nu - 2\eta A^\theta\psi$; *ou seja,* $A^\theta(A^{1-\theta}\phi + 2\eta\psi) = \nu$ *e* $\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ *e* $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi\\ \nu\end{bmatrix}$.

Para provar (ii) primeiramente note que

$$\begin{aligned}\left\langle -\mathcal{A}_{(\theta,\eta)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{Y^0} &= \left\langle - \begin{bmatrix} -v \\ A^{\theta}(A^{1-\theta}u + 2\eta v) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{Y^0} \\ &= \left\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u \right\rangle_X - \left\langle A^{\theta}(A^{1-\theta}u + 2\eta v), v \right\rangle_X \\ &= \left\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u \right\rangle_X - \overline{\left\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u \right\rangle_X} - 2\eta \left\langle A^{\frac{\theta}{2}}v, A^{\frac{\theta}{2}}v \right\rangle_X .\end{aligned}$$

Portanto,

$$Re \left\langle -\mathcal{A}_{(\theta,\eta)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{Y^0} = -2\eta \left\langle A^{\frac{\theta}{2}}v, A^{\frac{\theta}{2}}v \right\rangle_X \leq 0, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}).$$

Isto prova que $-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ é dissipativo.

A prova de (iii) é uma consequência imediata do fato que

$$\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\eta A^{-(1-\theta)} & A^{-1} \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

A prova de (iv) segue de (iii) e da compacidade das inclusões entre os espaços X^{α} que por sua vez é uma consequência da compacidade do resolvente de A. A prova de (v) segue de (i), (ii), (iii) e do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 3.4.1). $\square$

Exemplo 4.3.2 (Cálculo de potências fracionárias)**.** *Considere o operador (da onda amortecida abstrato) $\mathcal{A}_{(0,a)} : D(\mathcal{A}_{(0,a)}) \subset Y^0 \to Y^0$ definido por*

$$\mathcal{A}_{(0,a)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & aI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -v \\ Au + av \end{bmatrix}, \quad para \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(0,a)}) := X^1 \times X^{\frac{1}{2}}.$$

É fácil ver que $0 \in \rho(\mathcal{A}_{(0,a)})$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{A}_{(0,0)}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 4.3.2. *Observe que, o adjunto de $\mathcal{A}_{(0,0)}$, é dado por*

$$\mathcal{A}^*_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} = -\mathcal{A}_{(0,0)}.$$

Segue que $i\mathcal{A}_{(0,0)}$ é auto-adjunto e, do Teorema 3.7.2, $\mathcal{A}_{(0,0)}$ é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo de operadores unitários em Y^0.

Vamos calcular as potências fracionárias do operador $\mathcal{A}_{(0,0)}$. Para este fim, calculamos o operador resolvente associado a $\mathcal{A}_{(0,0)}$. Note que, para todo $s \in \rho(-\mathcal{A}_{(0,0)})$, temos

$$(sI + \mathcal{A}_{(0,0)})^{-1} = \begin{bmatrix} s(s^2I + A)^{-1} & (s^2I + A)^{-1} \\ -A(s^2I + A)^{-1} & s(s^2I + A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Como, para $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{A}^{-\alpha}_{(0,0)}$ é dado por (4.7); isto é,

$$\mathcal{A}^{-\alpha}_{(0,0)} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha}(sI + \mathcal{A}_{(0,0)})^{-1} ds,$$

segue que

$$\mathcal{A}^{-\alpha}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi\alpha}{2} A^{-\frac{\alpha}{2}} & \sin \frac{\pi\alpha}{2} A^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ -\sin \frac{\pi\alpha}{2} A^{\frac{1-\alpha}{2}} & \cos \frac{\pi\alpha}{2} A^{-\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

e com esta expressão, não é difícil provar que,

Proposição 4.3.2. *A família de operadores $\{\mathcal{A}^{-\alpha}_{(0,0)}; \alpha \in [0, 1)\}$ converge na topologia uniforme de operadores para $\mathcal{A}^{-1}_{(0,0)}$, quando $\alpha \to 1$.*

Também não é difícil ver que $\mathcal{A}^{-\alpha}_{(0,0)}$ é injetora e, para $0 < \alpha < 1$,

$$\mathcal{A}^{\alpha}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi\alpha}{2} A^{\frac{\alpha}{2}} & -\sin \frac{\pi\alpha}{2} A^{\frac{-1+\alpha}{2}} \\ \sin \frac{\pi\alpha}{2} A^{\frac{1+\alpha}{2}} & \cos \frac{\pi\alpha}{2} A^{\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Lema 4.3.1. *Se $X^{-\alpha}$ denota o completamento de X com a norma $\|A^{-\alpha}\cdot\|_X$, $\alpha\in(0,1)$, o operator $\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}: X^{\frac{1}{2}}\times X\to X^{\frac{1-\alpha}{2}}\times X^{-\frac{\alpha}{2}}$ é uma isometria e, se $Y^{-\alpha}$ denota o completamento de Y^0 com a norma $\|\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}\cdot\|_{Y^0}$, então*

$$Y^{-\alpha}=X^{\frac{1-\alpha}{2}}\times X^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Prova: *Se* $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\in Y^0$, *temos*

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\|_{Y^0}^2&=\left\langle\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix},\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right\rangle_{Y^0}\\
&=\left\langle\cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}u+\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{-1-\alpha}{2}}v,\cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}u+\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{-1-\alpha}{2}}v\right\rangle_{X^{\frac{1}{2}}}\\
&+\left\langle-\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u+\cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v,-\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u+\cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v\right\rangle_X\\
&=\left\langle\cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u+\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v,\cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u+\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v\right\rangle_X\\
&+\left\langle-\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u+\cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v,-\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u+\cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v\right\rangle_X\\
&=\left\langle A^{\frac{1-\alpha}{2}}u,A^{\frac{1-\alpha}{2}}u\right\rangle_X+\left\langle A^{-\frac{\alpha}{2}}v,A^{-\frac{\alpha}{2}}v\right\rangle_X=\|\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\|^2_{X^{\frac{1-\alpha}{2}}\times X^{-\frac{\alpha}{2}}}.\square\end{aligned}$$

Exercício 4.3.1. *Se A tem resolvente compacto, mostre que os auto-valores $\{\lambda_n^\pm\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}_{(0,0)}$ são dados por*

$$\lambda_n^\pm=\pm i\sqrt{\mu_n},\ n\in\mathbb{N},$$

onde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são os auto-valores de A.

4.4 Potências fracionárias e semigrupos

Agora consideramos o caso em que A é setorial; isto é, $\{e^{-At},t\geq 0\}$ é semigrupo analítico.

Teorema 4.4.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial e $\{e^{-At}; t \geq 0\}$ o semigrupo analítico gerado por $-A$, suponha que $\rho(A) \supset (-\infty, 0]$. Então*

1. *Se $\alpha \geq 0$, então $R(e^{-At}) \subset D(A^\alpha)$ e*

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\alpha t^{-\alpha}, \quad t > 0,$$

   $\alpha \mapsto M_\alpha$ é contínua em $[0, \infty)$.

2. *Se $\alpha > 0$, então $t^\alpha A^\alpha e^{-At} x \xrightarrow{t \to 0^+} 0$, para cada $x \in X$.*

3. *Se $0 < \alpha \leq 1$ e $t \geq 0$, então $\|(e^{-At} - I)A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_{1-\alpha}\alpha^{-1} t^\alpha$.*

Prova: 1) Do Teorema 3.9.1 segue que $R(e^{-At}) \subset D(A)$, $\|Ae^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Mt^{-1}$ e $\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ para todo $t > 0$. Logo $e^{-At} = (e^{-At/m})^m$ leva X em $D(A^m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Agora, se $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K\|Ae^{-At}\|^\alpha_{\mathcal{L}(X)}\|e^{-At}\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(X)} \leq KMt^{-\alpha}.$$

Assim, para $m = 0, 1, 2, \cdots$, $0 \leq \alpha \leq 1$ e $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}\|A^{m+\alpha}e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|A^\alpha e^{-At/(m+1)}\|_{\mathcal{L}(X)}\|Ae^{-At/(m+1)}\|^m_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq KM^{m+1}(m+1)^{m+\alpha}t^{-m-\alpha}\end{aligned}$$

2) Se $x \in D(A^m)$ para algum $m \geq \alpha > 0$, $t^\alpha A^\alpha e^{-At}x \xrightarrow{t \to 0^+} 0$ e $\|t^\alpha A^\alpha e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\alpha$ para $t > 0$, logo o resultado vale para todo $x \in X$.

3) Para todo $x \in X$ temos que

$$\|(e^{-At} - I)A^{-\alpha}x\|_X = \left\|- \int_0^t A^{1-\alpha}e^{-As}x ds\right\|_X \leq \int_0^t M_{1-\alpha}s^{\alpha-1}\|x\|_X ds. \square$$

Fim da Vigésima Quinta Aula ↑

Estudar ↓

Exemplo 4.4.1. *No que se segue provaremos que, para $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\eta > 0$, o operador $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ do Exemplo 4.3.1 é um operador setorial com $Re\sigma(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) > 0$. O semigrupo $\{e^{-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}t},\ t \geq 0\}$ é analítico. Além disso, $e^{-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}t}$ é compacto para $t > 0$ e $\theta \in [\frac{1}{2}, 1)$.*

Observação 4.4.1. *Chamamos a atenção para o fato que $\mathcal{A}_{(1)}$ não tem resolvente compacto (exceto quando X tem dimensão finita). Este fato assegura que o semigrupo $\{e^{\mathcal{A}_{(1)}t}, t \geq 0\}$ não é compacto e torna este caso especialmente interessante na discussão do comportamento assintótico dos problemas de evolução não lineares associados a ele.*

Exercício 4.4.1. *Mostre que o operador $\mathfrak{C} : D(\mathfrak{C}) \subset Y^0 \to Y^0$ $(Y^0 = X^{\frac{1}{2}} \times X)$ definido em $D(\mathfrak{C}) = X^1 \times X^\theta$ por*

$$\mathfrak{C}\begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -I\\ A & 2\eta A^\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\psi\\ A\varphi + 2\eta A^\theta \psi\end{bmatrix}$$

não é um operador fechado a menos que $\theta = \frac{1}{2}$. Recorde que $D(\mathcal{A}_{(\frac{1}{2},\eta)}) = X^1 \times X^{\frac{1}{2}}$ mas $D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ não é um produto cartesiano de espaços para qualquer $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Para $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$, defina o operador auxiliar $\mathcal{B}_{(\theta,\eta)} : D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) \subset Y^0 \to Y^0$ por

$$D(\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}) := D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) \text{ e } \mathcal{B}_{(\theta,\eta)} := \mathcal{A}_{(\theta,\eta)} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -I\\ A & 2\eta A^\theta + \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta}\end{bmatrix}.$$

Observação 4.4.2. *A idéia aqui é considerar a perturbação $\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}$ de $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$, correspondendo a modificação da equação original para*

$$u_{tt} + 2\eta A^\theta u_t + \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta}u_t + Au = 0, \tag{4.17}$$

e estabelecer uma transformação $\mathcal{D}_{(\theta,\eta)} := P_{(\theta,\eta)}\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}P_{(\theta,\eta)}^{-1}$ *com um isomorfismo apropriado* $P_{(\theta,\eta)} : Y^0 \to Y^0$. *Desta maneira o sistema linear que corresponde a* (4.17) *será transformado no sistema linear fracamente acoplado*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \mathcal{D}_{(\theta,\eta)}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Os domínios das potências fracionárias associadas ao operador $\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}$, *coincidirão com aqueles associados a um operador diagonal* $\tilde{\mathcal{D}}_{(\theta,\eta)}$.

Se

$$P_{(\theta,\eta)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta} & I \end{bmatrix}, \quad P_{(\theta,\eta)}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{2\eta}A^{1-\theta} & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{(\theta,\eta)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta} & -I \\ 0 & 2\eta A^{\theta} \end{bmatrix},$$

então $P_{(\theta,\eta)} : D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) \to X^{\frac{3}{2}-\theta} \times X^{\theta} = D(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)})$, $P_{(\theta,\eta)}\mathcal{B}_{(\theta,\eta)} = \mathcal{D}_{(\theta,\eta)}P_{(\theta,\eta)}$ *e*

$$P_{(\theta,\eta)} : Y^0 \to Y^0$$

são isomorfismos. O operador

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{(\theta,\eta)} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta} & 0 \\ 0 & 2\eta A^{\theta} \end{bmatrix} : X^{\frac{3}{2}-\theta} \times X^{\theta} \subset Y^0 \to Y^0$$

é setorial. Pois

$$(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)} - \widetilde{\mathcal{D}}_{(\theta,\eta)})\widetilde{\mathcal{D}}_{(\theta,\eta)}^{-\gamma} \in \mathcal{L}(Y^0) \quad \textit{for } 1 > \gamma > \frac{1}{2\theta},$$

segue do Corolário 7.2.1 que

$$\mathcal{D}_{(\theta,\eta)} : X^{\frac{3}{2}-\theta} \times X^{\theta} \subset Y^0 \to Y^0$$

é setorial e seus domínios de potências fracionárias coincidem (com normas equivalentes) com os domínios de potências fracionárias do operador $\widetilde{\mathcal{D}}_{(\theta,\eta)}$ *e portanto são dados por*

$$D(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}^{\alpha}) = X^{\frac{1}{2}+(1-\theta)\alpha} \times X^{\theta\alpha}.$$

Para $\theta = \frac{1}{2}$, $\eta > 0$, *definimos* $a_\eta = \eta + \sqrt{\eta^2 - 1}$, $\bar{a}_\eta = \eta - \sqrt{\eta^2 - 1}$ *e consideramos o operador*

$$\mathcal{D}_{(\frac{1}{2},\eta)} : D(\mathcal{D}_{(\frac{1}{2},\eta)}) := X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}} \subset X \times X \to X \times X,$$

$$\mathcal{D}_{(\frac{1}{2},\eta)} = \begin{bmatrix} a_\eta A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \bar{a}_\eta A^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Se

$$P_{(\frac{1}{2},\eta)} = \begin{bmatrix} \bar{a}_\eta A^{\frac{1}{2}} & I \\ a_\eta A^{\frac{1}{2}} & I \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}_{(\frac{1}{2},\eta)} = \frac{1}{\bar{a}_\eta - a_\eta} \begin{bmatrix} A^{-\frac{1}{2}} & -A^{-\frac{1}{2}} \\ -a_\eta & \bar{a}_\eta \end{bmatrix},$$

então $P_{(\frac{1}{2},\eta)} \mathcal{A}_{(\frac{1}{2},\eta)} = \mathcal{D}_{(\frac{1}{2},\eta)} P_{(\frac{1}{2},\eta)}$ *e* $P_{(\frac{1}{2},\eta)} : Y^0 \to X \times X$ *é um isomorfismo.*

Note que $A^{\frac{1}{2}}$ *é auto-adjunto, setorial e satisfaz*

$$\|(\lambda I - A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \tag{4.18}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{\frac{\psi}{2}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\psi}{2} \leq |\arg \lambda| \leq \pi$ *com* $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})\}$. *Se* $\frac{\pi}{2} > \frac{\psi}{2} + \arg a_\eta$, *então* $a_\eta A^{\frac{1}{2}}$ *é setorial e os domínios de potências fracionárias associados a ele coincidem (com normas equivalentes) com aquelas do operador* $A^{\frac{1}{2}}$. *Em particular* $D(\mathcal{D}^\alpha_{(\frac{1}{2},\eta)}) = X^{\frac{\alpha}{2}} \times X^{\frac{\alpha}{2}}$.

Observação 4.4.3. *Quando* $\eta \geq 1$ *ambos* a_η *e* $\bar{a}_\eta$ *são números positivos. Neste caso* $\arg a_\eta = 0$ *e a condição* $\frac{\pi}{2} > \frac{\psi}{2} + \arg a_\eta$ *está automaticamente satisfeita.*

Estendemos a definição de $\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}$ *ao caso* $\theta = \frac{1}{2}$ *fazendo*

$$\mathcal{B}_{(\frac{1}{2},\eta)} := \mathcal{A}_{(\frac{1}{2},\eta)}. \tag{4.19}$$

Lema 4.4.1. *Se* $\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}$, $P_{(\theta,\eta)}$ *e* $\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}$ *são como acima:*

1) $\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}$ *e* $\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}$ *tem o mesmo espectro,*

2) $\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}$ *é setorial,*

3) $P_{(\theta,\eta)}e^{-\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}t} = e^{-\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}t}P_{(\theta,\eta)}$ *para todo* $t \geq 0$,

4) $P_{(\theta,\eta)} : D(\mathcal{B}^{\alpha}_{(\theta,\eta)}) \to D(\mathcal{D}^{\alpha}_{(\theta,\eta)})$ *é um isomorfismo,*

5) *para cada* $\alpha \in [0,1]$ *temos que*

$$D(\mathcal{B}^{\alpha}_{(\theta,\eta)}) = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \nu \end{bmatrix} : \xi \in X^{\frac{1}{2}+(1-\theta)\alpha} \text{ e } A^{1-\theta}\xi + 2\eta\nu \in X^{\theta\alpha} \right\}; \tag{4.20}$$

em particular

$$D(\mathcal{B}^{\alpha}_{(\theta,\eta)}) = X^{\frac{1}{2}+(1-\theta)\alpha} \times X^{\theta\alpha}, \alpha \in [0, \frac{1}{2}]. \tag{4.21}$$

Prova: *A parte* 1) *segue da igualdade* $(\lambda I - \mathcal{B}_{(\theta,\eta)})^{-1} = P^{-1}_{(\theta,\eta)}(\lambda I - \mathcal{D}_{(\theta,\eta)})^{-1}P_{(\theta,\eta)}$.

Se $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ *e* $\Sigma_\psi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \psi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi\}$ *são tais que*

$$\|(\lambda I - \mathcal{D}_{(\theta,\eta)})^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^0)} \leq \frac{K}{|\lambda - a|} \text{ for } \lambda \in \Sigma_\psi,$$

temos que

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - \mathcal{B}_{(\theta,\eta)})^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^0)} &= \|P^{-1}_{(\theta,\eta)}\|_{\mathcal{L}(Y^0)}\|(\lambda I - \mathcal{D}_{(\theta,\eta)})^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^0)}\|P_{(\theta,\eta)}\|_{\mathcal{L}(Y^0)} \\ &\leq \frac{M}{|\lambda - a|},\end{aligned}$$

o que prova 2).

A igualdade em 3) *segue das fórmulas integrais*

$$e^{-\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}t} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zt}(zI + \mathcal{B}_{(\theta,\eta)})^{-1}dz, \quad e^{-\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}t} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zt}(zI + \mathcal{D}_{(\theta,\eta)})^{-1}dz$$

já que $P_{(\theta,\eta)}(\lambda I - \mathcal{B}_{(\theta,\eta)})^{-1} = (\lambda I - \mathcal{D}_{(\theta,\eta)})^{-1}P_{(\theta,\eta)}$ *para todos os* λ*'s adimissíveis.*

Das expressões

$$\mathcal{B}^{-\alpha}_{(\theta,\eta)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}t}dt, \qquad \mathcal{D}^{-\alpha}_{(\theta,\eta)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}t}dt$$

e de 3) *obtemos que* $P_{(\theta,\eta)}\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}^{-\alpha} = \mathcal{D}_{(\theta,\eta)}^{-\alpha}P_{(\theta,\eta)}$. *Como* $D(\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}^{\alpha}) = R(\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}^{-\alpha})$, $D(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}^{\alpha}) = R(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}^{-\alpha})$ *e* $P_{(\theta,\eta)}(Y^0) = Y^0$, *concluímos que* $P_{(\theta,\eta)}(D(\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}^{\alpha})) = D(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}^{\alpha})$. *Finalmente, para provar que* $P_{(\theta,\eta)} : D(\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}^{\alpha}) \to D(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}^{\alpha})$ *é limitado com inversa limitada observamos que*

$$\left\| P_{(\theta,\eta)}\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}^{\alpha} \begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} \right\|_{Y^0} = \left\| D_{(\theta,\eta)}^{\alpha}P_{(\theta,\eta)} \begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} \right\|_{Y^0} = \left\| P_{(\theta,\eta)} \begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} \right\|_{D(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}^{\alpha})}.$$

Usando o fato que $P_{(\theta,\eta)} : Y^0 \to Y^0$ *é um isomorfismo concluímos* 4).

Para 5) *note que*

$$P_{(\theta,\eta)}(D(\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}^{\alpha})) = D(\mathcal{D}_{(\theta,\eta)}^{\alpha}) = D(\tilde{\mathcal{D}}_{(\theta,\eta)}^{\alpha}) = X^{\frac{1}{2}+(1-\theta)\alpha} \times X^{\theta\alpha}.$$

Logo, para $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$, *temos que* $\begin{bmatrix}\xi\\ \nu\end{bmatrix} \in D(\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}^{\alpha})$ *if and only if*

$$P_{(\theta,\eta)}^{-1} \begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi\\ -\frac{1}{2\eta}A^{1-\theta}\varphi + \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi\\ \nu\end{bmatrix}$$

para um certo $\begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}+(1-\theta)\alpha} \times X^{\theta\alpha}$, *o que equivale a dizer que*

$$\xi \in X^{\frac{1}{2}+(1-\theta)\alpha} \ \text{e} \ \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta}\xi + \nu \in X^{\theta\alpha}.$$

Desta forma obtemos que (4.20) *e os espaços dados por* (4.20) *coincidem, para* $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, *com aqueles em* (4.21).

Finalmente, para $\theta = \frac{1}{2}$ *e* $\frac{\pi}{2} > \frac{\psi}{2} + \arg a_\eta$, *segue que*

$$D(\mathcal{B}_{(\frac{1}{2},\eta)}^{\alpha}) = X^{\frac{1+\alpha}{2}} \times X^{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{para todo} \ \ \alpha \in [0,1]; \tag{4.22}$$

$\mathcal{B}_{(\frac{1}{2},\eta)}$ *sendo um operador setorial.*$\square$

Agora estamos prontos para provar o seguinte resultado

Teorema 4.4.2. *Para cada $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ o operador $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ é setorial em Y^0. Além disso, para cada $\alpha \in [0,1]$, os domínios de potências fracionárias $Y^{\alpha}_{(\theta,\eta)}$ associados a $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ coincidem com os domínios de potências fracionárias $D(\mathcal{B}^{\alpha}_{(\theta,\eta)})$ de $\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}$ com normas equivalentes.*

Prova: *Para $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$ temos que*

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} = \frac{1}{2\eta}\|A^{1-\theta}\psi\|_X \leq C\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|_X^{2(1-\theta)}\|\psi\|_X^{2\theta-1}$$
$$\leq \tilde{C}\left\|\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right\|_{Y^0}^{2(1-\theta)} \left\|\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right\|_{Y^0}^{2\theta-1}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(\mathcal{B}_{(\theta,\eta)}).$$

Logo, do Teorema 4.3.1, segue que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\eta}A^{1-\theta} \end{bmatrix} \mathcal{B}^{-\beta}_{(\theta,\eta)} \in \mathcal{L}(Y^0) \text{ para } 1 \geq \beta > 2(1-\theta). \tag{4.23}$$

Consequentemente, se $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$, $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ é setorial (veja Corolário 4.3.2) e os domínio das potências fracionárias são dados por (4.20) *(com normas equivalentes).*

Agora, para $\theta = \frac{1}{2}$, as igualdades (4.19), (4.20) *nos dão que*

$$D(\mathcal{A}^{\alpha}_{(\frac{1}{2},\eta)}) = D(\mathcal{B}^{\alpha}_{(\frac{1}{2},\eta)}) = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \nu \end{bmatrix} : \xi \in X^{\frac{1}{2}+(1-\theta)\alpha} \text{ and } A^{1-\theta}\xi + 2\eta\nu \in X^{\theta\alpha} \right\}$$
$$= X^{\frac{1+\alpha}{2}} \times X^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \in [0,1]; \tag{4.24}$$

com $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2},\eta)}$ setorial pelo Lema 4.4.1.$\square$

Observação 4.4.4. *Note que a restrição $1 \geq \beta > 2(1-\theta)$ em* (4.23) *exclui o caso $\theta = \frac{1}{2}$. De fato, a setorialidade de $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}$ e a caracterização dos domínios* *de potências fracionárias associados são provados de modo distinto, através de uma mudança de variáveis apropriada.*

Pelo Teorema 4.4.2 o semigrupo $\{e^{-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}t}, t \geq 0\}$ *gerado por* $-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ *em* $D(A^{\frac{1}{2}}) \times D(A^0) = Y^0$ *é analítico e o problema de Cauchy linear*

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \mathcal{A}_{(\theta,\eta)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t > 0, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in Y^0, \tag{4.25}$$

tem uma única solução $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(t) = e^{-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$, $t \geq 0$. *No teorema a seguir explicamos a regularização das soluções do problema linear* (4.25).

Teorema 4.4.3. *Se* $\theta \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$, $t > 0$, *e* $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in Y^0$, *então*

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} := e^{-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in X^\alpha \times X^\beta \text{ para cada } \alpha, \beta \geq 0.$$

Prova: *O Teorema 4.4.2 implica que*

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_t(t) \\ v_t(t) \end{bmatrix} \in Y^1_{(\theta,\eta)} \subset Y^{\frac{1}{2}}_{(\theta,\eta)} = X^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\theta)} \times X^{\frac{1}{2}\theta}. \tag{4.26}$$

Como $X^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\theta)} \subset X^\theta$ *temos que* $v(t) \in X^\theta$ *e de* $Y^1_{(\theta,\eta)} = \{\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in X^{\frac{3}{2}-\theta} \times X^{\frac{1}{2}};\ A^{1-\theta}\varphi + 2\eta\psi \in X^\theta\}$ *deduzimos que* $u(t) \in X^1$. *Assim obtemos que*

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in X^1 \times X^{\frac{1}{2}} \quad \text{para } t > 0. \tag{4.27}$$

A seguir considere a $X^{\frac{1}{2}}$*-realização* $\tilde{A} := A_{|_{X^{\frac{1}{2}}}} : X^{\frac{3}{2}} \subset X^{\frac{1}{2}} \to X^{\frac{1}{2}}$ *de* A *e note que podemos aplicar o Teorema 4.4.2 ao operador* $\tilde{A}_{(\theta,\eta)} := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \tilde{A} & 2\eta\tilde{A}^\theta \end{bmatrix}$

no espaço $D(\tilde{A}^{\frac{1}{2}})\times D(\tilde{A}^{0})$ *e com domínio* $\{ \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(\tilde{A}^{\frac{3}{2}-\theta})\times D(\tilde{A}^{\frac{1}{2}});\ \tilde{A}^{1-\theta}\varphi + 2\eta\psi \in D(\tilde{A}^{\theta})\}$ *e portanto ver* $\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ *como a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \tilde{\mathcal{A}}_{(\theta,\eta)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t > 0, \\ &\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{t=0} \in D(\tilde{A}^{\frac{1}{2}}) \times D(\tilde{A}^{0}) = X^{1} \times X^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Procedendo de modo similar ao descrito acima obtemos que

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in D(\tilde{A}^{1}) \times D(\tilde{A}^{\frac{1}{2}}) = X^{\frac{3}{2}} \times X^{1}. \tag{4.29}$$

Por indução prova-se que $\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}(k+1)} \times X^{\frac{1}{2}k}$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolário 4.4.1. *Se* A *tem resolvente compacto,* $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ *é setorial* Y^0 *com resolvente compacto e espectro* $\sigma(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ *consistindo apenas de auto-valores isolados de multiplicade finita. Além disso, para* $\theta = \frac{1}{2}$*, o operador* $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2},\eta)}$ *é positivo e*

$$\sigma(\mathcal{A}_{(\frac{1}{2},\eta)}) = \{a_\eta\lambda; \lambda \in \sigma(A^{\frac{1}{2}})\} \cup \{\bar{a}_\eta\lambda; \lambda \in \sigma(A^{\frac{1}{2}})\}.$$

Estudar ↑

Capítulo 5

Teoremas de Aproximação

Início da Vigésima Sexta Aula ↓

5.1 Teoremas de aproximação de Trotter

Nesta seção estudamos a dependência contínua do semigrupo relativamente ao seu gerador infinitesimal e a dependência contínua do gerador relativamente ao semigrupo. Mostraremos que a convergência (em sentido apropriado) de uma sequência de geradores infinitesimais é equivalente a convergência dos semigrupos correspondentes. Começamos com o seguinte lema

Lema 5.1.1. *Sejam* $\{e^{At}; t \geq 0\}$ *e* $\{e^{Bt}; t \geq 0\}$ *semigrupos fortemente contínuos. Para todo* $x \in X$ *e* $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ *temos*

$$(\lambda - B)^{-1}[e^{At} - e^{Bt}](\lambda - A)^{-1}x = \int_0^t e^{B(t-s)}[(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1}]e^{As}x\, ds \quad (5.1)$$

Prova: Para todo $x \in X$ e $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ a função $s \mapsto e^{B(t-s)}(\lambda -$

$B)^{-1}e^{As}(\lambda - A)^{-1}x$ é diferenciável. Um cálculo simples resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}[e^{B(t-s)}(\lambda - B)^{-1}e^{As}(\lambda - A)^{-1}]x \\
&\qquad\qquad = e^{B(t-s)}[(\lambda - B)^{-1}A(\lambda - A)^{-1} - B(\lambda - B)^{-1}(\lambda - A)^{-1}]e^{As}x \\
&\qquad\qquad = e^{B(t-s)}[(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1}]e^{As}x
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $(\lambda - A)^{-1}e^{As}x = e^{As}(\lambda - A)^{-1}x$. Integrando a última equação de 0 a t (5.1) segue.$\square$

No que se segue, denotaremos por $G(M,\omega)$ o conjunto dos operadores lineares $A : D(A) \subset X \to X$ que são geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos $\{e^{At} : t \geq 0\}$ tais que $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.

Teorema 5.1.1. *Se $A, A_n \in G(M,\omega)$, $n \in \mathbb{N}$, então as afirmativas a seguir são equivalentes*

(*a*) *Para todo $x \in X$ e λ com $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, $(\lambda - A_n)^{-1}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\lambda - A)^{-1}x$.*

(*b*) *Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, $e^{A_n t}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{At}x$.*

Além disso, a convergência em (b) é uniforme para t em limitados de $\mathbb{R}^+$.

Prova: Mostremos que $(a) \Rightarrow (b)$. Fixe $T > 0$, $x \in X$, $t \in [0,T]$ e considere

$$\begin{aligned}
\|(e^{A_n t} - e^{At})(\lambda - A)^{-1}x\|_X &\leq \|e^{A_n t}((\lambda - A)^{-1} - (\lambda - A_n)^{-1})x\|_X \\
&\quad + \|(\lambda - A_n)^{-1}(e^{A_n t} - e^{At})x\|_X \\
&\quad + \|((\lambda - A_n)^{-1} - (\lambda - A)^{-1})e^{At}x\|_X \\
&= D_1 + D_2 + D_3.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Como $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega T}$ para $0 \leq t \leq T$ segue de (a) que $D_1 \to 0$ quando $n \to \infty$ uniformemente em $[0,T]$. Também, como $t \mapsto e^{At}x$ é contínua o conjunto $\{e^{At}x : 0 \leq t \leq T\}$ é compacto em X e portanto $D_3 \to 0$ quando

$n \to \infty$ uniformemente em $[0,T]$. Finalmente, usando o Lema 5.1.1 com $B = A_n$, temos

$$\begin{aligned} &\|(\lambda - A_n)^{-1}[e^{At} - e^{A_n t}](\lambda - A)^{-1}x\|_X \\ &\quad \leq \int_0^t \|e^{A_n(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)}\|[(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - A_n)^{-1}]e^{As}x\|_X \, ds \\ &\quad \leq Me^{\omega T}\int_0^T \|[(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - A_n)^{-1}]e^{As}x\|_X \, ds \end{aligned} \tag{5.3}$$

O integrando no último termo da expressão acima é limitado por $2M^2(Re\lambda - \omega)^{-1}\|x\|_X$ e tende para zero quando $n \to \infty$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \|(\lambda - A_n)^{-1}(e^{A_n t} - e^{At})(\lambda - A)^{-1}x\|_X = 0,$$

com o limite sendo uniforme para $t \in [0,T]$. Como para todo $x \in D(A)$ pode ser escrito como $x = (\lambda - A)^{-1}f$ para algum $f \in X$ segue que para $x \in D(A)$, $D_2 \to 0$ quando $n \to \infty$ uniformemente em $[0,T]$. De (5.2) segue que para $x \in D(A^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \|(e^{A_n t} - e^{At})x\|_X = 0 \tag{5.4}$$

e o limite acima é uniforme em $[0,T]$. Como $\|e^{A_n t} - e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uniformemente limitado em $[0,T]$ e como $D(A^2)$ é denso em X segue que (5.4) vale para todo $x \in X$ uniformemente em $[0,T]$ e $(a) \Rightarrow (b)$.

Suponha agora que (b) vale. Então, para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$,

$$\|(\lambda - A_n)^{-1}x - (\lambda - A)^{-1}x\|_X \leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda t}\|(e^{A_n t} - e^{At})x\|_X dt. \tag{5.5}$$

O lado direito de (5.5) tende para zero quando $n \to \infty$ pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e portanto $(b) \Rightarrow (a)$. $\square$

Note que, se todos os operadores estão em $G(M,\omega)$, então a convergência forte dos operadores resolvente para um valor de λ ($\mathrm{Re}\lambda > \omega$) implica a convergência do resolvente para todos os valores de λ ($\text{Re}\lambda > \omega$). Isto é evidente da prova de (b) onde somente a convergência do resolvente para um valor de λ é usada. Este fato é independente do fato dos operadores envolvidos gerarem semigrupos fortemente contínuos como pode ser visto no lema a seguir.

Lema 5.1.2. *Se $B_i : D(B_i) \subset X \to X$ é fechado, $i = 1, 2$ e $\lambda \in \rho(B_1) \cap \rho(B_2)$ então,*

$$\begin{aligned}&(\lambda - B_1)^{-1} - (\lambda - B_2)^{-1}\\ &= (\lambda_0 - B_1)(\lambda - B_1)^{-1}((\lambda_0 - B_1)^{-1} - (\lambda_0 - B_2)^{-1})(\lambda_0 - B_2)(\lambda - B_2)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Prova: Para provar o lema simplesmente adicionamos e subtraímos

$$(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - B_1)^{-1}(\lambda - B_2)^{-1}$$

ao lado esquerdo de (5.6) e utilizamos que

$$(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - B_2)^{-1} + I = (\lambda_0 - B_2)(\lambda - B_2)^{-1}$$

e

$$(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - B_1)^{-1} + I = (\lambda_0 - B_1)(\lambda - B_1)^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}&(\lambda - B_1)^{-1} - (\lambda - B_2)^{-1}\\ &= (\lambda - B_1)^{-1}((\lambda_0 - \lambda)(\lambda - B_2)^{-1} + I) - ((\lambda_0 - \lambda)(\lambda - B_1)^{-1} + I)(\lambda - B_2)^{-1}\\ &= (\lambda - B_1)^{-1}(\lambda_0 - B_2)(\lambda - B_2)^{-1} - (\lambda_0 - B_1)(\lambda - B_1)^{-1}(\lambda - B_2)^{-1}\\ &= (\lambda_0 - B_1)(\lambda - B_1)^{-1}((\lambda_0 - B_1)^{-1} - (\lambda_0 - B_2)^{-1})(\lambda_0 - B_2)(\lambda - B_2)^{-1},\end{aligned}$$

provando o resultado.□

Observação 5.1.1. *Da prova do Teorema 5.1.1 é claro que* (a) *pode ser substituida pela seguinte versão mais fraca:* (a') para todo $x \in X$ e algum λ_0 com $\mathrm{Re}\lambda_0 > \omega$, $(\lambda_0 - A_n)^{-1}x \to (\lambda_0 - A)^{-1}x$ quando $n \to \infty$.

Diremos que a sequência de operadores A_n*,* $r-$*converge para um operador* A *se para algum número complexo* λ*,* $(\lambda - A_n)^{-1}x \to (\lambda - A)^{-1}x$ *para todo* $x \in X$*. No Teorema 5.1.1 supomos a existência do* $r-$*limite* A *de uma sequência* A_n *e além disso que* $A \in G(M,\omega)$*. Acontece que essas hipóteses não são necessárias. Isto é mostrado no teorema a seguir (veja [18, Teorema 5.1] e uma correção de parte da prova em [13]).*

Teorema 5.1.2 (Trotter-Kato)**.** *Se* $A_n \in G(M,\omega)$ *e existe um* λ_0 *com* $\mathrm{Re}\,\lambda_0 > \omega$ *tal que*

(a) *para todo* $x \in X$*,* $(\lambda_0 - A_n)^{-1}x \to R(\lambda_0)x$ *quando* $n \to \infty$ *e*

(b) *a imagem de* $R(\lambda_0)$ *é densa em* X*,*

então existe um único operador $A \in G(M,\omega)$ *tal que* $R(\lambda_0) = (\lambda_0 - A)^{-1}$*.*

Prova: Assumiremos sem perda de generalidade que $\omega = 0$ e começamos provando que $(\lambda - A_n)^{-1}x$ converge quando $n \to \infty$ para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e $x \in X$. De fato, fixado um vetor arbitário $x \in X$, seja

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > 0,\ (\lambda - A_n)^{-1}x \ \text{ converge quando } \ n \to \infty\}.$$

Mostremos que S é aberto. Para ver isto expandimos $(\lambda - A_n)^{-1}$ em série de Taylor em torno de um ponto μ de S. Então

$$(\lambda - A_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k (\mu - A_n)^{-k-1}.$$

Como $\|(\mu - A_n)^{-k}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\mathrm{Re}\mu)^{-k}$ a série acima converge na topologia uniforme de operadores para todos os λ satisfazendo $|\mu - \lambda|(\mathrm{Re}\mu)^{-1} < 1$. A convergência é uniforme em λ para $|\mu - \lambda|(\mathrm{Re}\mu)^{-1} \leq \nu < 1$. Isto implica a convergência de $(\lambda - A_n)^{-1}x$ quando $n \to \infty$ para todo λ satisfazendo $|\mu - \lambda|(\mathrm{Re}\mu)^{-1} \leq \nu < 1$, e o conjunto S é aberto. Seja λ um ponto de acumulação de S tal que $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Dado $\nu \in (0,1)$ existe um ponto $\mu \in S$ tal que $|\mu - \lambda|(\mathrm{Re}\,\mu)^{-1} \leq \nu < 1$ e portanto, pela primeira parte $\lambda \in S$. Portanto S é relativamente fechado em $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Como por hipótese $\lambda_0 \in S$ concluímos que $S = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$.

Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ definimos $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ por

$$R(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} (\lambda - A_n)^{-1}x.$$

Claramente,

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu), \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \ \text{ e } \ \mathrm{Re}\,\mu > 0 \tag{5.7}$$

e portanto $R(\lambda)$ é um pseudo-resolvente sobre $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Como para um pseudo resolvente a imagem de $R(\lambda)$ é independente de λ temos por (b) que a imagem de $R(\lambda)$ é densa em X. Também da definição de $R(\lambda)$ é claro que

$$\|R(\lambda)^k\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\mathrm{Re}\lambda)^{-k}, \quad \mathrm{Re}\lambda > 0, k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{5.8}$$

Em particular para λ real, $\lambda > 0$

$$\|\lambda R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \lambda > 0.$$

Segue do Teorema 3.6.2 que existe um único operador linear fechado e densamente definido A para o qual $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$. Finalmente, de (5.8) temos que $A \in G(M, 0)$ e a prova está completa.$\square$

Uma consequência direta dos Teoremas 5.1.1 e 5.1.2 é o seguinte teorema

Teorema 5.1.3. *Seja $A_n \in G(M, w)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se para algum $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ com* $\mathrm{Re}\lambda_0 > w$

(a) $\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 - A_n)^{-1}x =: R(\lambda_0)x$ *para todo* $x \in X$ *e*

(b) *a imagem de* $R(\lambda_0)$ *é densa em* X,

então existe um único operador $A \in G(M,\omega)$ *tal que* $R(\lambda_0) = (\lambda_0 - A)^{-1}$. *Além disso,* $e^{A_n t}x \to e^{At}x$ *para todo* $x \in X$, *uniformemente para* t *em subconjuntos limitados de* $\mathbb{R}^+$.

Uma consequência um pouco diferente dos resultados anteriores é o seguinte teorema (veja [18, Teorema 5.2] e também [15]).

Teorema 5.1.4 (Trotter)**.** *Seja* $A_n \in G(M,\omega)$ *e suponha que*

(a) *exista um subconjunto denso* D *de* X *tal que* $\{A_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ *seja convergente para todo* $x \in D$. *Defina* $A : D \subset X \to X$ *por,* $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ *para todo* $x \in D$,

(b) *exista um* λ_0 *com* $\mathrm{Re}\lambda_0 > \omega$ *para o qual* $(\lambda_0 - A)D$ *seja densa em* X.

Então A *é fechável e o fecho* $\bar{A}$ *de* A *está em* $G(M,\omega)$. *Além disso* $e^{A_n t}x \to e^{\bar{A}t}x$ *para todo* $x \in X$, *uniformemente para* t *em limitados de* $\mathbb{R}^+$.

Prova: Se $f \in D$, $x = (\lambda_0 - A)f$ e $x_n = (\lambda_0 - A_n)f$, então $A_n f \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Af$ e $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Ainda, como $\|(\lambda_0 - A_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\mathrm{Re}\lambda_0 - \omega)^{-1}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 - A_n)^{-1}x = \lim_{n\to\infty}((\lambda_0 - A_n)^{-1}(x - x_n) + f) = f; \tag{5.9}$$

isto é, $(\lambda_0 - A_n)^{-1}$ converge na imagem de $\lambda_0 - A$. De (b) a imagem de $\lambda_0 - A$ é densa em X e, por hipótese, $\|(\lambda_0 - A_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Segue que $(\lambda_0 - A_n)^{-1}x$ converge para todo $x \in X$. Seja

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 - A_n)^{-1}x = R(\lambda_0)x. \tag{5.10}$$

De (5.9) segue que a imagem de $R(\lambda_0)$ contém D e portanto é densa em X. O Teorema 5.1.2 implica a existência de um operador $A' \in G(M,\omega)$ satisfazendo $R(\lambda_0) = (\lambda_0 - A')^{-1}$. Para concluir a prova mostraremos que $\bar{A} = A'$. Se $x \in D$, então

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_0 - A_n)^{-1}(\lambda_0 - A)x = (\lambda_0 - A')^{-1}(\lambda_0 - A)x. \tag{5.11}$$

Por outro lado, como $\|(\lambda_0 - A_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uniformemente limitada,

$$\begin{aligned}(\lambda_0 - A_n)^{-1}(\lambda_0 - A)x &= (\lambda_0 - A_n)^{-1}(\lambda_0 - A_n)x + (\lambda_0 - A_n)^{-1}(A_n - A)x \\ &= x + (\lambda_0 - A_n)^{-1}(A_n - A)x \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x,\end{aligned}$$

já que $A_n x \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Ax$ para $x \in D$. Logo,

$$(\lambda_0 - A')^{-1}(\lambda_0 - A)x = x, \quad x \in D. \tag{5.12}$$

Mas (5.12) implica que $A'x = Ax$ para $x \in D$ e portanto $A' \supset A$, Como A' é fechado, A é fechável. A seguir mostramos que $\bar{A} \supset A'$. Seja $f' = A'x'$. Como $(\lambda_0 - A)D$ é denso em X existe uma sequência $x_n \in D$ tal que

$$f_n = (\lambda_0 - A')x_n = (\lambda_0 - A)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0 x' - f' = (\lambda_0 - A')x'.$$

Portanto,

$$x_n = (\lambda_0 - A')^{-1} f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (\lambda_0 - A')^{-1}(\lambda_0 - A')x' = x' \quad \text{e} \tag{5.13}$$

$$Ax_n = \lambda_0 x_n - f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f'. \tag{5.14}$$

De (5.13) e (5.14) segue que $f' = \bar{A}x'$ e $\bar{A} \supset A'$. Portanto $\bar{A} = A'$. O restante das afirmativas do teorema seguem diretamente do Teorema 5.1.3.□

Fim da Vigésima Sexta Aula ↑

Capítulo 6

Teoremas Espectrais e Dicotomias

Início da Vigésima Sétima Aula ↓

6.1 Decomposição espectral de semigrupos

Quando estudamos a estabilidade de problemas onde semigrupos estão envolvidos um dos problemas fundamentais é determinar o espectro do semigrupo de operadores. Em geral o semigrupo é desconhecido e somente o seu gerador é conhecido. Se podemos calcular algumas das propriedades espectrais do gerador de um semigrupo gostaríamos de utilizar estas propriedades para entender o espectro do semigrupo.

Primeiramente mostramos quais informações o conhecimento do espectro do semigrupo nos fornece.

Teorema 6.1.1. *Suponha que* $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *é um semigrupo fortemente contínuo e que para, algum* $t_0 > 0$, *o espectro* $\sigma(T(t_0))$ *é disjunto da circunferência* $\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = e^{\alpha t_0}\}$ *para algum* α *real. Então existe uma projeção* $P \in \mathcal{L}(X)$, $P^2 = P$, $PT(t) = T(t)P$ *para todo* $t \geq 0$ *tal que com*

$X_- = R(P)$ e $X_+ = N(P)$, as restrições $T(t)\big|_{X_\pm}$ estão em $\mathcal{L}(X_\pm)$,

$$\sigma(T(t)\big|_{X_-}) = \sigma(T(t)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < e^{\alpha t}\} \quad e$$
$$\sigma(T(t)\big|_{X_+}) = \sigma(T(t)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > e^{\alpha t}\}.$$

Existem constantes $M \geq 1$, $\delta > 0$ tais que

$$\|T(t)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)} \leq Me^{(\alpha-\delta)t}, \quad \forall t \geq 0;$$

$\{T(t)\big|_{X_+}; t \geq 0\}$ se estende a um grupo em $\mathcal{L}(X_+)$ com $T(t)\big|_{X_+} = (T(-t)\big|_{X_+})^{-1}$ para $t < 0$, e

$$\|T(t)\big|_{X_+}\|_{\mathcal{L}(X_+)} \leq Me^{(\alpha+\delta)t}, \quad \forall t \leq 0.$$

Observação 6.1.1. *A separação acima do espaço X é um caso particular de dicotomia exponencial. Um caso ainda mais especial, mas claramente útil, é o caso em que $\sigma(T(t_0)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < e^{\alpha t_0}\}$; isto é, $P = I$ e $X_+ = \{0\}$; então*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\alpha-\delta)t}, \quad t \geq 0.$$

Prova: Defina
$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} (\lambda - T(t_0))^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(X).$$
Então, do Teorema 2.9.2, $P^2 = P$ e P é uma projeção contínua.

É fácil ver que $T(t)P = PT(t)$ para todo $t \geq 0$. Logo, se $X_- = R(P)$ e $X_+ = N(P)$ temos que $T(t)$ leva X_+ em X_+ e X_- em X_-.

Note ainda, do Teorema 2.9.2, que $\sigma(T(t_0)\big|_{X_-})$ é a parte de $\sigma(T(t_0))$ dentro de $\mathcal{C}$ e $\sigma(T(t_0)\big|_{X_+})$ é a parte de $\sigma(T(t_0))$ fora de $\mathcal{C}$ e que as partes de $(\lambda - T(t_0))^{-1}$ em X_+ e X_- coincidem com $((\lambda - T(t_0))\big|_{X_+})^{-1}$ e $((\lambda - T(t_0))\big|_{X_-})^{-1}$ respectivamente.

Agora o raio espectral de $T(t_0)\big|_{X_-}$ é estritamente menor que $e^{\alpha t_0}$, digamos

$$r(T(t_0)\big|_{X_-}) < e^{(\alpha-\delta)t_0},$$

para algum $\delta > 0$.

Se $t > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$ existem $n = n(m) \in \mathbb{N}$ e $\tau \in [0, t_0)$ tais que $mt = nt_0 + \tau$. É claro que $n(m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e

$$\begin{aligned}
r(T(t)\big|_{X_-}) &= \lim_{m\to\infty} \|T(mt)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)}^{\frac{1}{m}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|T(nt_0+\tau)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)}^{\frac{t}{nt_0+\tau}} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|T(nt_0)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)}^{\frac{t}{nt_0+\tau}} \|T(\tau)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)}^{\frac{t}{nt_0+\tau}} \\
&= r(T(t_0)\big|_{X_-})^{t/t_0} < e^{(\alpha-\delta)t}
\end{aligned}$$

Também existe inteiro $N \geq 1$ tal que $Nt_0 \geq t$, consequentemente

$$T(Nt_0 - t)(T(t_0)\big|_{X_+})^{-N}$$

é a inversa de $T(t)\big|_{X_+}$ isto é, $T(-t)\big|_{X_+}$ e um argumento como aquele acima mostra que

$$r(T(t)\big|_{X_+}) < e^{(\alpha+\delta)t}, \quad t < 0.$$

É fácil ver que (considerando as componentes nos dois espaços)

$$\sigma(T(t)) = \sigma(T(t)\big|_{X_+}) \cup \sigma(T(t)\big|_{X_-}), \quad t > 0,$$

e as estimativas acima sobre os raios espectrais provam as afirmativas sobre o espectro.

As estimativas das normas são simples. Por exemplo, como $r(T(t_0)\big|_{X_-}) < e^{(\alpha-\delta)t_0}$,

$$\|T(nt_0)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)}^{1/n} < e^{(\alpha-\delta)t_0}$$

quando n é grande, logo

$$\|T(nt_0)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)} \leq M_0 e^{n(\alpha-\delta)t_0}$$

para todo $n \geq 0$ e algum $M_0 \geq 1$. Logo, para $n = 0, 1, 2, \cdots$ e $0 \leq \tau < t_0$,

$$\|T(nt_0 + \tau)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)} \leq M_0 e^{n(\alpha-\delta)t_0} \|T(\tau)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)} \leq M e^{(\alpha-\delta)(nt_0+\tau)}$$

onde $M = M_0 \sup_{0\leq\tau\leq t_0} e^{-(\alpha-\delta)\tau} \|T(\tau)\big|_{X_-}\|_{\mathcal{L}(X_-)}$.□

6.2 Teoremas espectrais para semigrupos

O teorema da aplicação espectral (Teorema 2.11.1) estabelece que $\sigma(f(A)) = f(\sigma_e(A))$ quando A é um operador fechado e com resolvente não vazio e $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$; isto não vale, em geral, se A é um operador ilimitado e $f \notin \mathcal{U}_\infty(A)$. Como $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto e^{\lambda t} \in \mathbb{C}$ não pertence a $\mathcal{U}_\infty(A)$ para A ilimitado, em geral não podemos dizer que $\sigma(e^{At}) = e^{\sigma_e(A)t}$. Vamos estudar a seguir as relações entre o espectro de um semigrupo e o espectro de seu gerador.

Lema 6.2.1. *Seja* $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *um semigrupo fortemente contínuo. Se*

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} e^{As} x ds \tag{6.1}$$

então

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - e^{At}x, \quad \forall x \in X \tag{6.2}$$

e

$$B_\lambda(t)(\lambda - A)x = e^{\lambda t}x - e^{At}x, \quad \forall x \in D(A). \tag{6.3}$$

Prova: Para todo λ e t fixos, $B_\lambda(t)$ definido por (6.1) é um operador em $\mathcal{L}(X)$. Além disso, para todo $x \in X$ temos

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{Ah} - I}{h} B_\lambda(t)x \\
&\qquad = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^t e^{\lambda(t-s)} e^{As} x ds + \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-s)} e^{As} x ds - \frac{1}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-s)} e^{As} x ds \\
&\qquad \xrightarrow{h \to 0^+} \lambda B_\lambda(t)x + e^{At}x - e^{\lambda t}x.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $B_\lambda(t)x \in D(A)$ e $AB_\lambda(t)x = \lambda B_\lambda(t)x + e^{At}x - e^{\lambda t}x$, provando (6.2). É claro, para $x \in D(A)$, $AB_\lambda(t)x = B_\lambda(t)Ax$ e (6.3) segue.$\square$

Teorema 6.2.1. *Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então,*

$$\sigma(e^{At}) \supset e^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0. \tag{6.4}$$

Prova: Seja $e^{\lambda t} \in \rho(e^{At})$ e seja $Q = (e^{\lambda t} - e^{At})^{-1}$. De (6.2) e (6.3) deduzimos que

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)Qx = x, \quad \forall x \in X$$

e

$$QB_\lambda(t)(\lambda - A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Como $B_\lambda(t)$ e Q comutam também temos que

$$B_\lambda(t)Q(\lambda - A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Portanto, $\lambda \in \rho(A)$, $B_\lambda(t)Q = (\lambda - A)^{-1}$ e $\rho(e^{At}) \subset e^{t\rho(A)}$. Esta mesma argumentação implica que $\lambda + \frac{2k\pi i}{t} \in \rho(A)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, o que implica $e^{\lambda t} \notin e^{t\sigma(A)}$ e prova (6.4).$\square$

Recorde que o espectro do operador A consiste de três partes mutualmente exclusivas: o espectro pontual $\sigma_p(A)$; o espectro residual $\sigma_r(A)$ e o espectro contínuo $\sigma_c(A)$. Estas partes são definidas da seguinte forma: $\lambda \in \sigma_p(A)$ se $(\lambda - A)$ não é injetor; $\lambda \in \sigma_c(A)$ se $(\lambda - A)$ é injetor, sua imagem é densa em X mas não é sobrejetor e finalmente $\lambda \in \sigma_r(A)$ se $(\lambda - A)$ é um a um e sua imagem não é densa em X. Dessas definições, é claro que $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ e $\sigma_r(A)$ são mutualmente exclusivos e sua união é $\sigma(A)$. A seguir estudamos as relações entre cada parte do espectro de A e a sua parte correspondente no espectro de e^{At}. Começamos com o espectro pontual.

Teorema 6.2.2. *Seja* $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *um semigrupo fortemente contínuo. Então*

$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(e^{At}) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\}.$$

Mais precisamente, se $\lambda \in \sigma_p(A)$ *então* $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ *e se* $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ *existe um inteiro* k *tal que* $\lambda_k = \lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_p(A)$.

Prova: Se $\lambda \in \sigma_p(A)$ existe um $x \in D(A)$, $x \neq 0$ tal que $(\lambda - A)x = 0$. De (6.3) segue que $(e^{\lambda t} - e^{At})x = 0$ e portanto $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ o que prova a primeira inclusão. Para provar a segunda inclusão seja $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ e seja $x \neq 0$ tal que $(e^{\lambda t}I - e^{At})x = 0$. Isto implica que a função contínua $s \mapsto e^{-\lambda s}T(s)x$ é periódica com período t e como ela não é identicamente nula, um de seus coeficientes de Fourier deve ser diferente de zero. Portanto, existe k tal que

$$x_k = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-(2\pi ik/t)s}(e^{-\lambda s}T(s)x)ds \neq 0.$$

Mostraremos que $\lambda_k = \lambda + 2\pi ik/t$ é um autovalor de A. Seja $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. Para Re$\mu > \omega$ temos

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1}x &= \int_0^\infty e^{-\mu s}e^{As}x\,ds = \sum_{n=0}^\infty \int_{nt}^{(n+1)t} e^{-\mu s}e^{As}x\,ds \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{n(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\mu s}e^{As}x\,ds = \frac{1}{1-e^{(\lambda-\mu)t}}\int_0^t e^{-\mu s}e^{As}x\,ds\end{aligned} \tag{6.5}$$

onde usamos a periodicidade da função $s \mapsto e^{-\lambda s}e^{As}x$ e do fato que $e^{n\lambda t}x = e^{Ant}x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $e^{nt\mathrm{Re}\lambda}\|x\| \leq Me^{nt\omega}\|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e consequentemente Re$\lambda \leq \omega$. A integral do lado direito de (6.5) é claramente uma função inteira e portanto $(\mu - A)^{-1}x$ pode ser estendida a uma função analítica com possíveis polos em $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Usando (6.5) é fácil mostrar que (já que $e^{(\lambda-\mu)t} = e^{(\lambda_k-\mu)t}$)

$$\lim_{\mu\to\lambda_k}(\mu - \lambda_k)(\mu - A)^{-1}x = \lim_{\mu\to\lambda_k}\frac{\lambda_k - \mu}{e^{(\lambda-\mu)t} - 1}\int_0^t e^{-\mu s}e^{As}x\,ds = x_k$$

e, como $\displaystyle\int_0^t e^{-\mu s}e^{As}x\,ds \in D(A)$, da $t-$periodicidade de $s \mapsto e^{-\lambda s}e^{As}x$,

$$
\begin{aligned}
(\lambda_k - A)(\mu - A)^{-1}x &= (\lambda_k - A)\frac{1}{1-e^{(\lambda-\mu)t}}\int_0^t e^{-\mu s}e^{As}x\,ds\\
&= \frac{(\lambda_k-\mu)}{1-e^{(\lambda-\mu)t}}\int_0^t e^{-\mu s}e^{As}x\,ds + x,\\
&= (\lambda_k-\mu)(\mu-A)^{-1}x + x
\end{aligned}
$$

segue que

$$\lim_{\mu\to\lambda_k}(\lambda_k - A)[(\mu-\lambda_k)(\mu-A)^{-1}]x = 0.$$

Como A é fechado, segue que $x_k \in D(A)$ e $(\lambda_k - A)x_k = 0$; isto é, $\lambda_k \in \sigma_p(A)$.$\square$

Fim da Vigésima Sétima Aula $\uparrow$

Início da Vigésima Oitava Aula ↓

Agora lidamos com o espectro residual de A.

Teorema 6.2.3. *Seja* $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *um semigrupo fortemente contínuo. Então,*

1. *Se* $\lambda \in \sigma_r(A)$ *e* $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap \sigma_p(A) = \varnothing$*, então* $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$*.*
2. *Se* $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$ *então,* $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap \sigma_p(A) = \varnothing$ *e* $\lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_r(A)$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Prova: De (6.2) segue que $R(e^{\lambda t} - e^{At}) \subset R(\lambda - A)$. Além disso, do Teorema 6.2.2, se $e^{\lambda t} - e^{At}$ não é um-a-um, então $\lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_p(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, se $\lambda \in \sigma_r(A)$ e $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap \sigma_p(A) = \varnothing$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$. Isto conclui a prova de *1.*

Agora vamos provar *2.* Do Teorema 6.2.2, se $\lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_p(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$. Resta mostrar que, se $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$, então para algum k, $R(\lambda_k - A)$ não é densa em X. Basta mostrar que, se $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$, então $\{\lambda + 2\pi in/t : n \in \mathbb{Z}\} \not\subset \rho(A) \cup \sigma_c(A)$. De (6.3), se $\lambda_n := \lambda + 2\pi in/t$,

$$(e^{\lambda_n t} - e^{At})x = B_{\lambda_n}(t)(\lambda_n - A)x, \quad x \in D(A), \ n \in \mathbb{Z}. \tag{6.6}$$

Como por hipótese $e^{\lambda t} = e^{\lambda_n t} \in \sigma_r(e^{At})$ o lado esquerdo de (6.6) pertence a um subespaço fixo Y que não é denso em X. Por outro lado, se $\lambda_n \in \rho(A) \cup \sigma_c(A)$, então a imagem de $\lambda_n - A$ é densa em X o que implica, por (6.6), que a imagem de $B_{\lambda_n}(t)$ está em $\bar{Y}$ para todo n. Escrevendo a série de Fourier da função contínua $s \mapsto e^{-\lambda s} e^{As} x$, $x \in X$ temos

$$e^{-\lambda s} e^{As} x \sim \frac{e^{-\lambda t}}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(2\pi in/t)s} B_{\lambda_n}(t) x \tag{6.7}$$

e cada termo da série do lado direito de (6.7) pertence a $\bar{Y}$. Como a série é Cesàro convergente para $e^{-\lambda s}e^{As}x$, $0 < s < t$, temos que $e^{-\lambda s}e^{As}x \in \bar{Y}$ para $0 < s < t$. Fazendo $s \to 0^+$ temos $x \in \bar{Y}$ e $\bar{Y} = X$, o que é absurdo.$\square$

Proposição 6.2.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e densamente definido. Denote por $X^\odot$ o fecho de $D(A^*)$ em X^* com a norma herdada de X^* e $A^\odot : D(A^\odot) \subset X^\odot \to X^\odot$ a parte de A em $X^\odot$ (veja Definição 3.7.1). Então*

$$\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A^\odot). \tag{6.8}$$

Prova: A imagem $R(\lambda I - A)$ de $\lambda I - A$ não é densa em X se, e somente se, existe $0 \neq x^* \in X^*$ tal que $\langle (\lambda I - A)x, x^* \rangle_{X,X^*} = 0$ para todo $x \in D(A)$ se, e somente se, existe $0 \neq x^* \in D(A^*)$ tal que $\langle x, (\lambda I^* - A^*)x^* \rangle_{X,X^*} = 0$ para todo $x \in D(A)$ se, e somente se, $\lambda \in \sigma_p(A^*)$. Isto mostra a primeira igualdade em (6.8).

Se $\lambda \in \sigma_p(A^*)$, existe $x^* \in D(A^*)$ tal que $Ax^* = \lambda x^*$. Segue que $x^* \in D(A^\odot)$, $A^\odot x^* = \lambda x^*$ e que $\lambda \in \sigma_p(A^\odot)$. Reciprocamente, se $\lambda \in \sigma_p(A^\odot)$, existe $x^\odot \in D(A^\odot)$ tal que $A^\odot x^\odot = \lambda x^\odot$. Logo $x^\odot \in D(A^*)$, $A^* x^\odot = \lambda x^\odot$ e $\lambda \in \sigma_p(A^*)$. Isto mostra a segunda igualdade em (6.8).$\square$

Teorema 6.2.4. *Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então,*

$$e^{t\sigma_r(A)} \subset \sigma_r(e^{At}) \subset e^{t\sigma_r(A)} \cup \{0\}.$$

Prova: Segue da Proposição 6.2.1 que

$$\sigma_r(e^{At}) = \sigma_p((e^{At})^*) \quad \text{e} \quad \sigma_r(A) = \sigma_p(A^\odot). \tag{6.9}$$

Mostremos que

$$\sigma_p((e^{At})^*) = \sigma_p\left(((e^{At})^*)\big|_{X^\odot}\right). \tag{6.10}$$

Basta mostrar que $\sigma_p((e^{At})^*) \subset \sigma_p\left(\left((e^{At})^*\right)\big|_{X^\odot}\right)$ pois a outra inclusão é trivial. Se $\lambda \in \sigma_p((e^{At})^*)$, existe $0 \neq x^* \in X^*$ tal que $(e^{At})^* x^* = \lambda x^*$. Dado $\mu \in \rho(A^*)$, seja $x^\odot = (\mu I - A^*)^{-1} x^* \neq 0$. Segue que $0 \neq x^\odot \in X^\odot$ e que $(e^{At})^* x^\odot = \lambda x^\odot$, mostrando que $\lambda \in \sigma_p\left(\left((e^{At})^*\right)\big|_{X^\odot}\right)$.

Do Teorema 3.7.1 temos que

$$e^{A^\odot t} = \left((e^{At})^*\right)\big|_{X^\odot} \tag{6.11}$$

Combinando (6.9), (6.10), (6.11) e o Teorema 6.2.2 obtemos,

$$\begin{aligned}\sigma_r(e^{At})\backslash\{0\} &= \sigma_p((e^{At})^*)\backslash\{0\} = \sigma_p\left(\left((e^{At})^*\right)\big|_{X^\odot}\right)\backslash\{0\} \\ &= \sigma_p(e^{A^\odot t})\backslash\{0\} = e^{t\sigma_p(A^\odot)} = e^{t\sigma_r(A)}. \square\end{aligned}$$

Exercício 6.2.1. *Compare o resultado acima com os resultados do Teorema 2.2.5 e Exemplo 2.2.1.*

Teorema 6.2.5. *Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Se $\lambda \in \sigma_c(A)$ e $\{\lambda + 2\pi i n/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap [\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)] = \varnothing$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_c(e^{At})$.*

Prova: Do Teorema 6.2.1 segue que, se $\lambda \in \sigma_c(A)$, então $e^{\lambda t} \in \sigma(e^{At})$. Do Teorema 6.2.2, se $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$, então $\lambda_k \in \sigma_p(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, provando que $e^{\lambda t} \notin \sigma_p(e^{At})$. Do Teorema 6.2.4, se $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$, então $\lambda_n \notin \sigma_p(A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\lambda_k \in \sigma_r(A)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, provando que $e^{\lambda t} \notin \sigma_r(e^{At})$.$\square$

Teorema 6.2.6. *Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Se $e^{\lambda t} \in \sigma_c(e^{At})$, então $\{\lambda_n := \lambda + 2\pi i n/t : n \in \mathbb{Z}\} \cap [\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)] = \varnothing$. É possível que $e^{\lambda t} \in \sigma_c(e^{At})$ e que $\lambda_n = \lambda + 2n\pi i/t \in \rho(A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Prova: É claro dos Teoremas 6.2.2 e 6.2.4 que, se $e^{\lambda t} \in \sigma_c(e^{At})$, então $\lambda_n = \lambda + 2\pi i n/t \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$, $n \in \mathbb{Z}$. Para o restante da afirmativa considere o seguinte exemplo: Seja $H=\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ e defina $A:D(A)\subset\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})\to\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ por

$$\begin{aligned}&D(A)=\big\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}):\{nx_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell_2(\mathbb{Z},\mathbb{C})\big\}\\&A\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}=\{i\,nx_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\quad\text{ para todo }\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in D(A).\end{aligned}$$

Então A gera o semigrupo fortemente contínuo dado por

$$T(t)\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}=\{e^{i\,nt}x_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\quad t\geq 0.$$

É claro que $\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{i\,n:n\in\mathbb{Z}\}$. Por outro lado $\sigma_p(e^A)=\{e^{i\,n}:n\in\mathbb{Z}\}$. Este conjunto é denso na circunferência unitária e, se $|\mu|\neq 1$, é fácil ver que $\mu\in\rho(e^A)$. Segue que $\sigma(e^A)=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|=1\}$.

Se $e^\lambda\in\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|=1\}\backslash\{e^{i\,n}:n\in\mathbb{Z}\}$, então $\overline{R(e^\lambda-e^A)}=X$ (contém as seqüências quase nulas). Assim $\sigma_r(e^A)=\emptyset$, $e^\lambda\in\sigma_c(e^A)$ e $\lambda_n=\lambda+2n\pi i\in\rho(A)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Exercício 6.2.2. *Se $\{e^{A\,t}:t\geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo e, para algum $t_0>0$, e^{At_0} é compacto, então $\sigma(e^{At})\backslash\{0\}=e^{t\sigma_p(A)}$ para cada $t\geq 0$ e $\sigma(e^{At})\backslash\{0\}$ consiste apenas de autovalores isolados e de multiplicidade finita. Além disso, $\sigma(A)=\sigma_p(A)$.*

Exemplo 6.2.1. *Seja $L:D(L)\subset X\to X$ o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t):t\geq 0\}$.*

Defina $S(L)=\sup\{\mathrm{Re}\lambda:\lambda\in\sigma(L)\}$ e $\omega(L)=\inf\{a\in\mathbb{R}:e^{-at}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}:t\geq 0$ é limitada$\}$. É fácil ver que $S(L)\leq\omega(L)$.

No que se segue, mostraremos que existem operadores L que são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares e para os quais $S(L)<\omega(L)$.

Seja X o espaço de Hilbert das seqüências de números complexos com quadrado somável com o produto interno usual; isto é,

$$X = \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \left\{ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle x, y\rangle_X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k, \quad x, y \in X.$$

Defina $L_n = inI_n + A_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ onde I_n é a identidade em $\mathbb{C}^n$ e $A_n = (a^n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ é a matriz que tem todas as entradas nulas exceto $a^n_{p,p+1} = 1$ para $1 \leq p \leq n-1$. Seja $L : D(L) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ definido por $L = \mathrm{diag}(L_1, L_2, L_3, \cdots)$ e $D(L) = \{x \in X : Lx \in X\}$. Mostremos que L gera um semigrupo fortemente contínuo e que $S(L) = 0$ enquanto que $\omega(L) = 1$.

Para ver que L gera um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X, basta notar que $A := \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3, \cdots)$ é um operador linear limitado em X, que $I := \mathrm{diag}(i\, I_1, i\, 2I_2, i\, 3I_3, \cdots)$ gera um grupo fortemente contínuo de operadores unitários e que I comuta com A.

É fácil ver que, se $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$, então $\lambda \in \rho(L)$ e $S(L) = 0$.

Agora

$$\|e^{L_n t}\| \leqslant e^{\|A_n\| t} \leqslant e^t,$$

e o elemento $(1, n)$ de $e^{L_n t}$ é exatamente $e^{i\,nt}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ de forma que, pela fórmula de Stirling

$$\|e^{L_n (n-1)}\| \geqslant \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sim \frac{e^{(n-1)}}{(2\pi n)^{1/2}} \text{ quando } n \to \infty,$$

mostrando que $\omega(L) = 1$.

Exercício 6.2.3. *Encontre $S(A)$ e $\omega(A)$ para o operador do Exemplo 3.1.2.*

Exercício 6.2.4. *Se substituirmos* L_n *no Exemplo 6.2.1 por* $\tilde{L}_n = -\omega I_n + A_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ *onde* $\omega \in (0,1)$ *e continuarmos a chamar o operador resultante de* L*, calcule* $\omega(L)$ *e* $S(L)$*.* Sugestão: Determine o espectro contínuo de L.

6.3 Decomposição espectral de operadores setoriais

Os teoremas da Seção 6.2, juntamente com o Teorema 6.1.1 implicam o resultado a seguir. Este resultado será de fundamental importância no estudo de pontos de equilíbrios do tipo sela para problemas parabólicos semilineares.

Teorema 6.3.1. *Dados um espaço de Banach* X *sobre* $\mathbb{C}$ *e um operador linear setorial* $-A : D(A) \subset X \to X$ *tal que* $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda = \alpha\} = \varnothing$*, para algum* $\alpha \in \mathbb{R}$*, seja*

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

onde γ *é uma curva fechada, retificável e simples que envolve* $\sigma_1 = \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > \alpha\}$ *(*$Q = 0$ *se esta interseção é vazia). Então* Q *é uma projeção contínua,* $Q^2 = Q$ *e* $Qe^{At} = e^{At}Q$ *para todo* $t \geq 0$*. Se* $X_- = N(Q)$ *e* $X_+ = R(Q)$*, então* $e^{At}\big|_{X_\pm} \in \mathcal{L}(X_\pm)$ *e temos a situação descrita no Teorema 6.1.1 (*$\sigma(e^{At})$ *não intersepta* $\{u \in \mathbb{C} : |u| = e^{\alpha t}\}$*,* $t > 0$*).*

Prova: Note que $\{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\lambda > \alpha\}$ é um conjunto compacto, possivelmente vazio. Com Q, X_+ e X_- definidos acima, do Teorema 2.9.2,

$$A\big|_{X_+} \in \mathcal{L}(X_+), \quad \sigma(A\big|_{X_+}) = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\lambda > \alpha\}.$$

É fácil ver que $\rho(e^{At}) = \rho(e^{At}\big|_{X^+}) \cap \rho(e^{At}\big|_{X^-})$ e, consequentemente, $\sigma(e^{At}) = \sigma(e^{At}\big|_{X^+}) \cup \sigma(e^{At}\big|_{X^-})$. Também é fácil ver que $A_\pm$ são os geradores infinitesimais dos semigrupos fortemente contínuos $\{e^{At}\big|_{X^+} : t \geq 0\}$. Do Teorema da Aplicação Espectral (Teorema 2.11.1) obtemos que $\sigma(e^{A|_{X_+}t}) = e^{\sigma(A|_{X_+})\,t}$ e disto segue que $\sigma(e^{A|_{X_+}t}) \subset \{u \in \mathbb{C} : |u| > e^{\alpha t}\}$ para todo $t > 0$.

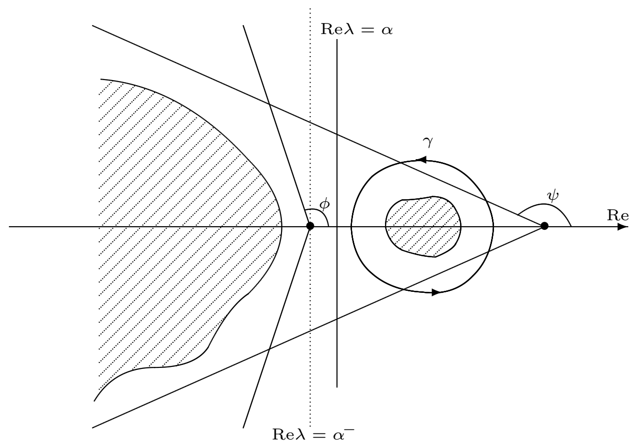


Figura 3

Provaremos que $r(e^{A|_{X_-}}) = r(e^{A}\big|_{X_-}) < e^{\alpha^-}$ para algum $\alpha^- < \alpha$, mais especificamente, provaremos que

$$\|e^{A|_{X_-}t}\| \leq Ce^{\alpha^- t},\ t \geq 0$$

e consequentemente o Teorema 6.1.1 se aplica.

Isto seguirá do Teorema 3.9.1 se mostrarmos que $-A|_{X_-}$ é setorial e

$$\|(\lambda - A|_{X_-})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_-)} \leq \frac{C}{|\lambda - \alpha^-|},$$

para todo λ com $|\arg(\lambda - \alpha^-)| < \phi$, $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ e $1 \leq C < \infty$. Agora, $\{\mathrm{Re}\lambda \geq \alpha^-\}$ está em $\rho(A|_{X_-})$, para algum $\alpha^- < \alpha$, e $\lambda \in \rho(A)$ implica $\lambda \in \rho(A|_{X_-})$ com $\|(\lambda - A|_{X_-})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_-)} \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$, logo $-A|_{X_-}$ é setorial com espectro em $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < \alpha\}$. A estimativa acima agora é clara da Figura 3.$\square$

Exercício 6.3.1. *A decomposição do espaço $X = X_+ \oplus X_-$ é a mesma que no Teorema 6.1.1 e a projeção Q coincide com a projeção $I - P$ daquele teorema. Se X_+ tem dimensão finita, $A|_{X_+}$ e $e^{At}\big|_{X_+} = e^{A|_{X_+}t}$ tem representação* *matricial relativamente a qualquer base para* $X_+ = R(Q)$*. Os elementos de* X_+ *são autovetores ou autovetores generalizados de* A*.* $-A_-$ *é setorial e* $e^{At}\big|_{X_-} = e^{A|_{X_-}t}$.

Fim da Vigésima Oitava Aula $\uparrow$

Capítulo 7

Teoremas de Perturbação de Geradores

Início da Vigésima Nona Aula ↓

7.1 Geradores de semigrupos fortemente contínuos

Nesta seção estudamos que tipos de operadores podem ser adicionados a geradores de semigrupos fortemente contínuos de forma que o resultado ainda seja o gerador de um semigrupo fortemente contínuo.

Teorema 7.1.1. *Se X é um espaço de Banach, $\{e^{At} : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X com gerador infinitesimal $A : D(A) \subset X \to X$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, então $A + B : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{(A+B)t} : t \geq 0\}$. Se $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$, então*

$$\|e^{(A+B)t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\omega + M\|B\|_{\mathcal{L}(X)})t}, \quad t \geq 0.$$

Prova: De acordo com o Lema 3.3.1, podemos escolher uma norma $|\cdot|_X$ em

X tal que

$$\|\cdot\|_X \leq |\cdot|_X \leq M\|\cdot\|_X$$

e

$$|(\lambda - A)^{-1}|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$$

para $\lambda > \omega$. Se $\lambda > \omega + |B|_{\mathcal{L}(X)}$ então

$$|B(\lambda - A)^{-1}|_{\mathcal{L}(X)} \leq |B|_{\mathcal{L}(X)}/(\lambda - \omega) < 1$$

e $I - B(\lambda - A)^{-1}$ é um isomorfismo em $\mathcal{L}(X)$. Logo

$$\lambda - A - B = [I - B(\lambda - A)^{-1}](\lambda - A) : D(A) \to X$$

e

$$|(\lambda - A - B)^{-1}|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}\,\frac{1}{1 - |B|_{\mathcal{L}(X)}/(\lambda - \omega)} = \frac{1}{\lambda - (\omega + |B|_{\mathcal{L}(X)})}.$$

Do Teorema de Hille-Yosida, $A + B$ gera um semigrupo fortemente contínuo com $|e^{(A+B)t}|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{(\omega+|B|)t}$ para $t \geq 0$. Retornando à norma original temos a estimativa desejada.$\square$

Agora estudaremos as relações entre o semigrupo $\{e^{At} : t \geq 0\}$ e o semigrupo $\{e^{(A+B)t} : t \geq 0\}$ quando $B \in \mathcal{L}(X)$. Para este fim consideramos o operador $H(s) = e^{A(t-s)}e^{(A+B)s}$. Para $x \in D(A) = D(A + B)$, $s \mapsto H(s)x$ é diferenciável e $H'(s)x = e^{A(t-s)}Be^{(A+B)s}x$. Integrando $H'(s)x$ de 0 até t obtemos

$$e^{(A+B)t}x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Be^{(A+B)s}x ds, \quad x \in D(A).$$

Como os operadores em ambos os lados da expressão acima são limitados ela vale para todo $x \in X$. O semigrupo $\{e^{(A+B)t} : t \geq 0\}$ é portanto a solução da equação integral acima. Para tal equação integral temos:

Proposição 7.1.1. *Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados satisfazendo $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ e $B \in \mathcal{L}(X)$. Então existe uma única família $\{V(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que $t \mapsto V(t)x$ é contínua em $[0, \infty)$ para todo $x \in X$ e*

$$V(t)x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}BV(s)xds, \quad x \in X. \tag{7.1}$$

Prova: Faça

$$V_0(t) = e^{At}$$

e defina $V_n(t)$ indutivamente por

$$V_{n+1}(t)x = \int_0^t e^{A(t-s)}BV_n(s)xds, \quad x \in X, \ n \geq 0.$$

É claro da definição acima que $t \mapsto V_n(t)x$ é contínua para $x \in X$, $t \geq 0$, $n \geq 0$. A seguir provamos por indução que,

$$\|V_n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}\frac{M^n\|B\|^n_{\mathcal{L}(X)}t^n}{n!}.$$

De fato, isto vale para $n = 0$. Suponha que vale para n. Então temos que

$$\begin{aligned}\|V_{n+1}(t)x\|_X &\leq \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|B\|_{\mathcal{L}(X)}\frac{M^n\|B\|^n_{\mathcal{L}(X)}s^n}{n!}\|x\|_X ds\\ &= Me^{\omega t}\frac{M^{n+1}\|B\|^{n+1}_{\mathcal{L}(X)}t^{n+1}}{(n+1)!}\|x\|_X\end{aligned}$$

e portanto a desigualdade vale para qualquer $n > 0$. Definindo

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t),$$

segue que a série converge uniformemente em intervalos limitados na topologia uniforme de operadores. Portanto $t \mapsto V(t)x$ é contínua para cada $x \in X$ e além disso (7.1) está satisfeita. Isto conclui a prova da existência. Para provar a unicidade seja $\{U(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que $t \mapsto U(t)x$ é contínua para todo $x \in X$ e

$$U(t)x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}BU(s)xds, \quad x \in X. \tag{7.2}$$

Subtraindo as expressões (7.1) e (7.2) e estimando as diferenças obtemos

$$\|V(t)x - U(t)x\|_X = \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|B\|_{\mathcal{L}(X)}\|V(s)x - U(s)x\|_X ds, \quad x \in X.$$

o que pela desigualdade de Gronwal implica que $\|V(t)x - U(t)x\|_X = 0$, $t \geq 0$ e portanto $V(t) = U(t)$.$\square$

Segue imediatamente do teorema anterior que

$$e^{(A+B)t} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t)$$

onde $S_0(t) = e^{At}$,

$$S_{n+1}(t)x = \int_0^t e^{A(t-s)}BS_n(s)xds, \quad x \in X,$$

e a convergência da série é na topologia de operadores uniformemente para t em intervalos limitados de $\mathbb{R}$.

Para a diferença entre e^{At} e $e^{(A+B)t}$ temos:

Corolário 7.1.1. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo que satisfaz $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, então*

$$\|e^{(A+B)t} - e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}(e^{M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}t} - 1).$$

O teorema a seguir mostra que sob certas condições a soma, $A+B$, de dois geradores de semigrupos fortemente contínuos que comutam, A e B, resulta em um gerador de um semigrupo fortemente contínuo $e^{-(A+B)t}$ que satisfaz $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

Teorema 7.1.2. *Suponha que A e B são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores $\{e^{At} : t \geq 0\}$ e $\{e^{Bt} : t \geq 0\}$ tais que, para algum $M > 0$, $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ e $\|e^{Bt}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$. Suponha também que A e B comutam, que o operador $A + B : D(A) \cap D(B) \subset X \to X$ é fechado e que $\lambda \in \rho(A+B)$ para algum $\lambda > 0$. Então $A+B$ gera um semigrupo fortemente contínuo de operadores tal que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ e que $\|e^{(A+B)t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^2$.*

Prova: Por um momento vamos mudar a norma do espaço de Banach X de forma que A gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Seja $A_\lambda = \lambda A(\lambda + A)^{-1}$ e $B_\lambda = \lambda B(\lambda + B)^{-1}$. Então $\|e^{A_\lambda t}\| \leq 1$ para todo $\lambda > 0$ e como $e^{A_\lambda t}x \to e^{At}x$ e $e^{B_\lambda s}e \to e^{Bs}x$ para todo $x \in X$, $s, t \geq 0$, temos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{A_\lambda t + B_\lambda s}x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{A_\lambda t}e^{B_\lambda s}x = e^{At}e^{Bs}x.$$

É claro que isto continua verdadeiro se mudamos a norma do espaço para a norma original. Ainda, por um argumento similar, temos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{B_\lambda t + A_\lambda s}x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{B_\lambda s}e^{A_\lambda s}x = e^{Bs}e^{At}x,$$

mostrando que $e^{At}e^{Bs} = e^{Bs}e^{At}$.

Em seguida vamos motrar que $T(t) = e^{At}e^{Bt}$ é um semigrupo fortemente contínuo com gerador $A + B$. Primeiro observe que a continuidade forte em $t = 0$ e a limitação são óbvias e de

$$T(t+s) = e^{A(t+s)}e^{B(t+s)} = e^{At}e^{As}e^{Bt}e^{Bs} = e^{At}e^{Bt}e^{As}e^{Bs} = T(t)T(s)$$

temos que $T(t)$ é um semigrupo. Resta mostrar que $A + B$ é o gerador de $T(t)$.

Se $x \in D(A) \cap D(B) = D(A+B)$, então

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}e^{tB_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}(e^{A_\lambda t}e^{B_\lambda t}x - e^{B_\lambda t}x + e^{B_\lambda t}x - x) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{A_\lambda s}e^{B_\lambda t}(A_\lambda x) + \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{B_\lambda s}(B_\lambda x)ds \\ &= \int_0^t e^{As}e^{Bt}Axds + \int_0^t T(s)Bxds. \end{aligned}$$

Agora

$$\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{1}{t}\int_0^t e^{As}e^{Bt}Axds + \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Bxds \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -(A+B)x,$$

para todo $x \in D(A)\cap D(B) = D(A+B)$. Portanto o gerador C de $T(t)$ deve ser uma extensão de $A+B$. Seja λ um número real no resolvente de $A+B$ e no resolvente do gerador de $T(t)$. Então

$$X = (\lambda - (A+B))D(A+B) = (\lambda - C)D(C),$$

e $A+B=C$ completanto a prova.$\square$

Corolário 7.1.2. *Suponha que A e B são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores $\{e^{At} : t \geq 0\}$ e $\{e^{Bt} : t \geq 0\}$ tais que, para algum $M > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\alpha t}$ e $\|e^{Bt}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$. Suponha também que A e B comutam, que o operador $A+B$ é fechado, densamente definido com domínio $D(A)\cap D(B)$ e que $\lambda \in \rho(A+B)$ para algum $\lambda > 0$. Então $A+B$ gera um semigrupo fortemente contínuo de operadores tal que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ e que $\|e^{(A+B)t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^2e^{(\alpha+\beta)t}$.*

Prova: Basta aplicar o Teorema 7.1.2 aos operadores $A+\alpha I$ e a $B+\beta I$.$\square$

7.2 Perturbação de operadores setoriais

Teorema 7.2.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $-A$ é setorial. Então A gera um semigrupo analítico. Seja $B : D(B) \subset X \to X$, $D(B) \supset D(A)$, um* *operador linear tal que*

$$\|Bx\|_X \leq \epsilon \|Ax\|_X + K\|x\|_X, \quad \forall x \in D(A),$$

para algum $\epsilon > 0$ e alguma constante K. Então, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 \leq \epsilon \leq \delta$, o operador $-(A+B)$ é setorial, $D(A+B) = D(A)$, e $\{e^{(A+B)t} : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico.

Prova: Sabemos que existem números reais a, φ, C e φ com $\pi/2 < \varphi \leq \pi$, tais que para $|\arg(\lambda - a)| < \varphi$, λ está no resolvente de A e $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C/|\lambda - a|$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon(C+1) < 1$ e θ tal que $\epsilon(C+1) < \theta < 1$. Para tal λ, $B(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e

$$\begin{aligned}\|B(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \epsilon \|A(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} + K\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \epsilon \left(1 + \frac{C|\lambda|}{|\lambda - a|}\right) + \frac{KC}{|\lambda - a|}\end{aligned}$$

que é menor ou igual a θ para $|\lambda - a| \geq R$, para algum R suficientemente grande. Segue que $|\arg(\lambda - a)| < \varphi$, $|\lambda - a| \geq R$ implica $\lambda \in \rho(A+B)$ e

$$\|(\lambda - (A+B))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C/(1-\theta)}{|\lambda - a|}.$$

Disto, é facil obter que $-(A+B)$ é setorial.$\square$

Corolário 7.2.1. *Seja $-A$ um operador setorial e $B : D(B) \subset X \to X$ um operador fechado, $D(B) \supset D(A^\alpha)$, para algum $0 < \alpha < 1$. Então $-(A+B)$ é setorial.*

Prova: Como $D(B) \supset D(A^\alpha)$ temos que $D(B) \supset D(A)$. Segue do Corolário 4.3.1 que

$$\|Bx\|_X \leq C(\mu^\alpha \|x\|_X + \mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X), \quad x \in D(A), \ \mu > 0.$$

Escolhendo $\mu > 0$ grande o resultado segue do Teorema 7.2.1.$\square$

Fim da Vigésima Nona Aula ↑

Início da Trigésima Aula ↓

7.3 Teoremas de representação

No que se segue apresentamos teoremas que permitam obter informações sobre o semigrupo gerado pela soma $-(A+B)$ de dois geradores, $-A$ e $-B$, de semigrupos fortemente contínuos. Estes resultados serão de grande valia para transferir propriedades dos semigrupos gerados por $-A$ e $-B$ para o semigrupo gerado por $-(A+B)$. Estes resultados são conseqüência dos resultados de Trotter and Chernoff em [18, 4] e a apresentação abaixo segue [16].

O resultado acima está intimamente relacionado aos seguintes resultados:

Proposição 7.3.1. *Suponha que $-A$ e $-B$ são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares, $D(A)\cap D(B)$ é denso em X e*

$$\|(e^{-At}e^{-Bt})^n\| \leq Me^{\omega nt}, n = 1, 2, \ldots,$$

para algum $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$. Se para algum λ com $Re\lambda > \omega$ a imagem de $\lambda I + A + B$ é densa em X, então o fecho de $-(A+B)$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $\{T(t); t \geq 0$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$. Além disso,

$$T(t)x = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{-A\left(\frac{t}{n}\right)}e^{-B\left(\frac{t}{n}\right)}\right)^n x,\ x \in X,$$

uniformemente em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^+$.

Proposição 7.3.2. *Se $-A$, $-B$, $-(A+B)$ geram semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares, $\|e^{-(A+B)t}\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, e*

$$\|\left[(I+tA)^{-1}(I+tB)^{-1}\right]^n\| \leq Me^{\omega nt},\ n = 1, 2, \ldots,$$

então

$$e^{-(A+B)t}x = \lim_{n\to+\infty}\left[(I+\frac{t}{n}A)^{-1}(I+\frac{t}{n}B)^{-1}\right]^{n}x, x\in X.$$

Para uma prova das proposições acima veja [16], §3.5.

Fim da Trigésima Aula ↑

7.4 Segunda Prova

2ª Prova de SMA 5878 - Análise Funcional II

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Nome:____

07.07.2011

Questões	**Notas**
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
05.ª	
Total	

1.ª Questão Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador alto adjunto que satisfaz $\langle Au, u\rangle \geq \delta\langle u, u\rangle$ para todo $u \in D(A)$ e para algum $\delta > 0$. Para $\theta \in [0, 1]$, considere o operador

$$\mathcal{A}_{(\theta)} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & 2\eta A^{\theta} \end{bmatrix} : D(\mathcal{A}_{(\theta)}) \subset X^{\frac{1}{2}} \times X \to X^{\frac{1}{2}} \times X \tag{7.3}$$

definido por

$$\mathcal{A}_{(\theta)} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi \\ A^{\theta}(A^{1-\theta}\varphi + 2\eta\psi) \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

para

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(\theta)}) = \{ \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}};\ A^{1-\theta}\varphi + 2\eta\psi \in X^{\theta} \},$$

onde X^{α} denota os espaços de potência fracionacias associados ao operador A.

Mostre que, para cada $\theta \in [0, 1]$ temos que:

(i) $\rho(-A) \supset \mathbb{C}\backslash(-\infty, -\delta]$ (use a imagem numérica).

(ii) $-A$ é dissipativo,

(iii) A é setorial e

(iv) $-A$ gera um semigrupo analítico $\{e^{-At} : t \geq 0\}$ tal que o operador e^{-At} é auto-adjunto para cada $t \in [0, \infty)$ e existe $M_\delta \geq 1$ tal que $\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M_\delta e^{-\delta t}$.

(v) Se A tem resolvente compacto, $\sigma(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ e P_n é a projeção espectral associada ao conjunto espectral $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, mostre que

$$e^{-At} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} P_n.$$

(vi) $\mathcal{A}_{(\theta)}$ é fechado,

(vii) $-\mathcal{A}_{(\theta)}$ é dissipativo,

(viii) $0 \in \rho(\mathcal{A}_{(\theta)})$,

(ix) Se A tem resolvente compacto, então $\mathcal{A}_{(\theta)}$ tem resolvente compacto se $\theta \in [0, 1)$.

(x) $-\mathcal{A}_{(\theta)}$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{\mathrm{e}^{-\mathcal{A}_{(\theta)} t} : X^{\frac{1}{2}} \times X \to X^{\frac{1}{2}} \times X : t \geq 0\}$ que satisfaz $\|\mathrm{e}^{-\mathcal{A}_{(\theta)} t}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq 1$, $t \geq 0$.

(xi) Considere o operador $A : D(A) \subset H \to H$ definido por $D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$, $Au = -u_{xx}$. Explique como os resultados dos ítens precedentes mostram que os problemas de valor inicial e fronteira abaixo possuem uma única solução ($\eta > 0$)

$$(1) \begin{cases} u_{tt} + 2\eta u_{xxt} = u_{xx}, \ t > 0, \ x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in H_0^1(0, \pi), \ u_t(\cdot, 0) = v_0(\cdot) \in L^2(0, \pi) \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_{tt} + 2\eta u_t = u_{xx},\ t > 0,\ x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in H_0^1(0, \pi),\ u_t(\cdot, 0) = v_0(\cdot) \in L^2(0, \pi) \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} u_t = iu_{xx},\ t > 0,\ x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in L^2(0, \pi) \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} u_t = u_{xx},\ t > 0,\ x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in L^2(0, \pi) \end{cases}$$

Observação: (1) é conhecido como o problema da onda fortemente amortecida, (2) é conhecido como o problema de ondas amortecida (se $\eta = 0$ simplesmente o problema de ondas), (3) é conhecido como o problema de Schrödinger e (4) é conhecido como o problema do calor.

$\boxed{\textbf{2.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

1. Defina $S(A) = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ e $\omega(A) = \inf\{a \in \mathbb{R} : e^{-at}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} : t \geq 0$ é limitada$\}$ e mostre que $S(A) \leq \omega(A)$.

2. Seja $X = \ell^2(\mathbb{C})$ e $L_n = inI_n + A_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ onde $A_n = (a^n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ é a matriz que tem todas as entradas nulas exceto $a^n_{p,p+1} = 1$ para $1 \leq p \leq n-1$. Seja $A : D(A) \subset \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ definido por $A = \mathrm{diag}(L_1, L_2, L_3, \cdots)$ e $D(A) = \{x \in X : Ax \in X\}$. Mostre que A gera um semigrupo fortemente contínuo e que $S(A) = 0$ enquanto que $\omega(A) = 1$.

$\boxed{\textbf{3.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja A um operador de tipo positivo; isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que $(1+s)\|(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ for all $s \in [0,\infty)$. Mostre que existe $r > 0$ e $\phi > 0$ tal que $\Sigma_{r,\phi}\{\lambda + \mu \in \mathbb{C} : |\mathrm{arg}\lambda| \leq \phi,\ |\mu| \leq r\} \subset \rho(-A)$. Seja Γ o contorno de $\Sigma_{r,\phi}$ orientado no sentido da parte imaginária crescente. Sabemos que, para $\alpha < 0$,

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

Mostre que, para $\alpha \in (0,1)$,

$$A^{-\alpha} = \frac{\mathrm{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(s + A)^{-1} ds.$$

Use isto para provar que, para $0 < \alpha < 1$,

$$\|A^\alpha x\| \leq M\|Ax\|^\alpha\|x\|^{1-\alpha},\ \forall x \in D(A).$$

Se A e $\mathcal{A}_\theta$ são os operadores definidos na 1ª Questão, mostre que

$$\|u_x\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|Au\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,\pi)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,\pi)}$$

e consequentemente se $B : H^1_0(0,\pi) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ é definido por $Bu = u_x$ então $A+B$ gera um semigrupo analítico e, se $\mathcal{B} : X^{\frac{1}{2}}\times X \to X^{\frac{1}{2}}\times X$, $\mathcal{B}\begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ B & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix}$ então $\mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$ gera um semigrupo fortemente contínuo.

$\boxed{\textbf{4.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{At} : t \geq 0\}$ e $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ tais que $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$. Mostre que se B é limitado, então $A + B$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{(A+B)t} : t \geq 0\}$ e que $\|e^{(A+B)t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\omega+M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}t}$.

$\boxed{\textbf{5.}^a\ \textbf{Questão}}$ **[Mean Ergodic Theorem]** Seja X um espaço de Banach, $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo fortemente contínuo de contrações e $A : D(A) \subset X \to X$ o seu gerador. Mostre que

- Para todo $u \in N(A)$ e $v \in \overline{\mathrm{Im}(A)}$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)(u+v)ds = u$$

Sugestão: Note que se $u \in N(A)$ então $T(t)u = u$ para todo $t \geq 0$

- Mostre que o subsepaço F dos pontos u de X para os quais o limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)u\,ds \ (=: Pu)$$

existe é fechado.

- Para $u \in F$ defina Pu pelo limite acima. Mostre que $P \in \mathcal{L}(F, X)$, $T(t)F \subset F$ para todo $t \geq 0$, que $PT(t)u = Pu$ para todo $u \in F$ e que $P^2u = Pu$ para todo $u \in F$.

- Conclua que P é a projeção de F sobre $N(A)$ para a qual $P(\overline{\mathrm{Im}(A)}) = \{0\}$.

- Mostre que $N(A) \oplus \overline{\mathrm{Im}(A)}$ é fechado e que para todo $b \geq 0$ e $u \in N(A) \oplus \overline{\mathrm{Im}(A)}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_b^t T(s)u\,ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)u\,ds$$

Apêndice A

Redes e Compactos

A.1 Redes

A propriedade de Bolzano-Weierstrass estabelece que, um espaço métrico X é compacto se, e somente se, toda seqüência em X possui uma subseqüência convergente. Esta propriedade tem um análogo em espaços topológicos gerais e, para introduzí-la, utilizaremos a noção de **redes** em substituição à noção de **seqüências**. A exposição apresentada a seguir está baseada em [6, 14].

Definição A.1.1. *Um conjunto A equipado com uma relação binária $\preceq_A$ é chamado um* **conjunto dirigido** *se*

- *$a \preceq_A a$ para todo $a \in X$,*
- *se $a \preceq_A b$ e $b \preceq_A c$, então $a \preceq_A c$,*
- *para cada $a, b \in X$ existe $c \in X$ com $a \preceq_A c$ e $b \preceq_A c$.*

Uma **rede** *em um conjunto X é uma aplicação $A \ni a \mapsto x_a \in X$ (denotada por $\{x_a\}_{a\in A}$) do conjunto dirigido A em X. Uma sub-rede de uma rede $\{x_a\}_{a\in A}$ é uma rede $\{y_r\}_{r\in R}$ juntamente com uma aplicação $R \ni r \mapsto a_r \in A$ tal que*

- *para dada* $a_0 \in A$ *existe* $r_0 \in R$ *tal que* $a_0 \preceq_A a_r$ *sempre que* $r_0 \preceq_R r$.

- $y_r = x_{a_r}$.

Seja X um espaço topológico e $U \subset X$. Diremos que uma rede $\{x_a\}_{a\in A}$ é **absorvida** por U se existe $a_0 \in A$ tal que $x_a \in U$ sempre que $a_0 \preceq_A a$ e que $\{x_a\}_{a\in A}$ visita U **frequentemente** se, para todo $a \in A$ existe $b_a \in A$ com $a \preceq_A b_a$ tal que $x_{b_a} \in U$. Diremos que a rede $\{x_a\}_{a\in A}$ **converge** para x se toda vizinhança de x absorve $\{x_a\}_{a\in A}$ (é claro que se uma rede $\{x_a\}_{a\in A}$ converge para x, então qualquer sub-rede de $\{x_a\}_{a\in A}$ também converge para x) e que um ponto $x \in X$ é um **ponto limite** de $\{x_a\}_{a\in A}$ se toda vizinhança de x é visitada frequentemente por $\{x_a\}_{a\in A}$.

Observação A.1.1. *É claro que* $\mathbb{N}$ *é um conjunto dirigido e que uma seqüência é uma rede. Também é claro que se* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência, qualquer subseqüência* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sub-rede de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e que existem sub-redes* $\{x_b\}_{b\in B}$ *de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *que não são subseqüências de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposição A.1.1. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos,* $E \subset X$, $x \in X$, $\{x_a\}_{a\in A}$ *uma rede em* X *e* $f : X \to Y$ *uma função. Então,*

1. x *é um ponto de acumulação de* E *se, e somente se, existe uma rede em* $E\backslash\{x\}$ *que converge para* x.

2. $x \in \overline{E}$ *se, e somente se, existe uma rede em* E *que converge para* x.

3. f *é contínua em* x *se, e somente se,* $\{f(x_a)\}_{a\in A}$ *converge para* $f(x)$ *sempre que* $\{x_a\}_{a\in A}$ *converge para* x

4. x *é um ponto limite de* $\{x_a\}_{a\in A}$ *se, e somente se,* $\{x_a\}_{a\in A}$ *tem uma sub-rede que converge para* x.

Prova: 1) Se x é um ponto de acumulação de E, seja $\mathscr{N}$ o conjunto das vizinhanças de x com $\preceq_{\mathscr{N}}$ dado por $\supset$. Para cada $U \in \mathscr{N}$ escolha $x_U \in (U\backslash\{x\}) \cap E$. Então $\{x_U\}_{U\in\mathscr{N}}$ converge para x. Reciprocamente, se $\{x_a\}_{a\in A}$ é uma rede em E que converge para x e U é uma vizinhança de x, então $U\backslash\{x\}$ contém x_b para algum $b \in A$ e x é um ponto de acumulação de E

2) Se $\{x_a\}_{a\in A}$ é uma rede em E que converge para x, toda vizinhança U de x contém um ponto x_b para algum $b \in A$ e $x \in \overline{E}$. Reciprocamente, se $x \in \overline{E}$, cada vizinhança U de x contém um ponto x_U de E e a rede $\{x_U\}_{U\in\mathscr{N}}$ (onde $\mathscr{N}$ é o conjunto dirigido do ítem 1)) converge para x.

3) Se f é contínua em x e V é uma vizinhança de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x. Logo se $\{x_a\}_{a\in A}$ converge para x, $\{x_a\}_{a\in A}$ é absorvida por $f^{-1}(V)$ e, consequentemente, $\{f(x_a)\}_{a\in A}$ é absorvida por V e $\{f(x_a)\}_{a\in A}$ converge para $f(x)$.

Reciprocamente, se f não é contínua em x existe uma vizinhança V de $f(x)$ tal que $f^{-1}(V)$ não é uma vizinhança de x (ou seja, $x \in \overline{(f^{-1}(V))^c}$). Do ítem 2), existe uma rede $\{x_a\}_{a\in A}$ em $(f^{-1}(V))^c$ que converge para x e $\{f(x_a)\}_{a\in A}$ é uma rede em V^c ($\{f(x_a)\}_{a\in A}$ não converge para $f(x)$).

4) Se $\{x_{a_r}\}_{r\in R}$ é uma sub-rede de $\{x_a\}_{a\in A}$ que converge para x e U é uma vizinhança de x, escolha $r_1 \in R$ tal que $x_{a_r} \in U$ sempre que $r_1 \preceq_R r$. Ainda, dado $a \in A$, escolha $r_2 \in R$ tal que $a \preceq_A a_r$ sempre que $r_2 \preceq_R r$. Então existe $r \in R$ tal que $r_1 \preceq_R r$ e $r_1 \preceq_R r$. Assim, $a \preceq a_r$ e $x_{a_r} \in U$, mostrando que $\{x_a\}_{a\in A}$ vistitita U frequentemente.

Reciprocamente, se x é um ponto limite de $\{x_a\}_{a\in A}$, seja $\mathscr{N}$ como no ítem 1) e faça $Z = \mathscr{N} \times A$ um conjunto dirigido fazendo $(U, a) \preceq_Z (V, b)$ se, e somente se, $U \preceq_{\mathscr{N}} V$ e $a \preceq_A b$. Para cada $z = (U, c) \in Z$ podemos escolher $a_z \in A$ tal que $c \preceq_A a_z$ e $x_{a_z} \in U$. Então, se $z \preceq z' = (U', c')$ temos que

$c \preceq_A c' \preceq_A a_{z'}$ e $x_{a_{z'}} \in U' \subset U$ $(U \preceq_{\mathcal{N}} U')$, portanto segue que $\{x_{a_z}\}_{z\in Z}$ é uma sub-rede de $\{x_a\}_{a\in A}$ que converge para x.$\square$

A.2 Espaços topológicos compactos

Definição A.2.1. *Seja X um conjunto. Uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X é uma topologia para X se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

- *X e $\varnothing$ pertencem a $\mathcal{T}$,*
- *Se $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, então $\displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$,*
- *Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ e $\mathcal{F}$ é finito, então $\displaystyle\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \in \mathcal{T}$.*

Se X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia para X, o par $(X, \mathcal{T})$ é chamado espaço topológico. Neste caso, chamaremos de abertos os elementos de $\mathcal{T}$ e de fechados os conjuntos cujo complementar é aberto.

Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, então

- *Se $Y \subset X$ o fecho $\overline{Y}$ de Y é a interseçao de todos os fechados de X que contém Y. É fácil ver que $\overline{Y}$ é fechado.*
- *Se $Y \subset X$, diremos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ é uma cobertura aberta de Y se $Y \subset \displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ e se $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ é uma cobertura aberta de Y, diremos que $\mathcal{V}$ é uma sub-cobertura aberta da cobertura aberta $\mathcal{U}$ de Y.*
- *Diremos que $Y \subset X$ é compacto se toda cobertura aberta de Y tiver uma sub-cobertura finita. No caso particular em que $Y = X$ diremos que X é um espaço topológico compacto.*
- *Se $Y \subset X$, diremos que Y é pré-compacto se $\overline{Y}$ é compacto.*

- *Uma família $\{F_a\}_{a\in A}$ de subconjuntos fechados de X tem a Propriedade da Interseção Finita (PIF) se para cada subconjunto finito B de B temos que $\bigcap\limits_{b\in B} F_b \neq \varnothing$.*

Proposição A.2.1. *Sejam X, Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma função e F um subconjunto de X, então*

1. *X é compacto se, e somente se, para toda família $\{F_a\}_{a\in A}$ de subconjuntos fechados com a propriedade da interseção finita, $\bigcap\limits_{a\in A} F_a \neq \varnothing$.*
2. *Se X é compacto e F é fechado, então F é compacto.*
3. *Se X é de Hausdorff, F é um subconjunto compacto de X e $x \in X\backslash F$, existem abertos disjuntos U, V tais que $x \in U$ e $F \subset V$.*
4. *Se X é de Hausdorff, todo subconjunto compacto de X é fechado.*
5. *Se X é de Hausdorff e compacto, então X é normal.*
6. *Se X é compacto e $f : X \to Y$ é contínua, então $f(X)$ é um subconjunto compacto de Y.*
7. *Se X é compacto, então $C(X, \mathbb{K}) = BC(X, \mathbb{K})$.*
8. *Se X é compacto, Y é de Hausdorff e $f : X \to Y$ é uma bijeção contínua, então f é um homeomorfismo.*

Prova: (*1.*) Seja $U_a = (F_a)^c$. Note que $\{F_a\}_{a\in A}$ tem a propriedade da interseção finita se, e somente se, X não pode ser coberto por um número finito de elementos de $\{U_a\}_{a\in A}$ e $\bigcup\limits_{a\in A} U_a \neq X$ se, e somente se, $\bigcap\limits_{a\in A} F_a \neq \varnothing$. A prova do resultado agora é imediata.

(*2.*) Se $\{U_a\}_{a\in A}$ é uma cobertura aberta de F, entãao $\{U_a\}_{a\in A}\cup\{F^c\}$ é uma cobertura aberta de X e portanto possui uma sub-cobertura finita. Descartanto F^c temos uma sub-cobertura finita de $\{U_a\}_{a\in A}$ para F.

(*3.*) Para cada $y\in F$ seja U_y e V_y abertos disjuntos tais que $x\in U_y$ e $y\in V_y$. De *2.* F é compacto. Sejam $y_1,\cdots,y_n$ tais que $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$ cobre F, $U=\bigcap\limits_{i=1}^n U_{y_i}$ e $V=\bigcup\limits_{i=1}^n V_{y_i}$. É fácil ver que U e V são abertos disjuntos com $x\in U$ e $F\subset V$.

(*4.*) Se X é de Hausdorff, segue de *3.* que F^c é aberto (consequentemente F é fechado) sempre que F é compacto.

(*5.*) Seja X é de Hausdorff e compacto e F,G dois conjuntos fechados e disjuntos de X. De *3.*, para cada $g\in G$ existem abertos disjuntos V_g e U_g com $g\in V_g$ e $F\subset U_g$. De *2.* G é compacto. Sejam $g_1,\cdots,g_n$ tais que $\{V_{g_i}\}_{i=1}^n$ cobre G, $U=\bigcap\limits_{i=1}^n U_{g_i}$ e $V=\bigcup\limits_{i=1}^n V_{g_i}$. É claro que U e V são abertos disjuntos com $F\subset U$ e $G\subset V$. Segue que X é normal.

(*6.*) Dada uma cobertura aberta $\{U_a\}_{a\in A}$ de $f(X)$ temos que $\{f^{-1}(U_a)\}_{a\in A}$ é uma cobertura aberta de X e portanto, possui uma sub-cobertura finita $\{f^{-1}(U_{a_i})\}_{i=1}^n$. Segue que $\{U_{a_i}\}_{i=1}^n$ é uma sub-cobertura finita de $f(X)$.

(*7.*) Dada $f\in C(X,\mathbb{K})$, basta tomar uma cobertura aberta de $\mathbb{K}$ por conjuntos limitados para concluir que f é limitada.

(*8.*) Se $F\subset X$ é fechado temos de *2.* que F é compacto, de *6.* que $f(F)$ é compacto e, de *4.* que $f(F)$ é fechado. Assim, f leva fechados em fechados ou, equivalentemente, f leva abertos em abertos e $f^{-1}:Y\to X$ é contínua. $\square$

Teorema A.2.1. *Se X é um espaço topólogico, as seguintes afirmativas são equivalente:*

1. *X é compacto.*

2. Toda rede em X tem um ponto limite.

3. Toda rede em X tem uma sub-rede convergente.

Prova: A equivalência entre *2.* e *3.* segue da Proposição A.1.1, ítem *4.*

Se X é compacto e $\{x_a\}_{a\in A}$ é uma rede em X, seja $E_a = \{x_b : a \preceq_A b\}$. Como para quaisquer $a, b \in A$ existe $c \in A$ tal que $a \preceq_A c$ e $b \preceq_A c$, a família $\{E_a\}_{a\in A}$ tem a PIF. Segue do ítem *1.* da Proposição A.2.1 que $L := \bigcap_{a\in A} \overline{E_a} \neq \varnothing$. Se $x \in L$ e U é uma vizinhança de x, U intersepta E_a para cada $a \in A$ e isto significa que $\{x_a\}_{a\in A}$ visita U frequentemente. Consequentemente, x é um ponto limite de $\{x_a\}_{a\in A}$.

Por outro lado, se X não é compacto, seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ uma cobertura aberta de X que não possui uma sub-cobertura finita. Seja $\mathscr{A} \subset 2^{\mathcal{U}}$ a coleção dos conjuntos finitos de $\mathcal{U}$ dirigida pela inclusão e para cada $A \in \mathscr{A}$ seja x_A um ponto em $\left(\bigcup_{U\in A} U\right)^c$. Então $\{x_A\}_{A\in\mathscr{A}}$ é uma rede que não possui ponto limite. De fato, se $x \in X$ escolha $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$. Se $A \in \mathscr{A}$ e $\{U\} \preceq A$, então $x_A \notin U$, e x não é um ponto limite de $\{x_A\}_{A\in\mathscr{A}}$.□

Um espaço topológico é seqüencialmente compacto se, e somente se, toda seqüência possui subseqüência convergente. Existem espaços topológicos compactos que não são seqüencialmente compactos; isto é, espaços topológicos onde existem seqüências sem subseqüência convergente. Veja o exemplo a seguir extraído de [17].

Exemplo A.2.1. *Considere o conjunto S de todos os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Em cada $s \in S$ escolha dois subconjuntos disjuntos e infinitos a_s e b_s cuja união é s. Considere o espaço topológico $X_s = \{a_s, b_s\}$ com a topologia discreta (a_s e b_s são pontos isolados de X_s). É claro que X_s é compacto.*

Se $Y = \Pi_{s\in S} X_s$ com a topologia produto, então Y é um espaço topológico compacto.

Em Y escolhemos a seqüência $\mathbb{N} \ni n \mapsto x(n) \in Y$ definida por

$$[x(n)]_s = \begin{cases} a_s, & \textit{se o enésimo elemento de } s \textit{ pertence a } a_s \\ b_s, & \textit{se o enésimo elemento de } s \textit{ pertence a } b_s \end{cases}$$

Dado $t \in S$, a subseqüência $t \ni n \mapsto x(n) \in Y$ de $\mathbb{N} \ni n \mapsto x(n) \in Y$ é tal que $t \ni n \mapsto [x(n)]_t \in X_t$ assume os valores a_t e b_t para $n \in t$ arbitrariamente grandes (a medida que n percorre t passa por a_t e b_t infinitas vezes) e portanto não converge. Segue que $t \ni n \mapsto x(n) \in Y$ não converge e que $\mathbb{N} \ni n \mapsto x(n) \in Y$ não possui subseqüência convergente.

Exercício A.2.1. *Seja $X = \ell^\infty(\mathbb{K})$. Construa uma seqüência $\{x_n^*\}$ em $\overline{B}_1^{X^*}(0)$ que não tem subseqüência convergente.*

Observe ainda que, um espaço topológico primeiro contável e compacto é seqüencialmente compacto mas não vale a volta (para um contra-exemplo veja [14] (page 163, problem E-(e))).

Apêndice B

Compacidade Fraca

Neste apêndice apresentamos as provas dos Teorema de Eberlein-Šmulian e Krein-Šmulian dadas em [20] e [21].

O seguinte resultado básico (veja a demonstração em [3, Teorema 3.7]) é utilizado na demonstração de alguns resultados deste capítulo.

Teorema B.0.1. *Se K é um subconjunto convexo de um espaço de Banach X, então o fecho de K nas topologias forte e fraca coincidem.*

B.1 O Teorema de Eberlein-Šmulian

Se substituímos redes por seqüências no enunciado do Teorema A.2.1 ele deixa de ser verdadeiro, no entanto, ele ainda é verdadeiro para subconjuntos de um espaço de Banach com a topologia fraca.

Teorema B.1.1 (Eberlein-Šmulian)**.** *Seja W um subconjunto de um espaço de Banach X. São equivalentes:*

(A) O fecho de W na topologia fraca é compacto na topologia fraca.

(B) Toda seqüência de elementos de W possui uma subseqüência fracamente convergente para algum elemento de X.

(C) Toda seqüência de elementos de W possui um ponto limite em X.

A prova do teorema será feita mostrando que $(A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C) \Rightarrow (A)$. A implicação $(B) \Rightarrow (C)$ é imediata. Faremos primeiramente a prova de $(A) \Rightarrow (B)$ mas, antes disso, vamos apresentar alguns resultados preliminares.

Recorde que um subconjunto A^* de X^* é total se o único vetor $x \in X$ tal que $a^*(x) = 0$ para todo $a^* \in A^*$ é o vetor nulo.

Lema B.1.1. *Se X é um espaço de Banach separável, então X^* tem um subconjunto total enumerável $A^* = \{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ e $\|x\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, a_n^*\rangle_{X,X^*}|$.*

Prova: Seja $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ uma seqüência de vetores unitários que é densa na superfície da bola unitária de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a_n^* tal que $\langle a_n, a_n^*\rangle_{X,X^*} = \|a_n\|_X = \|a_n^*\|_{X^*} = 1$. Mostremos que $A^* = \{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ é total.

Se $x \in X$, $\|x\|_X = 1$ e $a_n^*(x) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, então dado que

$$1 = \lim_{k\to\infty} \langle a_{n_k}, a_{n_k}^*\rangle_{X,X^*} = \langle x, a_{n_k}^*\rangle_{X,X^*}$$

e o último termo do lado direito da expressão acima é zero, temos uma contradição. Assim A^* é total.

Note ainda que, para qualquer que seja $x \in X$ com $\|x\|_X = 1$, existe uma subseqüência $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ e

$$\begin{aligned} 1 = \|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*}=1} |\langle x, x^*\rangle_{X,X^*}| &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, a_n^*\rangle_{X,X^*}| \\ = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle a_{n_k}, a_n^*\rangle_{X,X^*}| &\geq \lim_{k\to\infty} |\langle a_{n_k}, a_{n_k}^*\rangle_{X,X^*}| = 1 \end{aligned}$$

e consequentemente, para todo $x \in X$,

$$\|x\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, a_n^*\rangle_{X,X^*}|. \square$$

Lema B.1.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ tal que X^* contém um conjunto total enumerável. Então a topologia fraca em um subconjunto fracamente compacto de X é metrizável.*

Prova: Seja $A^* = \{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto total de X^* com $\|a_n^*\|_{X^*} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e defina $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ a métrica definida por $d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |\langle x - y, a_n^* \rangle_{X,X^*}|$. Se $W \subset X$ é fracamente compacto, note que $\langle A, x^* \rangle_{X,X^*}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{K}$ e, do Princípio da Limitação Uniforme, W é um subconjunto limitado de X ($\|W\|_X := \sup_{w \in W} \|w\|_X < \infty$). Se W_w e W_d denotam o conjunto W com as topologias fraca e da métrica d, respectivamente, seja $I : W_w \to W_d$ o operador identidade. Se $I : W_w \to W_d$ é contínuo ele é um homeomorfismo (já que W é fracamente compacto) e o resultado segue. Resta mostrar $I : W_w \to W_d$ é contínuo. De fato, dado $\epsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x - y, a_n^* \rangle_{X,X^*}| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \|W\|_X < \frac{\epsilon}{2}$$

e $V = \{y \in W : |\langle x - y, a_n^* \rangle_{X,X^*}| < \frac{\epsilon}{2(N+1)}, n = 0, 1, \cdots, N\}$ é uma vizinhança de x em W_w tal que

$$d(x, y) < \epsilon, \forall y \in V,$$

completando a prova.$\square$

Corolário B.1.1 $((A) \Rightarrow (B))$**.** *Seja W um subconjunto de um espaço de Banach X. Se o fecho de W na topologia fraca é compacto na topologia fraca, então toda seqüência de elementos de W possui uma subseqüência fracamente convergente para algum elemento de X.*

Prova: Seja $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de W e $Y := \overline{\text{span}}\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ (fecho na topologia forte do subespaço gerado por $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$).

Como Y é também é fechado na topologia fraca (veja Teorema B.0.1), pelo Teorema de Hahn-Banach o conjunto $W \cap Y$ tem fecho compacto na topologia fraca do espaço de Banach Y. Como as propriedades (A) e (B) são equivalentes em espaços métricos, pelo Lema B.1.2 temos que $W \cap Y$ com a topologia fraca de Y satisfaz a propriedade (B) e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente, para um elemento $y \in Y$, na topologia fraca de Y e portanto na topologia fraca de X.$\square$

Lema B.1.3 $((C) \Rightarrow (A))$**.** *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto de X munido da topologia fraca. Se toda seqüência de elementos de W possui um ponto limite em X, então o fecho de W na topologia fraca é compacto na topologia fraca.*

Prova: Se toda seqüência de elementos de W possui um ponto limite em X, dado $x^* \in X^*$ o subconjunto $\langle W, x^*\rangle_{X,X^*}$ de $\mathbb{K}$ tem a propriedade de que toda seqüência de elementos de $\langle W, x^*\rangle_{X,X^*}$ possui um ponto limite em $\mathbb{K}$. Seque que $\langle W, x^*\rangle_{X,X^*}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{K}$ e, do Princípio da Limitação Uniforme, W é limitado. Seja $J : X \to X^**$ a aplicação canônica entre estes espaços. Como $J(W)$ é limitado, o fecho $w^*(J(W))$ de $J(W)$ na topologia fraca* de X^{**}, pelo Teorema de Alaoglu. Será suficiente mostrar que $w^*(J(W)) \subset J(X)$ pois, neste caso, como J é um homeomorfismo entre X com a topologia fraca e JX com a topologia fraca* de X^{**}, obtemos que W está contido no conjunto fracamente compacto $J^{-1}(w^*(JW))$ e portanto é pré-compacto na topologia fraca de X.

Completaremos a prova mostrando que $w^*(J(W)) \subset JX$. Seja $x^{**} \in w^*(JW)$ e $x_1^* \in X^*$, $\|x_1^*\|_{X^*} = 1$, $w_1 \in W$ com $|\langle x_1^*, x^{**} - Jw_1\rangle_{X^*,X^{**}}| < 1$.

Antes de prosseguir, seja F um subespaço finito dimensional de X^{**}. A esfera unitária de F é compacta e portanto possui uma $\frac{1}{4}$−rede $\{x_1^{**}, \cdots, x_n^{**}\}$.

Escolha x_p^* na esfera unitária de X^* tal que $\langle x_p^*, x_p^{**}\rangle_{X^{**},X^*} > \frac{3}{4}$, $1 \leq p \leq n$. Então, para qualquer $x^{**} \in F$ temos que

$$\max\{|\langle x_p^*, x^{**}\rangle_{X^*,X^{**}}| : 1 \leq p \leq n\} \geq \frac{1}{2}\|x^{**}\|_{X^{**}}.$$

Agora escolha $x_2^*, \cdots, x_{n_2}^*$ in X^*, $\|x_m^*\|_{X^*} = 1$ e

$$\max\{|\langle x_m^*, y^{**}\rangle_{X^*,X^{**}}| : 2 \leq m \leq n_2\} \geq \frac{1}{2}\|y^{**}\|_{X^{**}}$$

para todo $y^{**} \in \text{span}\{x^{**}, x^{**} - Jw_1\}$. Utilizando novamente que $x^{**} \in w^*(J(W))$, escolha $w_2 \in W$ tal que

$$\max\{|\langle x_m^*, x^{**} - Ja_2\rangle_{X^*,X^{**}}| : 1 \leq m \leq n_2\} < \frac{1}{2}.$$

Escolha $x_{n_2+1}^*, \cdots, x_{n_3}^*$ na esfera unitária de X^* tal que

$$\max\{|\langle x_m^*, y^{**}\rangle_{X^*,X^{**}}| : n_2 < m \leq n_3\} \geq \frac{1}{2}\|y^{**}\|_{X^{**}}$$

para todo $y^{**} \in \text{span}\{x^{**}, x^{**} - Jw_1, x^{**} - Jw_2\}$ e, usando novamente que $x^{**} \in w^*(J(W))$ escolha $w_3 \in W$ tal que

$$\max\{|\langle x_m^*, x^{**} - Jw_3\rangle_{X^*,X^{**}}| : 1 \leq m \leq n_3\} < \frac{1}{3}.$$

Este processo pode ser continuado indefinidamente. Seja $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência resultante desta construção.

Por hipótese, existe um ponto $x \in X$ que é um ponto limite da seqüência $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na topologia fraca de X. Como $Z = \overline{\text{span}}\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ é fracamente fechado, $x \in Z$ e $x^{**} - Jx \in R^{**} = \overline{\text{span}}\{x^{**}, x^{**} - Jw_1, x^{**} - Jw_2, \cdots\}$. Por construção, para cada $y^{**} \in R_n^{**} = \text{span}\{x^{**}\} + \text{span}\{x^{**} - Jw_n\}$ temos que,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |\langle x_m^*, y^{**}\rangle_{X^{**},X^*}| \geq \frac{1}{2}\|y^{**}\|_{X^{**}}$$

e portanto, para qualquer ponto no fecho de R_n^{**}, em particular para $x^{**} - Jx$. Outra característica da nossa construção é que

$$|\langle x_m^*, x^{**} - Jw_n \rangle_{X^*,X^{**}}| < \frac{1}{p}, \quad n > n_p > m.$$

Portanto, para $n > n_p > m$,

$$|\langle x_m^*, x^{**} - Jx \rangle_{X^*,X^{**}}| \leq |\langle x_m^*, x^{**} - Jw_n \rangle_{X^*,X^{**}}| + |\langle w_n - x, x_m^* \rangle_{X,X^*}|$$

Como x é um ponto limite de $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na topologia fraca, dado x_m^* e um inteiro $N > m$ existe w_n com $|\langle w_n - x, x_m^* \rangle_{X,X^*}| < \frac{1}{N}$ e $n > n_N > m$. Para tal elemento temos

$$|\langle x_m^*, x^{**} - Jx \rangle_{X^*,X^{**}}| \leq |\langle x_m^*, x^{**} - Jw_n \rangle_{X^*,X^{**}}| + |\langle w_n - x, x_m^* \rangle_{X,X^*}| < \frac{2}{N}$$

e, consequentemente, $\langle x_m^*, x^{**} - Jx \rangle_{X^*,X^{**}} = 0$ para todo m. Como visto acima

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |\langle x_m^*, x^{**} - Jx \rangle_{X^*,X^{**}}| \geq \frac{1}{2}\|x^{**} - Jx\|_{X^{**}}$$

e portanto $x^{**} = Jx$. Isto completa a prova.□

B.2 O Teorema de Krein-Šmulian

Utilizando o Teorema de Eberlein-Šmulian, provamos a seguir o Teorema de Krein-Šmulian. A prova apresentada aqui pode ser encontrada em [21].

Teorema B.2.1 (Krein-Šmulian)**.** *Se X é um espaço de Banach e $K \subset X$ é um conjunto fracamente compacto, então a envoltória convexa fechada $\overline{\text{co}}K$ de K é fracamente compacta.*

Antes de iniciar a prova do Teorema B.2.1 vamos provar um importante resultado auxiliar.

Lema B.2.1. *Seja X um espaço de Banach separável e $x^{**} \in X^{**}$. Suponhamos que para todo $x^* \in X^*$ e seqüência $\{x_n^*\}$ em X^* que converge para x^* na topologia fraca*; isto é, $\langle x, x_n^* \rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, x^* \rangle$ para todo $x \in X$, tenhamos que $\langle x_n^*, x^{**} \rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x^*, x^{**} \rangle$. Então $x^{**} = Jx$ para algum $x \in X$.*

Prova: Seja $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ um subconjunto denso de X. Suponha que $x^{**} \notin JX$; isto é, que $d(x^{**}, JX) = d > 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $x^{***} \in X^{***}$ tal que, $\|x^{***}\|_{X^{***}} = 1$, $\langle JX, x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}} = 0$ e $\langle x^{**}, x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}} = d$. Seja

$$W_n = \{z^* : |\langle x_i, z^* \rangle_{X,X^*}| < 1 \text{ para } i = 1, \cdots, n\}.$$

Pelo Teorema de Goldstine (JX^* é denso em X^{***} com a topologia fraca* de X^{***}, veja [3, Lema 3.4]), dados $Jx_1, \cdots, Jx_n, x^{**} \in X^{**}$ e $\epsilon > 0$, existe $x^* \in X^*$, $\|x^*\|_{X^*} = 1$, tal que

$$\begin{aligned}
|\langle x_1, x^* \rangle| &= |\langle x_1, x^* \rangle_{X,X^*} - \langle Jx_1, x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}}| = |\langle Jx_1, Jx^* - x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}}| < \epsilon, \\
&\vdots \\
|\langle x_n, x^* \rangle| &= |\langle x_n, x^* \rangle_{X,X^*} - \langle Jx_1, x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}}| = |\langle Jx_n, Jx^* - x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}}| < \epsilon, \\
& |\langle x^*, x^{**} \rangle_{X^*,X^{**}} - \langle x^{**}, x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}}| = |\langle x^{**}, Jx^* - x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}}| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, existe um funcional $x_n^* \in \bar{B}_1^{X^*}(0) \cap \{z^* \in X^* : |\langle z^*, x^{**} \rangle_{X^*,X^{**}}| \geq d/2\} \cap W_n$. A seqüência $\{x_n^*\}$ converge para zero na topologia fraca* de X^* pois, dado $x \in X$ e $\epsilon > 0$, existe x_j com $\|(x/\epsilon) - x_j\| < 1$ e

$$|\langle x/\epsilon, x_n^* \rangle_{X,X^*}| \leq |\langle x/\epsilon - x_j, x_n^* \rangle_{X,X^*}| + |\langle x_j, x_n^* \rangle_{X,X^*}| < 2, \quad \text{para } n \geq j.$$

No entanto, $|\langle x_n^*, x^{**} \rangle_{X^*,X^{**}}| \geq d/2$ e isto nos dá uma contradição, provando o lema.$\square$

Agora estamos em condições de provar o Teorema de Krein-Šmulian.

Prova do Teorema B.2.1: Do Teorema de Eberlein-Šmulian sabemos que um conjunto A é pré-compacto na topologia fraca se, e somente se, toda seqüência de elementos de A tem uma subseqüência fracamente convergente. Dito isto, queremos mostrar que toda seqüência de elementos de $\overline{\text{co}}(K)$ tem uma subseqüência fracamente convergente. Como cada elemento desta seqüência é combinação linear convexa (finita) de elementos de K, ela é gerada por uma seqüência S de elementos de K. Denotando por Y o fecho do subespaço gerado por S, basta mostrar que $\hat{K} = K \cap Y$ é fracamente compacto (aqui usamos o Teorema B.0.1) em X e ainda, pelo Teorema de Hahn-Banach, basta mostrar que $\hat{K} = K \cap Y$ é fracamente compacto em Y.

Assim, é suficiente considerar K e portanto X separável. Seja K um subconjunto fracamente compacto de um espaço de Banach separável X e denote por K_w o subconjunto K com a topologia fraca. Considere $T : X^* \to C(K_w)$ definida por $Tx^*(k) = x^*(k)$, $k \in K$ e o seu conjugado $T^* : C(K_w)^* \to X^{**}$. Escolha qualquer elemento de $C(K_w)^*$ que, pelo Teorema de Representação de Riesz é uma medida regular μ, e seja $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada que converge na topologia fraca* de X^* para x^*. Então, do teorema da convergência dominada,

$$\langle x_n^*, T^*\mu\rangle_{X^*,X^{**}} = \int x_n^*(k)d\mu(k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int x^*(k)d\mu(k) = \langle x^*, T^*\mu\rangle_{X^*,X^{**}}.$$

Do Lema B.2.1 obtemos que $T^*\mu \in JX$. O disco unitário fechado em $C(K_w)^*$ é um conjunto convexo e compacto na topologia fraca* que é levado por $J^{-1}T^*$ sobre um conjunto convexo e fracamente compacto que contém K. Isto mostra que $\overline{\text{co}}(K)$ é fracamente compacto e completa a demonstração.$\square$

Apêndice C

Espaços de Sobolev - Dimensão Um

C.1 Funções com uma derivada fraca

Sejam a e b números reais estendidos com $a < b$, $I = (a, b)$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Se $u \in L^1_{\text{loc}}(I)$ e existe $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$ tal que

$$\int_a^b u(x)\phi'(x)\, dx = -\int_a^b g(x)\phi(x)\, dx, \qquad \text{para toda } \phi \in C_c^\infty(a, b),$$

diremos que u tem uma derivada fraca g que denotaremos por u'. É fácil ver que a derivada fraca, caso exista, é única. Se $u \in C^1(I)$, então a derivada usual de u coincide com a derivada fraca de u.

Definição C.1.1. *O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : u \textit{ tem uma derivada fraca } u' \in L^p(I)\}.$$

Pode ser facilmente provado que função $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)} : W^{1,p}(I) \to [0, \infty)$ definida por

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \left(\|u\|^p_{L^p(I)} + \|u'\|^p_{L^p(I)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in W^{1,p}(I),\ 1 \leq p < \infty \text{ e}$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(I)} = \max\{\|u\|_{L^\infty(I)} + \|u'\|_{L^\infty(I)}\}, \quad u \in W^{1,\infty}(I),$$

é uma norma e que a norma de $W^{1,2}(I)$ provem do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^1(I)} = \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx, \quad \text{para } u, v \in W^{1,2}(I).$$

Escrevemos $H^1(I)$ para denotar $W^{1,2}(I)$.

Proposição C.1.1.

1. *$W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach.*

2. *$W^{1,p}(I), 1 < p < \infty$ é reflexivo.*

3. *$W^{1,p}(I), 1 \leq p < \infty$ é separável.*

4. *$H^1(I)$ é um espaço de Hilbert.*

Prova: *1*. Se (u_n) é uma seqüência de Cauchy em $W^{1,p}$, então (u_n) e (u'_n) são seqüências de Cauchy em L^p. Consequentemente $u_n \to u$ em L_p e $u'_n \to g$ em L^p. Então

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_I u_n\varphi' & = & -\displaystyle\int u'_n\varphi & \forall & \varphi \in C_c^1(I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \displaystyle\int_I u\varphi' & = & -\displaystyle\int_I g\varphi & \forall & \varphi \in C_c^1(I) \end{array}$$

logo $g = u' \in L^p$ e $u \in W^{1,p}(I)$, $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$.

2. $W^{1,p}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$.

De fato, se $X_p = L^p(I) \times L^p(I)$, então X_p é reflexivo e

$$\begin{array}{rcl} T : W^{1,p}(I) & \to & X_p \\ u & \to & (u, u') \end{array}$$

é uma isometria e portanto $T(W^{1,p}(I))$ é um subespaço fechado de X . Então $T(W^{1,p}(I))$ é reflexivo e consequentemente $W^{1,p}(I)$ é reflexivo.

3. $W^{1,p}(I)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.
De fato $X_p = L^p(I) \times L^p(I)$ é separável, portanto $T(W^{1,p}(I))$ é separável e portanto $W^{1,p}(I)$ é separável.

4. É imediato.$\square$

Seja $L : D(L) \subset L^p(I) \to L^p(I)$ definida por $D(L) = W^{1,p}(I)$

$$Lu = u',$$

então L é fechado. De fato, se $u_n \overset{L^p(I)}{\longrightarrow} u$, $Lu_n \overset{L^p(I)}{\longrightarrow} g$, da definição de derivada fraca, segue facilmente que

$$g = u'.$$

Teorema C.1.1. *Se $u \in W^{1,p}(I)$, então existe $\widetilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que*

$$u = \widetilde{u} \text{ quase sempre em } I \ \textit{e}$$

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \ \forall \ x, y \in I\,.$$

Observação C.1.1. *Se $u \in W^{1,p}$ e $u = v$ quase sempre, então $v \in W^{1,p}$. Do Teorema C.1.1, se $u \in W^{1,p}$, então u tem um representante contínuo. Sempre que necessário utilizaremos o representante contínuo de $u \in W^{1,p}$ e também o representaremos por u. Se $u \in W^{1,p}$ e $u' \in C(\bar{I})$, então $u \in C^1(\bar{I})$.*

Para provar o teorema utilizaremos os dois lemas a seguir

Lema C.1.1. *Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0, \qquad \textit{para todo } \varphi \in C^1_c(I). \tag{C.1}$$

Então existe uma constante C tal que $f = C$ quase sempre.

Prova: Seja $\psi \in C_c^1(I)$ tal que $\displaystyle\int_a^b \psi = 1$. Se $w \in C_c^0(I)$ existe $\varphi \in C_c^1(I)$ tal que

$$\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi\,.$$

De fato: $h = w - \left(\displaystyle\int_I w\right)\psi$ é contínua com suporte compacto e $\displaystyle\int_I h = 0$ tome $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x h(s)ds$.

Segue de (C.1) que

$$\int_I f\left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] = 0, \quad \text{para todo } w \in C_c(I).$$

isto é

$$\int_I \left[f - \left(\int f\psi\right)\right] w = 0 \quad \text{para todo } w \in C_c(I)$$

e portanto $f = \displaystyle\int_I f\psi = C$ quase sempre. □

Lema C.1.2. *Seja $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Para y_0 em I pomos*

$$\nu(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt,\ x \in I.$$

Então $\nu \in C(I)$ e

$$\int_I \nu\varphi' = -\int_I g\varphi,\ \forall\ \varphi \in C_c^1(I).$$

Prova: Do Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_I v\varphi' &= \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)dt\right]\varphi'(x)dx \\
&= -\int_a^{y_0} dt \int_a^t g(t)\varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b dt \int_t^b g(t)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_a^b g(t)\varphi(t)dt. \square
\end{aligned}$$

Prova do Teorema: Para $y_0 \in I$ definimos $\bar{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)dt$. Do Lema C.1.2

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi, \qquad \text{para todo } \varphi \in C_c^1(I).$$

Portanto $\int (u - \bar{u})\varphi' = 0$ para toda $\varphi \in C_c^1(I)$. Segue do Lema C.1.1 que $u - \bar{u} = c$ quase sempre. A função $\bar{u} + c$ tem as propriedades desejadas.

Observação C.1.2. *Segue do Lema C.1.2 que, se I é limitado, então a primitiva v de uma função $g \in L^p$ pertence a $W^{1,p}$. Se retirarmos a hipótese de que I seja limitado, então $v \in W^{1,p}$ sempre que $v \in L^p$.*

Proposição C.1.2. *Seja $u \in L^p(I)$ com $1 < p \leq \infty$. As propriedades seguintes são equivalentes*

i) $u \in W^{1,p}(I)$,

ii) Existe uma constante C tal que

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p^*}(I)}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \tag{C.2}$$

iii) Existe uma constante C tal que, para todo $w \subset\subset I$ e para todo $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < \operatorname{dist}(w, I^c)$, temos

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(w)} \leq C|h|. \tag{C.3}$$

Além disso, podemos escolher $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ em ii) e iii).

Prova: Provaremos que *i)* e *ii)* são equivalentes, que *i)* implica *iii)* e que que *iii)* implica *ii)*.

É claro que, se $u \in W^{1,p}(I)$ e $\phi \in C_c^\infty(I)$, então

$$\left| \int_I u\varphi' \right| = \left| -\int_I u'\varphi \right| \leq \|u'\|_{L^p(I)}\|\varphi\|_{L^{p^*}(I)},$$

provando que $i)$ implica $ii)$. Recíprocamente, se (C.2) vale, o funcional linear

$$L^{p^*}(I) \supset C_c^\infty(I) \ni \varphi \stackrel{F}{\longmapsto} \int_I u\varphi' \in \mathbb{R}$$

é contínuo na norma de $L^{p^*}(I)$ e se estende, de maneira única, a um funcional linear contínuo F de $L^{p^*}(I)$ em $\mathbb{R}$. Segue do Teorema de Representação de Riesz que existe $-g \in L^p$ tal que

$$\langle F, \varphi \rangle = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in L^{p^*}(I)$$

e em particular para $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Segue que $u \in W^{1,p}(I)$ e que $ii)$ implica $i)$.

Se $u \in W^{1,p}(I)$, $w \subset\subset I$ e $x \in w$, do teorema anterior,

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt = h\int_0^1 u'(x+sh)ds,$$

então

$$|u(x+h) - u(x)| \le |h| \int_0^1 |u'(x+sh)|ds.$$

Se $p = \infty$ é claro que $iii)$ vale. Se $1 < p < \infty$, da desigualdade de Hölder

$$|u(x+h) - u(x)|^p \le |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds.$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_w |u(x+h) - u(x)|^p dx &\le |h|^p \int_w dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \\ &= |h|^p \int_0^1 ds \int_w |u'(x+sh)|^p dx \ . \end{aligned}$$

Para $0 \le s \le 1$ temos

$$\int_w |u'(x+sh)|^p dx = \int_{w+sh} |u'(x)|^p dx \le \int_I |u'(x)|^p dx \ .$$

e

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(w)} \le \|u'\|_{L^p(I)} |h|,$$

provando que *i*) implica *iii*).

Suponha que $u \in L^p(I)$ e que exista $C > 0$ tal que (C.3) vale para cada $w \subset\subset I$ e $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < \operatorname{dist}(w, I^c)$. Se $\varphi \in C^1_c(I)$, escolha $w \subset\subset I$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset w$. Para $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \operatorname{dist}(w, I^c)$ temos

$$\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx. \tag{C.4}$$

Da desigualdade de Hölder e de (C.3)

$$\left|\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx\right| \leq C|h|\|\varphi\|_{L^{p^*}(I)}.$$

Dividindo (C.4) por h e fazendo h tender a zero, deduzimos que

$$\left|\int u\,\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p^*}(I)}, \quad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Isto mostra que *iii*) implica *ii*) e completa a prova.$\square$

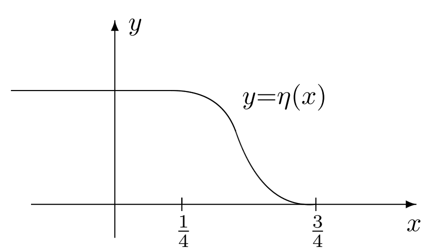
Exercício: Mostre que, se $p = 1$, *i*) $\Rightarrow$ *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*).

Corolário C.1.1. *Se $u \in W^{1,\infty}(I)$, então $u' \in L^\infty(I)$ se, e somente se, existe $c > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|, \quad \text{quase sempre para } x, y \in I.$$

Seja $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta \leq 1$, tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{se} \quad x > \frac{3}{4} \end{cases}$$



Dada f definida em $(0,1)$, definimos

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Lema C.1.3. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$, então*

$$\eta\widetilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty) \quad e \quad (\eta\widetilde{u})' = \eta'\widetilde{u} + \eta\widetilde{u'}$$

Prova: Se $\varphi \in C_c^1((0,\infty))$, então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta\widetilde{u}\varphi' &= \int_0^1 \eta\widetilde{u}\varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] \\ &= -\int_0^1 \eta\varphi u' - \int_0^1 \eta'\varphi\, u \quad \text{pois } \eta\varphi \in C_c^1((0,1)) \\ &= -\int_0^\infty (\widetilde{u'}\eta + \widetilde{u}\eta')\varphi. \square \end{aligned}$$

Teorema C.1.2 (Operador Extensão)**.** *Se $1 \leq p \leq \infty$, existe um operador linear limitado $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ tal que*

i) $Pu|_I = u$, *para todo* $u \in W^{1,p}(I)$,

ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$, *para todo* $u \in W^{1,p}(I)$,

iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, *para todo* $u \in W^{1,p}(I)$,

onde C só depende de $|I| \leq \infty$.

Prova: Comecemos pelo caso $I = (0,\infty)$ e vamos demonstrar que o prolongamento por reflexão

$$(Pu)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } \ x > 0, \\ u(-x), & \text{se } \ x < 0, \end{cases}$$

é o operador desejado. De fato

$$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} = 2\|u\|_{L^p(I)}$$

e

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } \ x < 0 \\ -u'(-x) & \text{se } \ x > 0 \end{cases}$$

é tal que $v \in L^p(\mathbb{R})$ e

$$(Pu)(x) - u(0) = \int_0^x v(t)dt.$$

Logo $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(0,\infty)}$.

Consideremos agora o caso I limitado. Sem perda de generalidade, podemos considerar $I = (0,1)$.

Dada $u \in W^{1,p}(I)$ e η como no Lema C.1.3, escrevemos

$$u = \eta u + (1 - \eta)u.$$

A função ηu é facilmente prolongada a $(0, \infty)$ por $\eta\,\widetilde{u}$ (do Lema C.1.3) e em seguida pode ser prolongada a $\mathbb{R}$ por reflexão. Obtemos assim uma função $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que prolonga ηu e tal que

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}$$
$$\|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad (C \text{ depende de } \|\eta'\|_\infty)$$

Procedemos de forma análoga para $(1 - \eta)u$, ou seja, primeiro prolongamos $(1 - \eta)u$ a $(-\infty, 1)$ por zero fora de (0,1) e em seguida a $\mathbb{R}$ por reflexão (relativamente ao ponto 1) assim obtemos $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que prolonga $(1-\eta)u$ e tal que é tal que

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Então $Pu = v_1 + v_2$ resolve a questão.$\square$

A a convolução tem um papel importante nos processos de aproximação. O seguinte resultado será importante para aproximação de funções de $W^{1,p}(I)$ por funções regulares.

Lema C.1.4. *Seja $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ e seja $\nu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $\rho * \nu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $(\rho * \nu)' = \rho * \nu'$.*

Prova: Suponha primeiramente que ρ é de suporte compacto. Sabemos que $\rho * \nu \in L^p(\mathbb{R})$. Seja $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} (\rho * \nu)\varphi' = \int_{\mathbb{R}} \nu(\check{\rho} * \varphi') = \int_{\mathbb{R}} \nu \overbrace{(\check{\rho} * \varphi)'}^{\in C_c^\infty(\mathbb{R})} = -\int_{\mathbb{R}} \nu(\check{\rho}' * \varphi) = -\int_{\mathbb{R}} (\rho * \nu')\varphi.$$

Se ρ não tem suporte compacto introduzimos uma seqüência (ρ_n) de $C_c(\mathbb{R})$ tal que $\rho_n \to \rho$ em $L^1(\mathbb{R})$. Pelo que acabamos de provar

$$\rho_n * v \in W^{1,p} \quad \text{ e } (\rho_n * v)' = \rho_n * v',$$

mas $\rho_n * v \to \rho * v$ em $L^p(\mathbb{R})$ e $\rho_n * v' \to \rho * v'$ em $L^p(\mathbb{R})$

$$\|(\rho_n - \rho) * v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\rho_n - \rho\|_{L^1(I)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Segue que $(\rho * v)' = \rho * v'$ (do fato que a derivada é fechada em $L^p(\mathbb{R})$) e $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. $\square$

Teorema C.1.3 (Densidade)**.** *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma seqüência (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ em $W^{1,p}(I)$.*

Prova: Podemos sempre supor que $I = \mathbb{R}$ pois, nos outros casos, começamos estendendo u a uma função de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ com a ajuda do Teorema C.1.2.

Fixamos $\xi \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ e

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Definimos a seqüência $\xi_n(x) = \xi\left(\frac{x}{n}\right)$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $\xi_n f \to f$ em $L^p(\mathbb{R})$.

Fixamos uma seqüência regularizante $\{\rho_n\}$. Mostraremos que a seqüência $u_n = \xi_n(\rho_n * u)$ converge para u quando $n \to \infty$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Primeiramente temos $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$. De fato, se escrevemos

$$u_n - u = \xi_n[(\rho_n * u) - u] + [\xi_n u - u],$$

então

$$\|u_n - u\|_{L^p} \leq \|(\rho_n * u) - u\|_{L^p} + \|\xi_n u - u\|_{L^p} \to 0.$$

Em continuação, em virtude do Lema, temos que

$$u_n' = {\xi_n}'(\rho_n * u) + \xi_n(\rho_n * u')$$

logo

$$\begin{aligned}\|{u_n}' - u'\|_{L^p} &\leq \|{\xi_n}'(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\xi_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p} \\ &\leq \frac{c}{d}\|u\|_{L^p} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p} + \|\xi_n u' - u'\|_{L^p} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

onde $C = \|\xi'\|_{L^\infty}$. $\square$

Teorema C.1.4. *Existe uma constante C (dependendo só de $|I| \leq \infty$) tal que*

1. $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, *para todo* $u \in W^{1,p}(I)$, *e para todo* $1 \leq p \leq \infty$; *ou seja,* $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ *com inclusão contínua para todo* $1 \leq p \leq \infty$.

   Além disso, quando I é limitado,

2. $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ *com inclusão compacta para* $1 < p \leq \infty$.

3. $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ *com inclusão compacta para* $1 \leq q < \infty$.

Prova: Começamos estabelecendo *1*. para $I = \mathbb{R}$; o caso geral segue do Teorema C.1.2. Seja $v \in C_c'(\mathbb{R})$; se $1 \leq p < \infty$ pomos $G(s) = |S|^{p-1}S$. A função $W = G(v)$ pertence a $C_c'(\mathbb{R})$ e

$$W' = G'(v)v' = p(v|^{p-1}v'.$$

Portanto, para $x \in R$, temos

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt$$

e utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_{L^p}^{p-1}\|v'\|_{L^p},$$

e, da Desigualdade de Young,

$$|v(x)| \leq p^{\frac{1}{p}}\|v\|_{L^p}^{\frac{1}{p'}}\|v'\|_{L^p}^{\frac{1}{p}} \leq p^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p'}\|v\|_{L^p} + \frac{1}{p}\|v'\|_{L^p}\right).$$

Segue que

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{W^{1,p}}, \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}), \tag{C.5}$$

onde C é uma constante universal.

Para completar a prova de *1*. aplicamos o Teorema C.1.3 tomando, para cada $u \in W^{1,p}$, uma seqüência $\{u_n\} \subset C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$. De (C.5) obtemos que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^\infty(\mathbb{R})$ e portanto convergente para u em $L^\infty(\mathbb{R})$ e *1*. segue tomando o limite em (C.5).

A prova de *2*. segue da seguinte forma: Seja $\mathcal{F}$ a bola unitária de $W^{1,p}(I)$, $1 < p \leq \infty$. Para $u \in \mathcal{F}$ temos que

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_y^x u'(t)dt\right| \leq \|u'\|_{L^p}|x-y|^{1/p^*} \leq |x-y|^{1/p^*}, \quad \forall x, y \in I.$$

Segue do Teorema de Arzelá-Ascoli que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $C(\overline{I})$.

A prova de *3*. segue da seguinte forma: Seja $\mathcal{F}$ a bola unitária de $W^{1,1}(I)$. Para mostrar que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^q(I)$, $1 \leq q < \infty$ aplicamos o Teorema de Fréchet-Holmogorov. Verifiquemos suas hipóteses.

Seja $w \subset\subset I$, $u \in \mathcal{F}$ e $|h| < \text{dist}(w, vI)$.

Segue da prova que *i*) implica *iii*) na Proposição C.1.2 que

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\infty)} \leq |h| \, \|u'\|_{L^1(I)} \leq |h|.$$

Portanto

$$\int_w |u(x+h) - u(x)|^q dx \leq \left(2^{q-1} \|u\|_{L^\infty}^{q-1}\right) \int_w |u(x+h) - u(x)| dx \leq C|h|$$

e consequentemente

$$\left(\int_w |u(x+h) - u(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq C^{1/q} \, |h|^{1/q} < \varepsilon \text{ se } h < \delta$$

Para verificar a condição restante note que, para $u \in \mathcal{F}$

$$\|u\|_{L^q(I \backslash w)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)} |I \backslash w|^{1/q} < \varepsilon$$

se $|I \backslash w|$ é pequeno.

O Teorema de Fréchet-Kolmogorov implica o resultado. $\square$

Observação C.1.3. *Note que:*

1. $W^{1,1} \hookrightarrow C(\overline{I})$ *e contínua mas nunca é compacta (mesmo se* $|I| < \infty$ *).*

2. *Se* I *não é limitado* $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty(I)$ *não é compacta.*

3. *Se* I *é um intervalo limitado e* $1 \leq q \leq \infty$ *o teorema anterior assegura que* $\|u\| = \|u'\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$ *é equivalente à norma usual de* $W^{1,p}(I)$.

4. *Se* I *é ilimitado e* $u \in W^{1,p}(I)$, *então* $u \in L^q(I)$ *para todo* $q \in [p, \infty)$ *pois*

$$\int \|u\|^q \leq \|u\|_{L^\infty}^{q-p} \|u\|_{L^p}^p.$$

Em geral $u \notin L^q(I)$ *para* $q \in [1, p)$.

Corolário C.1.2. *Se I não é limitado e $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$, então*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0.$$

Prova: Do Teorema C.1.3, existe uma seqüência $u_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ com

$$\|u_n|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Do Teorema C.1.4, segue que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ e, para todo $x \in I$ com $|x|$ suficientemente grande, $|u(x)| < \varepsilon$.

Corolário C.1.3 (Derivação do Produto)**.** *Sejam u e $v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in W^{1,p}(I)$ e*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Além disso, vale a fórmula de integração das partes

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \ \forall \ \ x, y \in \bar{I}\ .$$

Prova: Notemos que $u \in L^\infty(I)$ e portanto $uv \in L^p(I)$. Comecemos pelo caso $1 \leq p < \infty$ e seja (u_n), (v_n) seqüências de $C_c^1(\mathbb{R})$ tais que $u_n|_I$ e $v_n|_I$ convergem para u e v respectivamente em $W^{1,p}(I)$, então $u_n \to u$ e $v_n \to v$ em $L^\infty(I)$ segue que $u_n v_n \to uv$ em $L^p(I)$. Assim,

$$(u_n v_n)' = {u_n}' v_n + u_n {v_n}' \to u'v + uv' \text{ em } L^p(I).$$

Logo $uv \in W^{1,p}$ e $(uv)' = u'v + uv'$.
Se $u, v \in W^{1,\infty}(I)$, então $u, v \in L^\infty(I)$ e

$$u'v + uv' \in L^\infty(I).$$

Resta verificar que

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^1(I).$$

Seja $\widetilde{I}$ limitado tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset \widetilde{I} \subset I$. Então $u, v \in W^{1,p}(\widetilde{I})$, para todo $p < \infty$. Disto segue que

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi.$$

Como φ é arbitrária em $C_c^1(I)$ o resultado segue. $\square$

Corolário C.1.4 (Derivação da Composição)**.** *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \ \text{e} \ (G \circ u)' = (G' \circ u)u'$$

Prova: Seja $M = \|u\|_{L^\infty(I)}$. Como $G(0) = 0$ existe C tal que $|G(s)| \leq C(s)$ para $s \in [-M, M]$. Então $G \circ u \in L^p(I)$ pois $|G \circ u| \leq C|u|$. Da mesma forma $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Resta mostrar que

$$\int (G \circ u)\varphi' = -\int (G' \circ u)u'\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^1(I).$$

Suponha que $1 \leq p < \infty$. Do Teorema C.1.3 existe uma seqüência $\{u_n\} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ em $W^{1,p}(I)$ e portanto $L^\infty(I)$. Portanto $G \circ u_n \to G \circ u$ em $L^\infty(I)$ e $(G' \circ u_n){u_n}' \to (G' \circ u)u'$ em $L^p(I)$. De

$$\int (G \circ u_n)\varphi' = -\int (G' \circ u_n){u_n}'\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^1(I)$$

resulta que

$$\int (G \circ u)\varphi' = -\int (G' \circ u)u'\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^1(I).$$

O caso $p = \infty$ segue como no Corolário C.1.3.$\square$

C.2 Funções com várias derivadas fracas

Definição C.2.1. *Dados $m \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$ definimos, por recorrência, o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}.$$

Escrevemos $H^m(I) := W^{m,2}(I)$.

Note que:

- $u \in W^{m,p}(I)$ se, e somente se, existem funções $g_1, \ldots, g_m \in L^p(I)$ tais que

  $$\int_I u\, D^j\varphi = (-1)^j \int_I g, \varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^\infty(I), \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

  Denotamos g_j por $D^j u$.

- No espaço $W^{m,p}(I)$ definimos a norma

  $$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \left(\sum_{\alpha=0}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

  e $H^m(I)$ é munido do produto interno

  $$(u, v)_{H^m} = \sum_{\alpha=0}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(I)}$$

- Pode-se mostrar que a norma $\| \cdot \|_{W^{m,p}(I)}$ é equivalente a norma $\|u\| = \|u\|_{L^p(I)} + \|D^m u\|_{L^p(I)}$ além disso pode-se estabelecer que

  $$\|D^j u\|_{L^p(I)} \leq \varepsilon \, \|D^m u\|_{L^p(I)} + C\|u\|_{L^p(I)} \;\; \forall\, u \in W^{m,p}(I)$$

- $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$.

C.3 O Espaço $W_0^{1,p}(I)$

Definição C.3.1. *Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_c^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$. Denotaremos $W_0^{1,2}(I)$ por $H_0^1(I)$.*

- *$H_0^1(I)$ é dotado do produto interno de $H^1(I)$.*
- *$W_0^{1,p}(I)$ é separável para $1 \leq p < \infty$, reflexivo para $1 < p < \infty$ e $H_0^1(I)$ é Hilbert.*
- *Se $I = \mathbb{R}$, $C_c^1(\mathbb{R})$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ e portanto $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.*
- *Usando seqüências regularizantes concluímos que $C_c^\infty(I)$ é um subespaço denso em $W_0^{1,p}(I)$ e, se $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, então $u \in W_0^{1,p}(I)$.*

Teorema C.3.1. *$u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u \in W^{1,p}(I)$ e $u = 0$ em ∂I.*

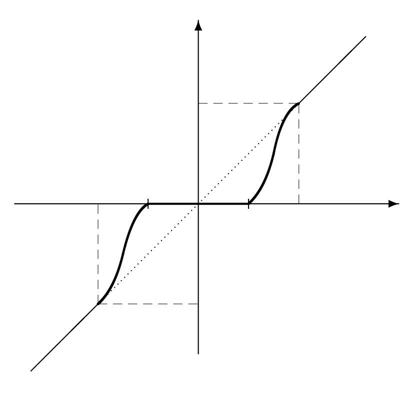
Prova: Se $u \in W_0^{1,p}(I)$ existe uma seqüência $\{u_n\}$ de $C_c^1(I)$ tal que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ em $W^{1,p}(I)$. Portanto $u_n \to u$ uniformemente em $\bar{I}$ e consequentemente $u = 0$ em ∂I.

Reciprocamente, se $u \in W^{1,p}(I)$ e $u = 0$ em ∂I. Fixe $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ t & \text{se} \quad |t| \geq 2 \end{cases}$$

e

$$|G(t)| \leq |t| \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$



Fazendo $u_n = \dfrac{1}{n} G(nu)$ de forma que $u_n \in W^{1,p}(I)$ (Corolário C.1.4).

Por outro lado $\operatorname{supp} u_n \subset \left\{x \in I : |u(x)| \geq \dfrac{1}{n}\right\}$ e portanto $\operatorname{supp} u_n$ é compacto pois ($u = 0$ em ∂I e $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$). Consequentemente, $u_n \in W_0^{1,p}(I)$. Finalmente,

$$|u_n(x) - u(x)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\, x \in I,$$
$$|u_n(x) - u(x)| \leq 2|u(x)|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \;\text{ e }\; \forall\, x \in I.$$

Disto segue que

$$\int_I |u_n(x) - u(x)|^p \, dx \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$u_n{}'(x) = G'(nu(x))u'(x) \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; u'(x)$$
$$\int_I |u_n{}'(x) - u'(x)|^p \, dx \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$u_n \to u \text{ em } W^{1,p}(I) \;\text{ e portanto }\; u \in W_0^{1,p}(I).\square$$

C.4 Desigualdade de Poincaré

Seja I um intervalo limitado. Então, existe uma constante positiva C, dependendo somente de $|I|$, tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)} \;\forall\, u \in W_0^{1,p}(I).$$

Prova: Se $u \in W_0^{1,p}(I)$ e $I = (a, b)$, então

$$u(x) = u(x) - u(a) = \int_a^x u'(s)ds$$

de onde $\|u\|_\infty \leq |I|\, \|u'\|_\infty$ se $p = \infty$ e

$$|u(x)|^p \leq |I|^{p/p^*} \int_I |u'|^p$$

se $p < \infty$. Então

$$\left(\int |u(x)|^p\right)^{1/p} \leq |I| \left(\int_I |u'|^p\right)^{1/p}.$$

Logo

$$\|u\|_{L^p} \leq |I| \, \|u'\|_{L^p(I)}$$

e

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq (1 + |I|) \; \|u'\|_{L^p(I)}. \square$$

Note que:

1. $(u', v')_{L^2(I)}$ define um produto interno em $H_0^1(I)$ se $|I| < \infty$ e $\|u'\|_{L^2(I)}$ define uma norma equivalente à norma de H^1 em $H_0^1(I)$.

2. Dado $m \geq 2$ definimos $W_0^{m,p}(I)$ como o fecho de $C_c^\infty(I)$ em $W^{m,p}(I)$. Note que $W_0^{2,p}(I) \neq W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I)$ e que

$$W_0^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m,p}(I) : u = u' = \ldots = u^{m-1} = 0 \text{ em } \partial I \right\}$$
$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \left\{ u \in W^{2,p}(I) : u = 0 \text{ em } \partial I \right\}$$

Apêndice D

Operadores Elípticos - Geração de Semigrupos Analíticos

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, conexo, limitado com fronteira suave. Seja L o operador diferencial de segunda ordem definido por

$$Au = \sum_{i=1}^{N} \tag{D.1}$$

Apêndice E

Potências fracionárias: Tópicos adicionais

E.1 Algumas propriedades adicionais interessantes

Aplicando a fórmula (4.7) ao caso $X := \mathbb{C}$ e $A := 1$, em particular, segue que

$$\int_0^\infty s^{-z}(1+s)^{-1}ds = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad 0 < \mathrm{Re} z < 1.$$

Portanto deduzimos do fato que $A \in \mathcal{P}$ e da igualdade acima que

$$\|A^{-z}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\frac{|\sin \pi z|}{\pi}\int_0^\infty s^{-\mathrm{Re} z}(1+s)^{-1}ds = M\frac{|\sin \pi z|}{\sin \pi \mathrm{Re} z} \tag{E.1}$$

para $0 < \mathrm{Re} z < 1$.

Agora não é difícil provar o seguinte resultado de continuidade:

Teorema E.1.1. $\{A^z; \mathrm{Re} z < 0\} \cup \{A^0 = I_X\}$ *é um semigrupo fortemente contínuo e analítico sobre* X.

Prova: Graças ao Lema 4.2.1, resta mostrar que é fortemente contínuo em $z = 0$. Note que, para $s > 0$,

$$(s+A)^{-1}-(1+s)^{-1} \supset (s+A)^{-1}(1-(s+A)(1+s)^{-1}) = (1+s)^{-1}(s+A)^{-1}(1-A).$$

Portanto, dado $x \in D(A)$ e z com $0 < \mathrm{Re}z < 1$, segue de (4.7) e de (E.1) que

$$\begin{aligned} A^{-z}x - x &= \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^\infty s^{-z}(s+A)^{-1}x\,ds - \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^\infty s^{-z}(1+s)^{-1}x\,ds \\ &= \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^{-z}}{1+s}(s+A)^{-1}(1-A)x\,ds. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|A^{-z}x - x\|_X \leq M\frac{|\sin \pi z|}{\pi}\|(1-A)x\|_X \int_0^\infty \frac{s^{-\mathrm{Re}z}}{(1+s)^2}\,ds, \quad 0 < \mathrm{Re}z < 1.$$

Como a integral converge para 1 quando $\mathrm{Re}z \to 0$, vemos que $A^{-z}x \to x$ quando $z \to 0$ em $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha\}$ para cada $\alpha \in (0, \pi/2)$. Desde que A^{-z} é uniformemente limitado para $z \in \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha\} \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}z < 1\}$ para cada $\alpha \in (0, \pi/2)$, graças a (E.1), A^z converge para I_X na topologia forte quando $z \to 0$ em $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \geq \pi/2 + \epsilon\}$ para cada $\epsilon \in (0, \pi/2)$. Isto prova o teorema.□

É uma consequência do Teorema E.1.1 que $\{A^{-t}; t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo sobre X. Denotamos o seu gerador infinitesimal por

$$-\log A$$

o que define o logarítimo de $A \in \mathcal{P}(X)$. Então, vale a fórmula intuitiva

$$A^{-t} = e^{-t\log A}, \quad t \geq 0.$$

Teorema E.1.2. *Suponha que $A \in \mathcal{P}(X)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, então*

$$\|(\mu + A)^{-1}x\|_X \leq K\mu^{\alpha-1}\|A^{-\alpha}x\|_X, \quad \mu > 0,\ x \in X.$$

Aqui K é uma constante dependendo de M e α.

Prova: Sabemos que $\|s(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, $\|A(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M+1$, $s \geq 0$. Seja $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned}(\mu+A)^{-1}x &= A^{\alpha-1}A(\mu+A)^{-1}A^{-\alpha}x \\ &= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}A(\mu+A)^{-1}(s+A)^{-1}A^{-\alpha}x ds.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|(\mu+A)^{-1}x\|_X &\leq \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}M(M+1)\left[\int_0^\mu s^{\alpha-1}ds\, \mu^{-1} + \int_\mu^\infty s^{\alpha-2}ds\right]\|A^{-\alpha}x\|_X \\ &\leq M(M+1)\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}\mu^{\alpha-1} + \frac{1}{1-\alpha}\mu^{\alpha-1}\right]\|A^{-\alpha}x\|_X\end{aligned}$$

e o resultado segue. $\square$

Teorema E.1.3.

1. *Suponha que* $A \in \mathcal{P}(X)$ *e que* $x \in D(A^\alpha)$ *para algum* α, $0 < \alpha \leq 1$. *Então, se* $x_\epsilon = (I+\epsilon A)^{-1}x$, $\epsilon > 0$, *temos que*

$$\|x_\epsilon - x\|_X \leq M\epsilon^\alpha\|A^\alpha x\|_X$$
$$\|Ax_\epsilon\|_X \leq M\epsilon^{\alpha-1}\|A^\alpha x\|_X$$

para todo $\epsilon > 0$.

2. *Suponha que* $x \in X$ *e que para algum* α, $0 < \alpha \leq 1$, $\|x\|_X < B < \infty$, *existe* $x_\epsilon \in D(A)$, *para todo* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$\|x_\epsilon - x\|_X \leq B\epsilon^\alpha, \quad \forall \epsilon > 0,$$
$$\|Ax_\epsilon\|_X \leq B\epsilon^{\alpha-1}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Então $x \in D(A^\beta)$ *para qualquer* β *em* $0 < \beta < \alpha$ *e*

$$\|A^\beta x\|_X \leq M_{\alpha,\beta}B$$

para uma constante $M_{\alpha,\beta}$ *dependendo somente de* A, α *e* β.

Prova: 1) Pelo Teorema E.1.2

$$\begin{aligned}\|Ax_\epsilon\|_X &= \|A^{1-\alpha}(1+\epsilon A)^{-1}A^\alpha x\|_X \\ &\le M\epsilon^{\alpha-1}\|A^\alpha x\|_X\end{aligned}$$

e portanto $\|x_\epsilon - x\|_X = \|\epsilon A(I+\epsilon A)^{-1}x\|_X \le M\epsilon^\alpha\|A^\alpha x\|_X$.

2) Para qualquer $\mu > 0$, $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\|A(\mu+A)^{-1}x\|_X &\le \|A(\mu+A)^{-1}(x-x_\epsilon)\|_X + \|(\mu+A)^{-1}Ax_\epsilon\|_X \\ &\le (M+1)B\epsilon^\alpha + M\mu^{-1}B\epsilon^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\epsilon = \mu^{-1}$

$$\|A(\mu+A)^{-1}x\|_X \le B(2M+1)\mu^{-\alpha}$$

e claramente

$$\|A(\mu+A)^{-1}x\|_X \le (M+1)\|x\|_X \le B(2M+1).$$

Logo

$$\|A(\mu+A)^{-1}x\|_X \le B(2M+1)\min\{1,\mu^{-\alpha}\}.$$

Se $0<\beta<\alpha$ segue que $\displaystyle\int_0^\infty \|s^{\beta-1}A(s+A)^{-1}x\|_X ds < \infty$ e

$$J_\beta z = \frac{\sin \pi\beta}{\pi}\int_0^\infty s^{\beta-1}A(s+A)^{-1}x ds$$

é tal que $\|J_\beta x\|_X \le M_{\alpha,\beta}B$, mas

$$f_R = \frac{\sin \pi\beta}{\pi}\int_0^R s^{\beta-1}(s+A)^{-1}x ds \to A^{\beta-1}x$$

quando $R\to\infty$ e $Af_R \to J_\beta x$ quando $R\to\infty$. Como A é fechado segue que $A^{\beta-1}x \in D(A)$ o que significa $x\in D(A^\beta)$, desde que $x = A^{-\beta}(AA^{\beta-1}x)$, e $\|A^\beta x\|_X = \|J_\beta x\|_X \le M_{\alpha,\beta}B$.$\square$

Corolário E.1.1. *Se* $x \in D(A^\alpha)$*,* $\alpha > 0$ *e* $0 < \beta < \alpha$ *então*

$$A^\beta x = \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \int_0^\infty s^{\beta-1} A(s+A)^{-1} x ds.$$

Considere a seguinte extensão de (4.7).

Proposição E.1.1. *Suponha que* $m = 0, 1, 2, \cdots$*. Então*

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{m!}{(1-z)(2-z)\cdots(m-z)} \int_0^\infty s^{m-z}(s+A)^{-m-1} ds \qquad \text{(E.2)}$$

para $0 < \mathrm{Re} z < m+1$*.*

Prova: Suponha que z satisfaz $0 < \mathrm{Re} z < 1$. Então da integração por partes em (4.7) temos que,

$$\begin{aligned} A^{-z} &= \frac{\sin \pi z}{\pi(1-z)} \left[(s^{1-z}(s+A)^{-1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s^{1-z}(s+A)^{-2} ds \right] \\ &= \frac{\sin \pi z}{\pi(1-z)} \int_0^\infty s^{1-z}(s+A)^{-2} ds. \end{aligned}$$

Agora (E.2) segue por indução para $0 < \mathrm{Re} z < 1$. Graças a (4.4) é fácil verificar que a integral em (E.2) converge absolutamente para $0 < \mathrm{Re} z < m+1$ e que o lado direito de (E.2) é uma aplicação analítica de $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re} z < m+1\}$ em $\mathcal{L}(X)$. Agora a afirmativa segue do Teorema E.1.1.$\square$

Agora suponha que $-1 < \mathrm{Re} z < 1$. Então pomos

$$A_z x := \frac{\sin \pi z}{\pi z} \int_0^\infty s^z (s+A)^{-2} Ax \, ds, \quad x \in D(A).$$

Observe que

$$A_0 x = \int_0^\infty (s+A)^{-2} ds Ax = -(s+A)^{-1} Ax\Big|_0^\infty = x, \quad x \in D(A). \qquad \text{(E.3)}$$

Além disso, se $\mathrm{Re} z \neq 0$, segue de (4.7) e de (E.2) que

$$A^z x = A^{z-1} Ax = \frac{\sin \pi(1-z)}{\pi z} \int_0^\infty s^z (s+A)^{-2} Ax \, ds = A_z x \qquad \text{(E.4)}$$

para $x \in D(A)$. Note que

$$A^{-1}A_z \subset B_z := \frac{\sin \pi z}{\pi z}\int_0^\infty s^z(s+A)^{-2}ds \in \mathcal{L}(X). \tag{E.5}$$

Seja (x_j) uma sequência em $D(A)$ tal que $x_j \to 0$ e $A_z x_j \to f$ em X. Então graças a (E.5), $B_z x_j \to 0$ e $B_z x_j \to A^{-1}f$, o que implica que $f = 0$. Portanto A_z é fechável. Motivado por (E.3) e (E.4) fazemos

$$A^z := \text{fecho de } A_z, \quad \text{Re} z = 0.$$

Daqui por diante sempre freqüentemente escreveremos $D(A^z)$ para denotar este espaço vetorial munido com a norma do gráfico de A^z. Escreveremos $Is(X,Y)$ para denotar o subespaço de $\mathcal{L}(X,Y)$ consistindo dos isomorfismos lineares de X sobre Y. Com estas considerações já provamos a maior parte do seguinte teorema.

Teorema E.1.4. *Suponha que $A \in \mathcal{P}(X)$. Então a* **potência fracionária** *A^z é, para cada $z \in \mathbb{C}$, um operador linear fechado densamente definido em X. Se* $\text{Re} z < 0$ *então $A^z \in \mathcal{L}(X)$ e é dado pela integral*

$$A^z = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^z(\lambda+A)^{-1}d\lambda, \tag{E.6}$$

onde Γ é qualquer curva simples suave por partes em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ indo de $\infty e^{-i\varphi}$ a $\infty e^{i\varphi}$ para algum $\varphi \in (0,\pi)$ tal que $\sigma(-A)$ fica estritamente a esquerda de Γ. Além disso,

(i) *A^z é a potência usual de A se z é inteiro.*

(ii) $A^z x = \dfrac{\sin \pi z}{\pi z}\displaystyle\int_0^\infty s^z(s+A)^{-2}Ax\,ds, \quad x \in D(A), \quad -1 < \text{Re} z < 1.$

(iii) *Suponha que ou $m = 0,1,2,\cdots$, $x \in D(A^{2m})$ e* $\max\{\text{Re} z, \text{Re} w\} < m$ *ou* $\text{Re} z$, $\text{Re} w$ *e* $\text{Re}(z+w)$ *não são nulos e $x \in D(A^u)$ onde $u \in \{z,w,z+w\}$, satisfaz* $\text{Re} u = \max\{\text{Re} z, \text{Re} w, \text{Re}(z+w)\}$. *Então $A^zA^wx = A^{z+w}x$.*

(iv) $A^z A^w = A^{z+w}$, $\mathrm{Re}z, \mathrm{Re}w > 0$.

(v) $D(A^w) \overset{d}{\hookrightarrow} D(A^z) \overset{d}{\hookrightarrow} X$, $0 < \mathrm{Re}z < \mathrm{Re}w$.

(vi) $A^z \in Is(D(A^{z+w}), D(A^w)) \cap Is(D(A^z), X)$, $\mathrm{Re}z, \mathrm{Re}w > 0$.

(vii) *Dado* $m = 0, 1, 2, \cdots$, *a aplicação*

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z < m\} \to \mathcal{L}(D(A^m), X), \quad z \mapsto A^z$$

é analítica.

Prova: A primeira parte da afirmativa segue de resultados que precedem o enunciado do teorema.

(i) Segue de (2.21) e de (4.8).

(ii) Se $\mathrm{Re}z \neq 0$, isto foi mostrado em (E.4) e segue da definição de A^z se $\mathrm{Re}z = 0$.

(iii) Se $\mathrm{Re}z, \mathrm{Re}w$ e $\mathrm{Re}(z+w)$ são todos distintos de zero, isto é uma consequência de (4.11) e (4.10). De (ii) e (4.4) concluímos que

$$(z \mapsto A^z) \in C^1(\{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Re}z < 1\}, \mathcal{L}(D(A), X) \cap \mathcal{L}(D(A^2), D(A))). \tag{E.7}$$

Portanto, suponha que $z, w \in \{\zeta \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Re}\zeta < 1\}$. Escolha as sequências (z_j), (w_j) em

$$\{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Re}z < 1\} \backslash \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z = 0\} =: Z \tag{E.8}$$

tal que $z_j + w_j \in Z$, $z_j \to z$ e $w_j \to w$. Então, pelo que já sabemos,

$$A^{z_j} A^{w_j} x = A^{z_j + w_j} x, \quad x \in D(A^2).$$

Portanto, fazendo $j \to \infty$, obtemos de (E.7) que (iii) é verdade se $-1 < \mathrm{Re}z, \mathrm{Re}w < 1$.

Suponha que $\mathrm{Re}z = 0$ e $\{w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}w| \geq 1\}$. Fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha - \mathrm{Re}w < 1$. Então

$$A^z A^w x = A^z A^{w-\alpha} A^\alpha x = A^{z+(w-\alpha)} A^\alpha x = A^{(z+w-\alpha)+\alpha} x = A^{z+w} x$$

para $x \in D(A^{2m})$ com $m = 2, 3, \cdots$ e $\mathrm{Re}w < m$ já que $-1 < \mathrm{Re}(w-\alpha) < 0$ e $\alpha \neq 0$.

Finalmente, seja $\mathrm{Re}z \leq -1$, $1 \leq \mathrm{Re}w$ e $\mathrm{Re}(z+w) = 0$. Escrevemos $z = r + s$ com $-1 < \mathrm{Re}r < 0$. Como as partes reais de r, w e $r + w$ são não nulas e z, r e s tem partes reais negativas, segue que $A^z = A^r A^s$ e $A^s A^w x = A^{s+w} x$ para $x \in D(A^w)$. Portanto

$$A^z A^w x = A^r A^{s+w} x, \quad x \in D(A^w) \subset D(A^{2m}).$$

Logo podemos supor que $-1 < \mathrm{Re}z < 0$. Então $\mathrm{Re}(z+w) = 0$ implica $0 < \mathrm{Re}w < 1$, de forma que estamos de volta a situação já considerada. Consequentemente, (iii) foi completamente provado.

(iv) Pelo Teorema E.1.1 e (iii) é suficiente provar que $x \in D(A^w)$ e $A^w x \in D(A^z)$ implica $x \in D(A^{w+z})$ se $\mathrm{Re}z > 0$ e $\mathrm{Re}w > 0$. Seja $f := A^z(A^w x)$. Então segue de (iii) que $x = A^{-w}(A^{-z} f) = A^{-(w+z)} f \in D(A^{w+z})$.

(v) De (4.10) e de (iii) deduzimos que

$$\|A^z x\|_X = \|A^{z-w} A^w x\|_X \leq \|A^{z-w}\|_{\mathcal{L}(X)} \|A^w x\|_X, \quad x \in D(A^w).$$

Como $x \mapsto \|A^u x\|_X$ é uma norma equivalente a norma em $D(A^u)$ para $\mathrm{Re}u > 0$, graças a limitação de A^{-u}, segue que $D(A^w) \hookrightarrow D(A^z) \hookrightarrow X$.

Dado $x \in D(A^z)$ faça $f := A^z x \in X$. Como $D(A^{w-z})$ é denso em X, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $u \in D(A^{w-z})$ tal que $\|u - f\|_X < \epsilon$. Portanto

$$v := A^{-z}u \in D(A^w) \quad \text{e} \quad \|A^z(v - x)\|_X = \|u - f\|_X < \epsilon.$$

Isto mostra que $D(A^w)$ é denso em $D(A^z)$ que, junto com (4.13) implica a afirmativa.

(vi) A primeira afirmativa segue de (iv) e a segunda é trivial.

(vii) Graças ao Teorema E.1.1 e (E.7), podemos supor que $m \geq 2$. Desde que (v) implica

$$\mathcal{L}(D(A), X) \hookrightarrow \mathcal{L}(D(A^m), X),$$

concluímos que

$$(z \mapsto A^z) \in C^1(\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}z < 1\}, \mathcal{L}(D(A^m), X)). \tag{E.9}$$

Se $0 < \mathrm{Re}z < m$ então (iii) implica que $A^z x = A^{z-m}A^m x$ para $x \in D(A^m)$. Portanto o Teorema E.1.1 garante que

$$(z \mapsto A^z) \in C^1(\{z \in \mathbb{C}; 0 < \mathrm{Re}z < m\}, \mathcal{L}(D(A^m), X)).$$

Isto juntamente com (E.9) prova o teorema.$\square$

Note que se $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial em X então A é do tipo positivo. Neste caso podemos obter outra representação útil para A^{-z} com $\mathrm{Re}z > 0$.

Teorema E.1.5. *Suponha que $-A$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ com decaimento exponencial. Então*

$$A^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1}T(t)dt, \quad \mathrm{Re}z > 0.$$

Prova: É uma conseqüência fácil de

$$\left\|\int_0^\infty t^{z-1}T(t)dt\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\int_0^\infty t^{\mathrm{Re}z-1}e^{-\sigma t}dt$$

e das propriedades conhecidas da função Γ que a aplicação

$$\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}z > 0\} \to \mathcal{L}(X), \qquad z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty t^{z-1}T(t)dt$$

é analítica. Portanto, graças ao Teorema E.1.1 é suficiente provar a igualdade para $0 < z < 1$.

Dado $z \in (0,1)$, de (4.7)

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^\infty s^{-z}(s+A)^{-1}ds.$$

Por outro lado sabemos da teoria de semigrupos que

$$(s+A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-st}T(t)\,dt, \quad s > 0.$$

Portanto pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} A^{-z} &= \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^\infty s^{-z}\int_0^\infty e^{-st}T(t)\,dt\,ds = \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^\infty T(t)\int_0^\infty s^{-z}e^{-ts}ds\,dt \\ &= \frac{\sin \pi z}{\pi}\Gamma(1-z)\int_0^\infty t^{z-1}T(t)\,dt. \end{aligned}$$

Portanto a afirmativa segue da fórmula

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z. \square$$

E.2 Potências fracionárias em espaços de Hilbert

Agora supomos que H é um espaço de Hilbert e A é um operador linear auto-adjunto definido positivo em H, isto é, $A = A^* \geq \alpha > 0$ para algum

$\alpha > 0$. Seja $\{E_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$ a resolução espectral de A. Então, dado $z \in \mathbb{C}$, podemos definir A^z por

$$A^z := \int_0^\infty \lambda^z dE_\lambda, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{E.10}$$

O teorema a seguir mostra que esta definição coincide com a anterior.

Teorema E.2.1. *Seja H um espaço de Hilbert a A um operador linear auto-adjunto definido positivo em H. Então $A \in \mathcal{P}(H)$ e as potências fracionárias definidas em (E.10) através da resolução espectral coincidem com as potências fracionárias do Teorema E.1.4.*

Prova: Primeiramente note que $\sigma(-A) \subset (-\infty, -\alpha]$ se $A = A^* \geq \alpha > 0$. Além disso,

$$(s+\alpha)\|x\|_H^2 \leq \langle (s+A)x, x\rangle \leq \|(s+A)x\|_H \|x\|_H, \quad x \in D(A),$$

implica

$$\|(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq (s+\alpha)^{-1} \leq M(1+s)^{-1}, \quad s \geq 0.$$

Portanto $A \in \mathcal{P}(H)$.

Seja Γ o contorno consistindo dos dois raios $-\beta + \mathbb{R}^+ e^{\pm i\varphi}$ para algum $\beta \in (0,\alpha)$ e $\varphi \in (0,\pi)$ e orientada de forma que as partes imaginárias cresçam ao longo de Γ. Então para $z \in \mathbb{C}$ com Re$z < 0$ e $\mu \geq \alpha$ a fórmula integral de Cauchy implica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(-\lambda)^z}{\lambda+\mu} d\lambda = \mu^z.$$

Portanto, do Teorema de Fubini e o cálculo espectral de A

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^z (\lambda + A)^{-1} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^z \int_0^\infty (\lambda+\mu)^{-1} dE_\mu \, d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(-\lambda)^z}{\lambda+\mu} d\lambda\right] dE_\mu = \int_0^\infty \mu^z dE_\mu\end{aligned}$$

em $\mathcal{L}(H)$, graças ao fato que o suporte da resolução espectral está contido em $[\alpha,\infty)$. Isto prova a afirmativa para Re$z<0$. Agora o teorema segue do cálculo espectral para operadores lineares auto-adjuntos e da definição de potências fracionárias para $A\in\mathcal{P}(H)$ dada acima.$\square$

E.3 Potências de potências fracionárias

Nesta seção apresentamos dois resultados. O primeiro deles, devido a T. Kato (veja [9]), estabelece uma fórmula para o operador resolvente de potências fracionárias. Esta fórmula é aplicada para demonstrar que é possível calcular potências fracionárias de potências fracionárias. Este mesmo resultado ainda estabelece, no caso em que A gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial, uma fórmula (devida a Yosida [22]) para para semigrupo analítico gerado por $-A^{\alpha}$ em função do semigrupo gerado por $-A$. O segundo resultado é uma conseqüência simples do primeiro e estabelece o seguinte teorema de reiteração: $(A^{\alpha})^{\beta}=A^{\alpha\beta}$.

Definição E.3.1. *Dizemos que A é do tipo (ω,M) em um espaço de Banach X se A é fechado, densamente definito e o resolvente de $-A$ contém um setor aberto $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\arg\lambda|<\pi-\omega\}$ e $\lambda(\lambda+A)^{-1}$ é uniformemente limitado em cada setor menor $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\arg\lambda|<\pi-\omega-\epsilon\}$, $\epsilon>0$ e $\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\|\leq M$, $\lambda\geq 0$ (see [9]).*

É claro que, se A é gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t):t\geq 0\}$ tal que $\|T(t)\|\leq M$ para todo $t\geq 0$, então A é do tipo $(\pi/2,M)$ (basta observar que em qualquer setor Σ_{ϕ} com $\phi<\pi/2$ temos Re$\lambda\geq|\lambda|\cos\phi$ e que neste setor $\|(\lambda+A)^{-1}\|\leq M/\text{Re}\lambda$). E já vimos também que se A é do tipo (ω,M) com $\omega<\pi/2$, então $-A$ é gerador de um semigrupo analítico

$\{T(t) : t \in \Sigma_{\phi-\pi/2}\}$ e neste caso

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t}(\lambda + A)^{-1} d\lambda, \tag{E.11}$$

onde a trajetória de integração Γ' percorre o setor $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\text{arg}\lambda| < \pi - \omega\}$ de $\infty e^{-i\nu}$ a $\infty e^{i\nu}$, $\pi/2 < \nu < \pi - \omega$.

O teorema a seguir tem importância fundamental na prova de que a todo operador dissipativo A em um espaço de Hilbert H com $0 \in \rho(A)$ podemos associar um grupo fortemente contínuo $\{A^{it} \in \mathcal{L}(H) : t \in \mathbb{R}\}$. Este resultado tem importância fundamental na caracterização dos espaços de potências fracionárias $D(A^\alpha)$ através de espaços de interpolação. A caracterização dos espaços de potência fracionárias, por sua vez, é ferramenta indispensável para tratar problemas semilineares parabólicos com crescimento críticos.

Teorema E.3.1 (Kato)**.** *Seja A um operador de tipo (ω, M) em um espaço de Banach X com $0 \in \rho(A)$ e $0 < \alpha < 1$, então*

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda + (-\mu)^\alpha}(\mu + A)^{-1} d\mu, \quad \lambda \geq 0, \tag{E.12}$$

onde Γ é um contorno como em (E.6). Deformando Γ sobre $\mathbb{R}^+$ segue que

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^\alpha (s + A)^{-1}}{s^{2\alpha} + 2\lambda s^\alpha \cos \pi\alpha + \lambda^2}\, ds, \quad \lambda \geq 0. \tag{E.13}$$

Além disso, A^α e de tipo $(\alpha\omega, M)$. Se $\alpha\omega < \pi/2$, então $-A^\alpha$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T_\alpha(t) : t \in \Sigma_{\pi/2-\alpha\omega}\}$. No caso em que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial $T_\alpha(t)$ é dado por

$$T_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty T(\tau)\int_\Gamma e^{-\tau\mu - t(-\mu)^\alpha} d\mu\, d\tau. \tag{E.14}$$

Prova: É fácil ver que a integral em (E.12) é absolutamente convergente. Denote por $R(\lambda)$ o operador linear limitado definido pelo lado direito de (E.12). É fácil ver que $R(\lambda)$ é dado por (E.13), deformando Γ sobre $\mathbb{R}^+$ e de (E.12) segue que

$$
\begin{aligned}
&(\lambda'-\lambda)R(\lambda)R(\lambda')\\
&\quad= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'}\frac{\lambda'-\lambda}{(\lambda+(-\mu)^\alpha)(\lambda'+(-\nu)^\alpha)}(\mu+A)^{-1}(\nu+A)^{-1}d\nu\,d\mu\\
&\quad= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'}\frac{\lambda'-\lambda}{(\lambda+(-\mu)^\alpha)(\lambda'+(-\nu)^\alpha)}\frac{(\mu+A)^{-1}-(\nu+A)^{-1}}{\nu-\mu}d\nu\,d\mu\\
&\quad= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda+(-\mu)^\alpha}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{1}{\nu-\mu}\frac{1}{\lambda'+(-\nu)^\alpha}d\nu\right)(\mu+A)^{-1}d\mu\\
&\quad+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda'+(-\nu)^\alpha}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{\mu-\nu}\frac{1}{\lambda+(-\nu)^\alpha}d\mu\right)(\nu+A)^{-1}d\nu\\
&\quad= 2\pi i\int_{\Gamma'}\frac{\lambda'-\lambda}{(\lambda+(-\nu)^\alpha)(\lambda'+(-\nu)^\alpha)}(\nu+A)^{-1}d\nu\\
&\quad= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{1}{\lambda+(-\nu)^\alpha}(\nu+A)^{-1}d\nu-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{1}{\lambda'+(-\nu)^\alpha}(\nu+A)^{-1}d\nu\\
&\quad= R(\lambda)-R(\lambda')
\end{aligned}
$$

onde Γ' é um contorno com as mesmas propriedades de Γ à direita de Γ. Como $R(0) = A^{-\alpha}$ tem imagem densa e núcleo trivial segue do Teorema 3.6.1 que $(\lambda + A^\alpha)^{-1} = R(\lambda)$.

Agora note que $R(\lambda)$ pode ser continuado analiticamente para o setor $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \pi - \alpha\omega\}$. Para ver isto é suficiente considerar a integral em (E.12) nos raios $\arg\mu = \pm(\pi-\omega-\epsilon)$, $\epsilon > 0$ pequeno, $|\mu| \geq 1$ e observar que sobre estes raios

$$|\lambda+(-\mu)^\alpha| = |\mu|^\alpha\left|\frac{|\lambda|}{|\mu|^\alpha}e^{i(\arg\lambda\pm\alpha(\omega+\epsilon))}+1\right|$$

de onde obtemos $|\lambda+(-\mu)^\alpha|$ é uma função contínua de μ para $\mu\in\Gamma$ tal que

$$\inf_{|\mu|\geq 1}\left|\frac{|\lambda|}{|\mu|^\alpha}e^{i(\arg\lambda\pm\alpha(\omega+\epsilon))}+1\right|=\delta>0$$

e portanto

$$|\lambda+(-\mu)^\alpha|^{-1}\leq\delta^{-1}\frac{1}{|\mu|^\alpha}$$

sempre que $|\arg\lambda|<\pi-\alpha(\omega+\epsilon)|$. Estes cálculos também mostram que $\lambda(\lambda+A^\alpha)^{-1}$ é limitada uniformemente em qualquer setor fechado contido em $\Sigma_{\pi-\alpha\omega}$. Em particular, para $\lambda>0$, (E.13) nos dá

$$\|(\lambda+A^\alpha)^{-1}\|\leq\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mu^\alpha}{\lambda^2+2\lambda\mu^\alpha\cos\pi\alpha+\mu^{2\alpha}}\frac{M}{\mu}\,d\mu=\frac{M}{\lambda}.$$

Isto completa a prova de que A^α é do tipo $(\alpha\omega,M)$.

Agora está claro que, se $\alpha\omega<\pi/2$, então $\{T_\alpha(t):t\in\Sigma_{\pi-\alpha\omega}\}$ é um semigrupo analítico. Resta apenas mostrar que este semigrupo é dado por (E.14) no caso em que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial. Neste caso existe $\epsilon>0$ tal que $-(A-\epsilon)$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo e limitado de operadores de forma que $\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\lambda>-\epsilon\}\subset\rho(-A)$. Como $\omega=\pi/2$, a trajetoria Γ em (E.12) pode ser escolhida de forma que $\mathrm{Re}\,\mu>-\epsilon$ e $|\arg(-\mu)^\alpha|\leq\phi<\pi/2$ para $\mu\in\Gamma$. Então (E.12) é válida para todo λ com $|\arg\lambda|\leq\pi-\phi(>\pi/2)$. Escolha a trajetória Γ' em (E.11) tal que esta condição está satisfeita para todo λ em Γ'. Então, lembrando que $R(\lambda)=(\lambda+A^\alpha)^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned}T_\alpha(t)&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma'}e^{\lambda t}\int_\Gamma(\lambda+(-\mu)^\alpha)^{-1}(\mu+A)^{-1}d\mu\,d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t(-\mu)^\alpha}(\mu+A)^{-1}d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t(-\mu)^\alpha}\int_0^\infty e^{-\tau\mu}T(\tau)d\tau\,d\mu\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty T(\tau)\int_\Gamma e^{-\tau\mu-t(-\mu)^\alpha}d\mu\,d\tau.\end{aligned}$$

Mostrando que $T_\alpha(t)$ é dado por (E.14).$\square$

Observação E.3.1. *O teorema anterior continua válido se eliminamos a hipótese* $0 \in \rho(A)$, *(veja [9]).*

Fechamos esta seção mostrando que podemos calcular potências de potências, um resultado que será necessário posteriormente. Para isto provamos primeiramente que se $A \in \mathcal{P}(X)$ então $A^\alpha \in \mathcal{P}(X)$ para $0 < \alpha < 1$. De fato, provamos o seguinte resultado:

Segue do Teorema E.3.1 e do Teorema E.1.4 que as potências fracionárias $(A^\alpha)^z$ estão bem definidas para $z \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in (0,1)$. No teorema a seguir nos restringimos, por simplicidade, ao caso $z \in \mathbb{R}$.

Teorema E.3.2. *Suponha que* $A \in \mathcal{P}(X)$ *e que* $0 < \alpha < 1$. *Então* $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ *para* $\beta \in \mathbb{R}$.

Prova: Graças ao Teorema E.3.1 podemos encontrar $M \geq 1$ tal que A e A^α pertencem a $\mathcal{P}(X)$ com constante M. Então do Teorema E.3.1

$$(\mu + A^\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\lambda + A)^{-1}}{\mu + (-\lambda)^\alpha}\, d\lambda, \quad \mu \in \Sigma_M,$$

onde Γ é uma curva suave por partes indo de $\infty e^{-i\nu}$ até $\infty e^{i\nu}$ em $\Sigma_M \backslash \mathbb{R}^+$, para ν suficientemente pequenos. Portanto, por (E.6) e pela fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}(A^\alpha)^{-\beta} &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma'}\int_\Gamma \frac{(-\mu)^{-\beta}}{\mu + (-\lambda)^\alpha}(\lambda + A)^{-1} d\lambda\, d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma (\lambda + A)^{-1}\int_{\Gamma'} \frac{(-\mu)^{-\beta}}{\mu + (-\lambda)^\alpha}\, d\mu\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^{-\alpha\beta}(\lambda + A)^{-1} d\lambda = A^{-\alpha\beta}\end{aligned}$$

para $\beta > 0$, onde Γ' é um contorno com as mesmas propriedades de Γ à direita de Γ. Além disso, $(A^\alpha)^\beta = [(A^\alpha)^{-\beta}]^{-1} = [A^{-\alpha\beta}]^{-1} = A^{\alpha\beta}$ para $\beta > 0$. Isto prova o teorema.$\square$

E.4 Potências imaginárias limitadas

Seja X um espaço de Banach. Um operador linear A em X é dito ter **potências imaginárias limitadas**, em símbolos,

$$A \in \mathcal{PIL} := \mathcal{PIL}(X),$$

se $A \in \mathcal{P}(X)$ e existe $\epsilon > 0$ e $M \geq 1$ tal que

$$A^{it} \in \mathcal{L}(X) \quad \text{e} \quad \|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad -\epsilon \leq t \leq \epsilon.$$

O teorema a seguir mostra que esta hipótese tem consequências muito interessantes

Teorema E.4.1. *Suponha que $A \in \mathcal{PIL}$. Então $\{A^z; \mathrm{Re} z \leq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo sobre $\mathcal{L}(X)$. Além disso, $\{A^{it}; t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo fortemente contínuo sobre X com gerador infinitesimal $i \log A$.*

Prova: Se $|t| \in [n\epsilon, (n+1)\epsilon)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\|A^{-s+it}x\| \leq \|A^{-s}(A^{i\text{sinal}(t)\epsilon})^n A^{i\text{sinal}(t)(|t|-n\epsilon)}\| \leq M^m M e^{\theta|t|}\|x\| \qquad \text{(E.15)}$$

para $0 \leq s \leq m$ e $x \in D(A^1)$, onde $\theta = \epsilon^{-1}\log M \geq 0$. Portanto, da densidade de $D(A^2)$ em X

$$\|A^z\| \leq M^{1-\mathrm{Re} z} M e^{\theta|\mathrm{Imz}|}, \mathrm{Re} z \leq 0.$$

Disto e do Teorema E.1.4 (v) e (vii), segue que $z \mapsto Z^z$ é um semigrupo fortemente contínuo em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \leq 0\}$. Agora utilizando o Teorema E.1.4 (iii) e a densidade de $D(A^2)$ em X, vemos que $\{A^z,\ \mathrm{Re} z \leq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X. Consequentemente, $\{A^{it};\ t \in R\}$ é um grupo fortemente contínuo em X.

No que se segue mostraremos que $i\log(A)$ é o gerador infinitesimal de A^{it}. Denote por B o gerador infinitesimal deste grupo e recorde que

$$Bx = \lim_{t\to 0^+} \frac{A^{it}x - x}{t}$$

se, e somente se, $x \in D(B)$. Como

$$\frac{A^{-s+i(t+\tau)}x - A^{-s+it}x}{\tau} = A^{-s+it}\frac{(A^{i\tau}x - x)}{\tau} \tag{E.16}$$

para $x \in X$, $s \geq 0$ e $t, \tau \in \mathbb{R}$ com $\tau \neq 0$, vemos que

$$BA^{-s+it}x = A^{-s+it}Bx = \frac{d}{dt}A^{-s+it}x \tag{E.17}$$

par $x \in D(B)$, $s \geq 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, a analiticidade de A^{-z} para $\mathrm{Re}z > 0$ implica

$$\frac{d}{ds}A^{-s+it}x = i\frac{d}{dt}A^{-s+it}x,\ x \in X,\ s > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\frac{d}{ds}A^{-s+it}x = \frac{d}{ds}A^{-s}A^{it}x = -\log(A)A^{-s}A^{-s+it}x$$

para $x \in X$, $s > 0$, e $t \in \mathbb{R}$, graças a $\mathrm{Im}(A^{-s}) \subset D(\log(A))$, pelo Teorema E.1.1 deduzimos de (E.16) e (E.17) que

$$(i\log(A))A^{-s+it}x = BA^{-s+it}x = A^{-s+it}Bx, s > 0, t \in \mathbb{R},$$

para $x \in D(B)$. Portanto, se $x \in D(B)$,

$$(i\log(A))A^{-s}x = BA^{-s}x = A^{-s}Bx \to Bx, \text{quando } s \to 0^+.$$

Como $i\log(A)$ é fechado e $D(\log(A)) \ni A^{-s}x \to x$ quando $s \to 0^+$ temos que $i\log(A) \supset B$. Por outro lado, como o argumento usado em (E.16) implica

$$BA^{-s+it}x = \frac{d}{dt}A^{-s+it}x, x \in X,\ s > 0,\ t \in \mathbb{R},$$

segue de (E.17) que, para $x \in D(\log(A))$,

$$iBA^{-s}x = A^{-s}(-\log(A))x \to -\log(A)x, s \to 0^+.$$

Como B é fechado e $D(B) \supset A^{-s}x \to x$ vemos que $iBx = -\log(A)$, $x \in D(\log(A))$; isto é, $B \supset i\log(A)$. Isto prova o teorema.$\square$

Corolário E.4.1. *Suponha que $A \in \mathcal{PIL}$. Então existe uma constante $M \geq 1$ e $\theta \geq 0$ tal que*

$$\|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\theta|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{E.18}$$

Prova: Segue da prova do teorema anterior fazendo $s = 0$ em (E.15).

Uma questão ainda não considerada é: Como mostrar que um determinado operador A está em $\mathcal{PIL}$? Esta é uma questão central na caracterização dos espaços X^α. Os teoremas a seguir, devido a Kato [10, 11], mostram que em espaços de Hilbert, sempre que A é gerador de um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial A tem potências imaginárias limitadas. Quando X não é um espaço de Hilbert os resultados conhecidos são muito pouco abrangentes.

Lema E.4.1. *Suponha que A é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ em um espaço de Hilbert H e que $0 < \alpha < 1$. Para todo $\epsilon > 0$ temos que $I + \epsilon A$ é também do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ de forma que $(I + \epsilon A)^\alpha$ existe e*

$$\|(I + \epsilon A)^{-\alpha}\| \leq M. \tag{E.19}$$

Prova: Para ver que $(I + \epsilon A)$ é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ note que

$$\|(s + 1 + \epsilon A)^{-1}\| = \|\epsilon((s + 1)\epsilon^{-1} + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{s + 1} \leq \frac{M}{s}. \tag{E.20}$$

Como $(I+\epsilon A)^{-1}$ é limitado (E.13) vale para $\lambda = 0$ se A é substituido por $I+\epsilon A$. Como $\|(\mu + I + \epsilon A)^{-1}\| \leq M(\mu+1)^{-1}$, segue que

$$\|(I+\epsilon A)^{-\alpha}\| \leq \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \mu^{-\alpha} M(\mu+1)^{-1} d\mu = M. \square$$

É uma conseqüência direta da definição que $A+\epsilon$ é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ sempre que A é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$.

Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador fechado, densamente definido. Definimos

$$\mathcal{H}_\alpha = \frac{A^\alpha + A^{*\alpha}}{2}, \quad \mathcal{K}_\alpha = \frac{A^\alpha - A^{*\alpha}}{2i}$$

Teorema E.4.2. *Se H um espaço de Hilbert, $A : D(A) \subset H \to H$ um operador fechado, densamente definido e maximal acretivo com $0 \in \rho(A)$, então para $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$*

$$D(A^\alpha) = D(A^{*\alpha}) = D(\mathcal{H}_\alpha) = D(\mathcal{K}_\alpha) = D_\alpha,$$

$\mathcal{H}_\alpha$ é auto-adjunto e não negativo, $\mathcal{K}_\alpha$ é anti-simétrico e para todo $u \in D_\alpha$

1. $\|K_\alpha u\| \leq \tan \frac{\pi\alpha}{2} \|\mathcal{H}_\alpha u\|$,

2. $(1 - \tan \frac{\pi\alpha}{2})\|\mathcal{H}_\alpha u\| \leq \|A^\alpha u\| \leq (1 + \tan \frac{\pi\alpha}{2})\|\mathcal{H}_\alpha u\|$

3. $\|A^{*\alpha} u\| \leq \tan \frac{\pi(1+2\alpha)}{4} \|A^\alpha u\|$

4. $\mathrm{Re}\langle A^\alpha u, A^{*\alpha} u\rangle \geq \cos \pi\alpha \|A^\alpha u\| \, \|A^{*\alpha} u\|$

5. $\mathrm{Re}\langle A^\alpha u, \mathcal{H}_\alpha u\rangle \geq \frac{(\cos \pi\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \|A^\alpha u\| \, \|\mathcal{H}_\alpha u\|$.

O mesmo vale quando trocamos A^α por $A^{*\alpha}$.

Prova: Primeiramente suponha que A é limitado e $\mathrm{Re}\langle Au, u\rangle \geq \delta\langle u, u\rangle$, $\delta > 0$ e $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Então A^α está definido para todo número complexo α por

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1}d\lambda$$

onde C é uma curva fechada, retificável e simples evitando o eixo real negativo e o zero. Segue que A^α é uma função inteira de α e o mesmo vale para $\mathcal{H}_\alpha$ e para $\mathcal{K}_\alpha$. Daí

$$\|\mathcal{H}_\alpha u\|^2 - \|\mathcal{K}_\alpha\|^2 = \mathrm{Re}\langle A^\alpha u, A^{*\alpha}u\rangle = \mathrm{Re}\langle A^{\alpha+\bar{\alpha}}u, u\rangle \tag{E.21}$$

onde a última igualdade segue do fato que $A^{*\alpha *} = A^{\bar{\alpha}}$ e esta igualdade é obtida da seguinte forma: Para todo $u, v \in H$ e C simétrica relativamente ao eixo real temos

$$\begin{aligned}\langle u, A^{*\alpha}v\rangle &= \langle u, \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^\alpha(\lambda - A^*)^{-1}d\lambda\, v\rangle \\ &= \int_C \langle u, \frac{1}{2\pi i}\lambda^\alpha(\lambda - A^*)^{-1}v\rangle d\bar{\lambda} = \int_C \langle \frac{-1}{2\pi i}\bar{\lambda}^{\bar{\alpha}}((\lambda - A^*)^{-1})^*u, v\rangle d\bar{\lambda} \\ &= \langle \int_{-C}\frac{1}{2\pi i}\bar{\lambda}^{\bar{\alpha}}((\bar{\lambda} - A)^{-1})u\, d\bar{\lambda}, v\rangle = \langle A^{\bar{\alpha}}u, v\rangle\end{aligned}$$

(na última integral a mudança de λ para $\bar{\lambda}$ inverte a orientação da curva) e $A^{*\alpha *} = A^{\bar{\alpha}}$. Segue que

$$\|\mathcal{K}_\alpha\| \leq \|\mathcal{H}_\alpha\|, \quad -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\alpha \leq \frac{1}{2}, \tag{E.22}$$

isto é óbvio para $0 \leq \mathrm{Re}\alpha \leq \frac{1}{2}$ pois A^β é acretivo se $0 \leq \beta \leq 1$ enquanto para $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\alpha \leq 0$ é suficiente mostrar que A^{-1} é acretivo e isto segue de

$$\mathrm{Re}\langle A^{-1}u, u\rangle = \mathrm{Re}\langle A^{-1}u, AA^{-1}u\rangle \geq \delta\|A^{-1}u\| \geq \delta\|A\|^{-2}\|u\| \geq 0 \tag{E.23}$$

e segue de (E.21) que

$$\|\mathcal{H}_\alpha u\|^2 \geq \mathrm{Re}\langle A^{2\xi}u, u\rangle \geq \delta^{2\xi}\|u\|^2, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \xi = \mathrm{Re}\alpha$$

e de (E.23) temos que

$$\|\mathcal{H}_\alpha u\|^2 \geq \mathrm{Re}\langle A^{2\xi}u, u\rangle \geq (\delta\|A\|^{-2})^{2|\xi|}\|u\|^2 \quad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq 0.$$

Estas desigualdades mostram que $\mathcal{H}_\alpha$ tem inversa limitada $\mathcal{H}_\alpha^{-1}$ para $|\mathrm{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}$. O domínio de $\mathcal{H}_\alpha^{-1}$ é H para $\alpha \in \mathbb{R}$ pois $\mathcal{H}_\alpha$ é auto-adjunto (auto-adjunto e coercivo é sobre). Como $\mathcal{H}_\alpha$ é contínuo em α segue que $\mathcal{H}_\alpha$ tem domínio H para todo α com $|\mathrm{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}$. E com isto (E.22) é equivalente a

$$\|\mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-1}\| \leq 1, \quad |\mathrm{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}.$$

Agora considere a função

$$T(\alpha) = \frac{1}{\tan\frac{\pi\alpha}{2}}\mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-1}.$$

$T(\alpha)$ é uma função analítica em $|\mathrm{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}$ pois $\mathcal{K}_\alpha$ tem um zero em $\alpha = 0$. Como $|\tan\frac{\pi\alpha}{2}| = 1$ para α na fronteira da faixa segue que $\|T(\alpha)\| \leq 1$ na fronteira da faixa e portanto na faixa inteira. Restringindo α a $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ temos que (1) vale e mais

$$\|\mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-1}\| \leq |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|, \quad |\mathrm{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\|\mathcal{K}_\alpha u\| \leq |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|\,\|\mathcal{H}_\alpha u\|, \quad u \in H, \quad |\mathrm{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}.$$

A desigualdade (2), $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, segue de (1) notando que $A^\alpha = \mathcal{H}_\alpha + i\mathcal{K}_\alpha$ e (3) segue de (2) notando que $(1+\tan\frac{\pi\alpha}{2})/(1-\tan\frac{\pi\alpha}{2}) = \tan\frac{\pi(1+2\alpha)}{4}$. Para provar (4) substituímos $\mathcal{H}_\alpha = (A^\alpha + A^{*\alpha})/2$ e $\mathcal{K}_\alpha = (A^\alpha - A^{*\alpha})/(2i)$ em (1) para obter

$$\tan\frac{\pi\alpha}{2}\|(A^\alpha + A^{*\alpha})u\| \leq \|(A^\alpha - A^{*\alpha})u\|.$$

Elevando a expressão acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$0 \leq (\cos^2\frac{\pi\alpha}{2} - \sin^2\frac{\pi\alpha}{2})(\|A^\alpha u\|^2 + \|A^{*\alpha}u\|^2) - 2\mathrm{Re}\langle A^\alpha u, A^{*\alpha}u\rangle$$

e

$$2\mathrm{Re}\langle A^{\alpha}u, A^{*\alpha}u\rangle \geq \cos\pi\alpha(\|A^{\alpha}u\|^2 + \|A^{*\alpha}u\|^2) \geq 2\cos\pi\alpha\|A^{\alpha}u\|\|A^{*\alpha}u\|$$

o que prova (4). A prova de (5) é obtida substituindo $i\mathcal{K}_{\alpha} = A^{\alpha} - \mathcal{H}_{\alpha}$ em (1) o que nos dá

$$\|A^{\alpha}u - \mathcal{H}_{\alpha}u\| \leq \tan\frac{\pi\alpha}{2}\|\mathcal{H}_{\alpha}u\|$$

que quando elevada ao quadrado nos dá

$$\|A^{\alpha}u\|^2 - \langle A^{\alpha}u, \mathcal{H}_{\alpha}u\rangle - \langle \mathcal{H}_{\alpha}u, A^{\alpha}u\rangle + \|\mathcal{H}_{\alpha}u\|^2 \leq \tan^2\frac{\pi\alpha}{2}\|\mathcal{H}_{\alpha}u\|^2$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\langle A^{\alpha}u, \mathcal{H}_{\alpha}u\rangle &\geq (1 - \tan^2\frac{\pi\alpha}{2})\|\mathcal{H}_{\alpha}u\|^2 + \|A^{\alpha}u\|^2 \\
&\geq 2(1 - \tan^2\frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{2}}\|\mathcal{H}_{\alpha}u\|\,\|A^{\alpha}u\| \\
&\geq 2\frac{(\sin^2\frac{\pi\alpha}{2} - \cos^2\frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\|\mathcal{H}_{\alpha}u\|\,\|A^{\alpha}u\| \\
&= 2\frac{(\cos\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\|\mathcal{H}_{\alpha}u\|\,\|A^{\alpha}u\|
\end{aligned}$$

e (5) segue.

Em seguida suponha que A é ilimitado mas ainda tem inversa limitada. Seja

$$J_n = (I + n^{-1}A)^{-1}, \quad A_n = AJ_n = n(I - J_n), n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Então $\|J_n\| \leq 1$ para todo n pois A é do tipo $(\pi/2, 1)$. Portanto os A_n são também limtados e de

$$\langle A_nu, u\rangle = \langle AJ_nu, (I + n^{-1}A)J_nu\rangle = \langle AJ_nu, J_nu\rangle + n^{-1}\|AJ_nu\|$$

de onde conluímos que A_n é acretivo e

$$\|A_nu\|\,\|u\| \geq \langle Au, u\rangle \geq n^{-1}\|A_nu\|$$

o que implica $\|A_n\| \leq n$. Além disso $A_n^{-1} = A^{-1} + n^{-1}I$ e A_n^{-1}, $n = 1, 2, 3, \cdots$ é uniformemente limitada. Portanto as desigualdades (1) a (5) são válidas para A_n, $\mathcal{H}_{n\alpha}$ e $\mathcal{K}_{n\alpha}$. A seguir mostraremos as mesmas desigualdades para A tomando o limite quando $n \to \infty$ com as caracterizações necessárias dos domínios.

Para este fim, primeiramente note que

$$A_n^\alpha = A^\alpha J_n^\alpha \supset J_n^\alpha A^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Aqui $J_n^\alpha = (I + n^{-1}A)^{-\alpha}$ que existe pois $I + n^{-1}A$ é maximal acretivo e a relação acima segue de $J_n^\alpha = (A^{-1}A_n)^\alpha = A^{-\alpha}A_n^\alpha = A_n^\alpha A^{-\alpha}$ que é uma simples conseqüência do cálculo operacional. Note ainda que

$$\|J_n^\alpha\| \leq 1 \quad \text{e} \quad J_n^\alpha \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

A desigualdade acima segue do Lema E.4.1. Para verificar a igualdade acima note que

$$(I + n^{-1}A)^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu + I + n^{-1}A)^{-1}}{\mu} d\mu.$$

E como

$$n(\mu+1)(n(\mu+1) + A)^{-1} \frac{1}{\mu+1} x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu+1} x$$

e

$$\|\frac{(\mu+1+A)^{-1}}{\mu^\alpha}\| \leq \frac{1}{(\mu+1)\mu^\alpha},$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$(I + n^{-1}A)^{-\alpha} x \to \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(\mu+1)\mu^\alpha} d\mu \, x = x.$$

Suponha agora que $u \in D(A^\alpha)$, então $A_n^\alpha u = J_n A^\alpha u$ e portanto

$$\|A_n^\alpha u\| \leq \|A^\alpha u\|, \quad n \geq 1$$

$$A_n^\alpha u \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Au,$$

mas para $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$,

$$\|A_n^\alpha u\| \le \tan\frac{\pi(1+2\alpha)}{4}\|A_n^\alpha\| \le \tan\frac{\pi(1+2\alpha)}{4}\|A^\alpha u\|$$

pois (3) vale para A_n. Isto mostra que $\|A_n^\alpha u\|$ é limitada e portanto toda subseqüência possui subseqüência fracamente convergente. Ainda, para $v \in D(A^\alpha)$

$$\langle A_n^{*\alpha} u, v\rangle = \langle A_n^{\alpha *} u, v\rangle = \langle u, A_n^\alpha v\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle u, A^\alpha v\rangle$$

e portanto $A_n^{*\alpha} u \overset{w}{\longrightarrow} f$ e $\langle f, v\rangle\langle u, A^\alpha v\rangle$, para todo $v \in D(A^\alpha)$. Isto implica que $u \in D(A^{*\alpha}) = D(A^{\alpha *})$ e $f = A^{*\alpha}u = A^{\alpha *}u$. O mesmo argumento acima mostra que $A_n^{*\alpha} \overset{s}{\longrightarrow} A^{*\alpha}y$. Em vista da relação simétrica entre A e A^* fica provado que $D(A^\alpha) = D(A^{*\alpha}) = D_\alpha$ e que $A_n^\alpha u \to A^\alpha u$, $A_n^{*\alpha} u \to A^{*\alpha}u$, para todo $u \in D_\alpha$.

Os operadores $\mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{K}_\alpha$ definidos anteriormente tem domínio D_α e $\mathcal{H}_{n\alpha}u \to \mathcal{H}_\alpha u$, $\mathcal{K}_{n\alpha}u \to \mathcal{K}_\alpha u$, para todo $u \in D_\alpha$. Segue das desigualdades (1) a (5) para A_n^α, $A_n^{*\alpha}$, $\mathcal{H}_{n\alpha}$ e $\mathcal{K}_{n\alpha}$, $u \in D_\alpha$, tomando o limite quando $n \to \infty$, que as desigualdades (1) a (5) para A^α, $A^{*\alpha}$, $\mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{K}_\alpha$ valem para $u \in D_\alpha$. $\square$

Observação E.4.1. *O teorema acima é devido a Kato que em [10] prova uma versão mais geral do resultado acima, sem a hipótese de* $0 \in \rho(A)$.

Teorema E.4.3. *Seja A um operador limitado e maximal acretivo em um espaço de Hilbert H. Então A^α pode ser estendido a α complexo de forma que seja analítico para* $\mathrm{Re}\alpha > 0$ *e*

$$\|A^\alpha\| \le \frac{\sin\pi\xi'}{\pi\xi'(1-\xi')}\|A\|^\xi e^{\pi\frac{|\eta|}{2}} \le \frac{4}{\pi}\|A\|^\xi\|e^{\pi\frac{|\eta|}{2}}, \quad \alpha = \xi + i\eta, \xi' = \xi - [\xi]. \quad \text{(E.24)}$$

Se A não tem autovalor nulo A^α pode ser estendido a $\mathrm{Re}\alpha \geq 0$ *de forma que A^α é fortemente contínuo e (E.24) vale para* $\mathrm{Re}\alpha \geq 0$. *Em particular $A^{i\eta}$ é um semigrupo fortemente contínuo em η com $\|A^{i\eta}\|| \leq e^{\pi\frac{|\eta|}{2}}$.*

Prova: As potências A^α de A podem ser definidas para $0 < \mathrm{Re}\alpha < 1$ por

$$A^\alpha = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} A(\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

Já vimos que A^α é analítica para $\mathrm{Re}\alpha > 0$ e que $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ para α e β com parte real positiva. Segue que, para $0 < \xi < 1$

$$\begin{aligned} \|A^\xi\| &\leq \frac{\sin \pi\xi}{\pi} \left\{ \int_0^{\|A\|} \lambda^{\xi-1} d\lambda + \|A\| \int_{\|A\|}^\infty \lambda^{\xi-2} d\lambda \right\} \leq \frac{\sin \pi\xi}{\pi} \left\{ \frac{\|A\|^\xi}{\xi} + \frac{\|A\|^\xi}{1-\xi} \right\} \\ &= \frac{\sin \pi\xi}{\pi} \frac{\|A\|^\xi}{\xi(1-\xi)} \leq \frac{4}{\pi} \|A\|^\xi \end{aligned}$$

onde usamos que $\|A(\lambda + A)^{-1}\| \leq \min(1, \lambda^{-1}\|A\|)$. Suponha por um instante que $\mathrm{Re}A \geq \delta > 0$ de forma que A^α está definido para todo α complexo e mostremos que

$$\|A^{it}\| \leq e^{\pi\frac{|\eta|}{2}}. \tag{E.25}$$

Disto (E.24) notando que $A^\alpha = A^{\xi + i\eta} = A^{[\xi]} A^{\xi'} A^{i\eta}$.

O caso geral segue substituindo A por $A + \epsilon$ e fazendo $\epsilon \to 0$.

Para mostrar (E.25) observe que $A^\alpha = \mathcal{H}_\alpha + i\mathcal{K}_\alpha$ e $A^{*\alpha} = \mathcal{H}_\alpha - i\mathcal{K}_\alpha$, $\|\mathcal{K}_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{-1}\| \leq |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|$. Portanto

$$\|A^{*\alpha} A^{-\alpha}\| \leq \frac{1 + |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|}{1 - |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|}$$

que para $\alpha = i\eta$ nos dá

$$\|A^{i\eta}\|^2 \leq \|A^{*-i\eta} A^{i\eta}\| \leq e^{\pi|\eta|} \tag{E.26}$$

provando (E.25). Aqui usamos que

$$\langle A^{*-i\eta}A^{i\eta}u, u\rangle = \langle A^{i\eta}u, A^{*-i\eta *}u\rangle = \|A^{i\eta}u\|^2$$

para concluir a primeira igualdade em (E.26) e

$$\begin{aligned} \tan \pi\frac{i\eta}{2} &= \frac{e^{\pi\frac{-\eta}{2}} - e^{\pi\frac{+\eta}{2}}}{e^{\pi\frac{-\eta}{2}} + e^{\pi\frac{\eta}{2}}}, \\ 1 + |\tan \pi\frac{i\eta}{2}| &= \frac{2e^{-\pi\frac{\eta}{2}}}{e^{-\pi\frac{\eta}{2}} + e^{+\pi\frac{\eta}{2}}}, \\ 1 - |\tan \pi\frac{i\eta}{2}| &= \frac{2e^{\pi\frac{\eta}{2}}}{e^{-\pi\frac{\eta}{2}} + e^{+\pi\frac{\eta}{2}}} \end{aligned}$$

e

$$\frac{1 + |\tan \pi\frac{i\eta}{2}|}{1 - |\tan \pi\frac{i\eta}{2}|} = e^{\pi|\eta|}.$$

Mostremos que $\alpha \to A^\alpha$ é contínuo para $u \in H$, $\alpha \in \{\xi + i\eta \in C : 0 < \xi \leq 1, |\eta| \leq R\}$. Como A^α é limitado para $\alpha \in D$ por (E.24) é suficiente mostra isto para um denso de H. Se A não tem autovalor nulo a imagem de A é densa como mostra o lema a seguir, logo é suficiente mostrar que isto vale para $u = Av$. Então $A^\alpha u = A^{1+\alpha}v$ e isto é obviamente uniformemente contínuo em D.$\square$

Lema E.4.2. *Se H é um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador fechado e maximal acretivo, então*

$$H = \overline{D(A)}.$$

Se A é fechado e maximal acretivo e 0 não é um auto-valor de A, então $\overline{R(A)} = H$.

Prova: Basta ver que se A é fechado e maximal acretivo, então do Teorema 3.4.3, A tem domínio denso. A segunda afirmativa segue do fato que se A é fechado, maximal acretivo e 0 não é um autovalor de A, então sua inversa sobre a imagem é um operador fechado e maximal acretivo.$\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623–727. MR 0125307 (23 #A2610)

[2] H. Amann, *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. MR 96g:34088

[3] H. Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829 (2012a:35002)

[4] P. Chernoff, *Note on product formulas for operator semi-groups*, J. Func. Anal. **2** (1968), 238–242.

[5] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 194, Springer-Verlag, New York, 2000, With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt. MR 1721989 (2000i:47075)

[6] Gerald B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999, Modern

techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. MR 1681462 (2000c:00001)

[7] D. B. Henry, *Semigroups*, Handwritten Notes, IME-USP, São Paulo SP, Brazil, 1981.

[8] Einar Hille and Ralph S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974, Third printing of the revised edition of 1957, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI. MR 0423094 (54 #11077)

[9] T. Kato, *Note on fractional powers of linear operators*, Proc. Japan Acad. **36** (1960), 94–96.

[10] ———, *Fractional powers of dissipative operators*, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 246–274.

[11] ———, *Fractional powers of dissipative operators, ii*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 242–248.

[12] ———, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition. MR 96a:47025

[13] Tosio Kato, *Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semi-groups*, Proc. Japan Acad. **35** (1959), 467–468. MR 0117570 (22 #8347)

[14] J. L. Kelley, *General topology*, Ishi Press International, New York, 2008, Reprint of the 1955 edition. MR 0370454 (51 #6681)

[15] J. Neveu, *Théorie des semi-groupes de Markov*, Univ. California Publ. Statist. **2** (1958), 319–394. MR 0102752 (21 #1538)

[16] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983. MR 85g:47061

[17] C. T. Scarborough and A. H. Stone, *Products of nearly compact spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 131–147. MR 0203679 (34 #3528)

[18] H. F. Trotter, *Approximation of semi-groups of operators*, Pacific J. Math. **8** (1958), 887–919. MR 0103420 (21 #2190)

[19] Genadi Vainikko, *Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden*, B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1976, Mit Englischen und Russischen Zusammenfassungen, Teubner-Texte zur Mathematik. MR 0468159 (57 #7997)

[20] Robert Whitley, *An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem*, Math. Ann. **172** (1967), 116–118. MR 0212548 (35 #3419)

[21] ______, *The Kreĭn-Šmulian theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 2, 376–377. MR 835903 (87g:46020)

[22] K. Yosida, *Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semigroups generated by them*, Proc. Japan Acad. **36** (1960), 86–89.