Definição: Dizemos que duas sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ são eventualmente iguais se existe $N^\star$ tal que

$$a_n = b_n, \text{ qualquer que seja } n \geq N^\star.$$

A partir da definição acima, é evidente que se $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ são eventualmente iguais, então uma converge se, e somente se, a outra converge, em cujo caso vale

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Seja $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ uma função estritamente crescente. Então $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ é uma subsequência de $(a_n)_{n\geq 1}$. Suponha que $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus f(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ é um conjunto finito. Então a subsequência $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ é a própria sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ a menos de uma quantidade finita de termos; daí, é claro que $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ e $(a_n)_{n\geq 1}$ são eventualmente iguais e, portanto, $(a_n)_{n\geq 1}$ converge se, e somente se, $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ converge, em cujo caso vale

$$\lim_{n\to\infty} a_{f(n)} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Definição: Seja $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ uma função estritamente crescente tal que $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus f(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ é infinito. Então existe uma única função $\mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$, que será denotada por $f^\star$ e chamada de "complementar de f", que satisfaz

— $f^\star$ também é estritamente crescente,
— $f(\mathbb{Z}_{\geq 1}) \cap f^\star(\mathbb{Z}_{\geq 1}) = \emptyset$, e
— $f(\mathbb{Z}_{\geq 1}) \cup f^\star(\mathbb{Z}_{\geq 1}) = \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Note que o próprio conjunto $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus f(\mathbb{Z}_{\geq 1}) = f^\star(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ num certo sentido define a função $f^\star$. Por último, para uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, diremos que a subsequência $(a_{f^\star(n)})_{n\geq 1}$ é a subsequência complementar da subsequência $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$.

Por exemplo: se $f(n) \overset{\text{def}}{=} 2n$, então $f^\star(n) = 2n - 1$.

Teorema: Sejam $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ uma função estritamente crescente tal que $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus f(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ é infinito e $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência qualquer. Suponha que ambas subsequências $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ e $(a_{f^\star(n)})_{n\geq 1}$ convergem e que

$$\lim_{n\to\infty} a_{f(n)} = \lim_{n\to\infty} a_{f^\star(n)}.$$

Então $(a_n)_{n\geq 1}$ também converge e

$$\lim_{n\to\infty} a_{f(n)} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{f^\star(n)}.$$

Demonstração: Seja $a \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} a_{f(n)}$ e tome $\varepsilon > 0$. Existem N_1 e N_2 tais que

$$\text{se } n \geq N_1 \text{ então } |a_{f(n)} - a| < \varepsilon \text{ e se } n \geq N_2 \text{ então } |a_{f^\star(n)} - a| < \varepsilon.$$

Sejam $N' \overset{\text{def}}{=} \text{máx}\{N_1, N_2\}$ e $N \overset{\text{def}}{=} \text{máx}\{f(N'), f^\star(N')\}$. Tome $n \geq N$. De duas, uma: ou $n = f(k)$ ou $n = f^\star(k)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ (pois $f(\mathbb{Z}_{\geq 1}) \sqcup f^\star(\mathbb{Z}_{\geq 1}) = \mathbb{Z}_{\geq 1}$). Suponha que $n = f(k)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Então

$$f(k) = n \geq N \geq f(N') \geq f(N_1) \Longleftrightarrow k \geq N_1,$$

de modo que $|a_n - a| = |a_{f(k)} - a| < \varepsilon$. Se fosse $n = f^\star(k)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, então de maneira análoga acontece que $k \geq N_2$ e, portanto, $|a_n - a| = |a_{f^\star(k)} - a| < \varepsilon$. Em ambos os casos vale, para qualquer $n \geq N$,

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Como o $\varepsilon > 0$ tomado inicialmente é arbitrário, concluimos que $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

O teorema anterior diz essencialmente o seguinte: se uma sequência possui uma subsequência que converge para a e é tal que sua correspondente complementar também converge para a, então a sequência original também converge para a. Em particular, se os termos com índice par e os termos com índice ímpar de uma sequência convergem para um mesmo número real a, então a sequência converge para o mesmo número real a.