1. Calcule o valor exato de
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$
Dica: avalie uma série de potências (em torno de 0) num ponto particular.

2. Seja $f \in \mathrm{PWC}([-L, L])$ e $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ seus coeficientes de Fourier, como de costume.

   (a) Mostre que as sequências $(a_n\sqrt{n})_{n\geq 1}$ e $(b_n\sqrt{n})_{n\geq 1}$ são limitadas. Dica: lembre que os coeficientes de Fourier de f são "quadrado somáveis", *i.e.*, as séries definidas pelos quadrados dos coeficientes de Fourier convergem (desigualdade de Bessel).

   (b) Mostre que $\liminf a_n\sqrt{n} \leq 0$, $\limsup a_n\sqrt{n} \geq 0$ e $\liminf |a_n\sqrt{n}| = 0$. É claro que o mesmo vale se trocarmos a_n por b_n. Note que, para uma sequência $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ qualquer, os números reais $\liminf \alpha_n$ e $\liminf |\alpha_n|$ a princípio não possuem nenhuma relação.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2L$-periódica e integrável. Mostre que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ vale
$$\int_{x_0-L}^{x_0+L} f = \int_{-L}^{L} f$$

4. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. A equação
$$y'' - 2 \cdot x \cdot y' + \lambda \cdot y = 0$$
é chamada de equação de Hermite. Note que suas soluções são funções analíticas em $\mathbb{R}$.

   (a) Expresse a solução geral da equação de Hermite como série de potências em torno de 0, *i.e.*, encontre os coeficientes da dita série. Sejam $y_{\lambda,0}(x)$ e $y_{\lambda,1}(x)$ as soluções (linearmente independentes) da equação de Hermite que satisfazem as condições iniciais $y_{\lambda,0}(0) = 1 = y'_{\lambda,1}(0)$ e $y'_{\lambda,0}(0) = 0 = y_{\lambda,1}(0)$.

   (b) Suponha que $\lambda = 2m$, onde $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Mostre que se m é par (resp. ímpar), $y_{2m,0}(x)$ (resp. $y_{2m,1}(x)$) é um polinômio de grau m. A menos de multiplicação por uma constante, os polinômios em questão são os assim chamados polinômios de Hermite, denotados por H_m (quando $\lambda = 2m$).

   A título de curiosidade, os polinômios de Hermite surgem nas soluções da equação de Schrödinger do oscilador harmônico quântico.

5. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \overset{\text{def}}{=} 1 - x^2$.

   (a) Calcule os coeficientes e, consequentemente, a série de Fourier de f.

   (b) A extensão de f a uma função 2-periódica em $\mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$? Se não, em quais pontos ela não é contínua?

   (c) A extensão de f a uma função 2-periódica em $\mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$? Se não, em quais pontos ela não é diferenciável?

   (d) Mostre que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(e) Use a igualdade acima e a seguinte igualdade (que vimos em aula)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

identidade que também pode ser obtida a partir da avaliação de $S_f(x)$ em $x = 1$.

(f) Finalmente, obtenha a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, \text{ se } x \neq 1 \\ -1, \text{ se } x = 1 \end{cases} .$$

A menos de valores nos extremos do intervalo $[-1, 1]$, a (extensão a uma função 2-periódica em $\mathbb{R}$ da) função f definida acima é conhecida como onda dente de serra (*sawtooth wave*).

6. Seja $f \in \mathrm{PWC}_\omega(\mathbb{R})$ uma função $2L$-periódica de classe C^1. Suponha que f' seja diferenciável em $[-L, L]$ exceto, no máximo, por uma quantidade finita de pontos e que $f'' \in \mathrm{PWC}([-L, L])$ (lembre: os valores de f'' nos pontos onde f' não é diferenciável são irrelevantes). Nessas condições as séries de Fourier de f e f' convergem uniformemente a f e f', respectivamente. Mostre que

$$\int_{-L}^{L} (f')^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{L^2} |\hat{f}(n)|^2.$$

7. Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \exp(x), \text{ se } x \leq 0 \\ \exp(-x), \text{ se } x \geq 0 \end{cases} .$$

(a) Calcule a série de Fourier de f.

(b) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2} = \frac{\pi + e^{-\pi} - 1}{2}.$$

(c) Mostre que

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{10} + \frac{5}{26} - \frac{7}{50} + \frac{9}{82} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{1 + (2n+1)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

onde sech denota a função secante hiperbólica (inverso multiplicativo da função cosseno hiperbólico). Dica: considere a derivada de f.

8. O processo de amortização de dívida funciona da seguinte maneira. Considere as seguintes quantidades e suas defincões:

— $P_0 \in \mathbb{R}_{>0}$: valor do empréstimo/dívida;

— $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$: quantidade de períodos de tempo (*e.g.*: meses ou anos) que levarão para a dívida ser paga; e

— $r \in \mathbb{R}_{>0}$: taxa de juros (por período de tempo).

A dívida é paga, a cada período de tempo, em parcelas de igual valor P, de tal forma que ela fique liquidada após N períodos de tempo. Mas a cada período de tempo, o balanço da dívida (a quantidade que ainda falta pagar) é acrescido pela taxa de juros; mais precisamente, denotando por B_i o balanço da dívida após o i-ésimo período de tempo, e fazendo $B_0 \stackrel{\text{def}}{=} P_0$, temos que

$$B_{i+1} = (1+r) \cdot B_i - P.$$

A condição que diz que a dívida deve ser liquidada após N períodos de tempo se traduz na igualdade $B_N = 0$.

(a) Mostre que
$$P = \frac{P_0(1+r)^N r}{(1+r)^N - 1}.$$

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(r) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{P_0(1+r)^N r}{(1+r)^N - 1}, & \text{se } x \neq 0 \\ P_0/N, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$
Mostre que f é contínua.

(c) É fato que f é analítica em $\mathbb{R}$. Calcule as duas primeiras derivadas de f em 0.

(d) Use o item (c) para mostrar que o truncamento da série de Taylor de f em torno de 0 até grau 1 é
$$\frac{P_0}{N}\left(1 + \frac{(N+1)r}{2}\right). \tag{$\star$}$$
Se r é muito pequeno, podemos aproximar o valor da parcela da dívida (item (a)) usando o truncamento ($\star$). A título de curiosidade, uma expressão ligeiramente diferente de ($\star$), a saber:
$$\frac{P_0}{N}\left(1 + \frac{Nr}{2}\right),$$
era muito usada por comerciantes e mercadores do oriente médio até meados do século passado.

(e) Compare as expressões anteriores com aquelas fornecidas pelo simulador de financiamento na página do Banco Central do Brasil.

9. Para $s \in \mathbb{R}$, seja
$$\mathrm{Li}_s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s}.$$
Note que Li_0 é a série geométrica (com termo inicial x).

(a) Mostre que, para todo $s \in \mathbb{R}$, o raio de convergência da série acima é 1. A função $\mathrm{Li}_s :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ é chamada de função polilogarítmica, ou função de Jonquière, de ordem s.

(b) Mostre que, em $]-1,1[$, vale

$$\mathrm{Li}_{s+1}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{Li}_s(t)}{t}.$$

Em particular, se $x \neq 0$, o teorema fundamental do cálculo garante que vale $\mathrm{Li}_s'(x) = \mathrm{Li}_{s-1}(x)/x$ qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$. Mas a igualdade anterior claramente é válida para $x = 0$: basta comparar as séries correspondentes.

(c) Sabendo que $\mathrm{Li}_0(x) = x/(1-x)$, use o item (b) para calcular Li_{-1}, Li_{-2} e Li_{-3}.

(d) Compare o item (c) com o exercício 1.

A título de curiosidade: para $s > 0$, as funções Li_s possuem representações em termos de integrais das distribuições de Fermi-Dirac (para partículas que obedecem o princípio da exclusão de Pauli) e de Bose-Einstein (para partículas que não obedecem o princípio da exclusão de Pauli), onipresentes em física estatística.