1. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções diferenciáveis em um intervalo $[a,b]$ que satisfaz

   — $f_n \overset{n\to\infty}{\dashrightarrow} f$

   — f_n' é integrável para todo $n \geq 1$

   — $f_n' \xrightarrow{n\to\infty} g$, onde g é contínua em $[a,b]$.

   Vimos em aula que, sob as condições acima, a função f é diferenciável em $[a,b]$ e vale $f' = g$. Mostre que na verdade $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$. Dica: use o teorema fundamental do cálculo.

2. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

   Considere a sequência de funções $(f_n)_{n\geq 1}$ em $[-1,1]$ definida por

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} f\left(\frac{x}{n}\right).$$

   (a) Mostre que $f_n \overset{n\to\infty}{\dashrightarrow} 0$, onde 0 é a função constante igual a 0.

   (b) Mostre que f_n é diferenciável para todo $n \geq 1$.

   (c) Mostre que, para todo $n \geq 1$, f_n' é integrável, embora seja descontínua em 0.

   (d) Mostre que $f_n' \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

3. Considere a sequência de funções $(f_n)_{n\geq 1}$ em $[-\pi/2, \pi/2]$ definida por

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} (\cos(x))^n.$$

   Note que, para qualquer $n \geq 1$, f_n é diferenciável e f_n' é integrável (posto que contínua). A sequência de funções $(f_n')_{n\geq 1}$ converge uniformemente? Se não, ela converge pontualmente?

4. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções em $\mathbb{R}$ que satisfaz

$$0 \leq f_n(x) \leq 1$$

   quaisquer que sejam $n \in \mathbb{Z}_{n\geq 1}$ e $x \in \mathbb{R}$. Suponha que a sequência $(\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x))_{n\geq 1}$ converge; é verdade que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniforme ou pontualmente?

5. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a sequência de funções em $I \overset{\text{def}}{=}]-1,1[$ dada por

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

   (a) Mostre que $f_n \in C^\infty(I)$ qualquer que seja $n \geq 1$.

   (b) Mostre que $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{x^2} = |x|$.

   (c) Conclua que uma sequência de funções suaves pode convergir uniformemente para uma função que não é diferenciável.

6. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a sequência de funções em $\mathbb{R}_{>0}$ dada por

$$f_1(x) \overset{\text{def}}{=} x \text{ e, para } n \geq 1,\ f_{n+1}(x) \overset{\text{def}}{=} (\phi \circ f_n)(x),$$

onde $\phi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ é a função $\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2x}$. Note que a sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ está bem definida, *i.e.*, a imagem de f_n está contida no domínio de ϕ para todo $n \in \mathbb{Z}_{n\geq 1}$.

(a) A sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente? Se sim, qual é seu limite pontual?

(b) Se a sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente, ela converge uniformemente?

7. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a sequência de funções em $\mathbb{R}_{>0}$ dada por

$$f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \text{ e, para } n \geq 1,\ f_{n+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi \circ f_n)(x),$$

onde $\psi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ é a função $\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1/x$. Note que a sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ está bem definida, *i.e.*, a imagem de f_n está contida no domínio de ψ para todo $n \in \mathbb{Z}_{n\geq 1}$.

(a) A sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente? Se sim, qual é seu limite pontual?

(b) Se a sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente, ela converge uniformemente?

8. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sequências de números reais que satisfazem

— $(a_n)_{n\geq 1}$ é monótona e converge para 0, e

— as somas parciais da série definida por $(b_n)_{n\geq 1}$ são limitadas, *i.e.*, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $|\sum_{n=1}^{N} b_n| \leq M$.

Seja $(S_n)_{n\geq 1}$ a série definida por $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$, *i.e.*, $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$. O objetivo deste exercício é mostrar que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge, resultado conhecido teste de Dirichlet.

(a) Seja $(B_n)_{n\geq 1}$ a série (sequência das somas parciais) definida por $(b_n)_{n\geq 1}$. Mostre que para qualquer $n \geq 2$ vale

$$S_n = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}).$$

A expressão acima é por vezes chamada de "somação" por partes (ou transformada de Abel) por lembrar a expressão da integração por partes.

(b) Note que a primeira parcela na soma acima converge para zero, *i.e.*, $a_n B_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(c) Mostre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} M|a_k - a_{k+1}| < \infty.$$

Com isso, conclua que também vale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(a_k - a_{k+1}) < \infty.$$

(d) Finalmente, conclua que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

9. Seja

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

uma série de potências que converge no intervalo $]-1,1[$. Suponha que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. O objetivo deste exercício é mostrar o teorema da convergência radial de Abel, que diz que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

(a) Seja $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k$. Use a mesma ideia do item (a) do exercício 8 para mostrar que vale

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = x^N S_N + (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n.$$

quaisquer que sejam $x \in \mathbb{R}$ e $N \geq 2$.

(b) Seja $S \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Conclua, a partir do item (a), que para qualquer x com $|x| < 1$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - S = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n.$$

Dica: lembre que, se $|x| < 1$, $(1-x)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = 1$.

(c) Tome $\varepsilon > 0$. Como $S_n \xrightarrow{n\to\infty} S$, existe $N^\star$ tal que se $n \geq N^\star$ então $|S_n - S| < \varepsilon/2$. Use o item (b) para concluir que, se $|x| < 1$, vale

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - S\right| < |1-x| \sum_{n=0}^{N^\star - 1} |S_n - S| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

N.B.: $N^\star$ independe de x.

(d) Finalmente, exiba $\delta > 0$ tal que se $|x-1| < \delta$ (e $|x| < 1$!) então

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - S\right| < \varepsilon.$$

Como o $\varepsilon > 0$ tomado anteriormente é arbitrário, a desigualdade acima equivale a dizer que

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = S.$$

(e) O item anterior finaliza o teorema da convergência radial de Abel. Mais geralmente, mostre que se

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é uma série de potências que converge em $]-R,R[$, onde $R > 0$, valem

$$\text{se } \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n < \infty \text{ então } \lim_{x\to R^-} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n,$$

e

$$\text{se } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n < \infty \text{ então } \lim_{x\to -R^+} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

(f) Use o teorema da convergência radial de Abel para mostrar que

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Dica: escreva $1/(1+x)$ como série de potências e integre termo a termo.

10. Seja $(F_n)_{n\geq 0}$ a sequência de Fibonacci: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Denote por $\mathcal{F}(x)$ a série de potências centrada em 0 com coeficientes $(F_n)_{n\geq 0}$, *i.e.*,

$$\mathcal{F}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

(a) Calcule o raio de convergência $R_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}(x)$.

(b) Mostre que, se $|x| < R_{\mathcal{F}}$, então

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Compare $R_{\mathcal{F}}$ com as raízes de $1 - x - x^2$. A função $\mathcal{F}$ é chamada de função geratriz da sequência $(F_n)_{n\geq 0}$.

11. Seja $f : \mathbb{Z}_{n\geq 0} \to \mathbb{Z}_{n\geq 0}$ uma função estritamente crescente. Calcule o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{f(n)}.$$

12. Seja p um polinômio qualquer. Calcule o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot x^n.$$

13. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{-n} = -\int_0^1 x^x \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x},$$

igualdades conhecidas como *sophomore's dream*. Dica: lembre que $x^{\pm x} = \exp(\pm x \cdot \log(x))$.

14. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a sequência de funções em $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n(1 + 2nx), & \text{se } x \in [-1/2n, 0] \\ n(1 - 2nx), & \text{se } x \in [0, 1/2n] \\ 0, & \text{se } |x| > 1/2n \end{cases}.$$

Defina $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ como a seguir:

$$\varphi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(x + 1/2n) + f_n(x - 1/2n).$$

Perceba que $\varphi_n(0) = 0$ para todo $n \geq 1$. Finalmente, seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua qualquer. Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \cdot g \xrightarrow{n\to\infty} g(0).$$

Dica: use o teorema do valor médio para integrais.

15. Seja $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\lambda(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \exp(-1/x), \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}.$$

   (a) Mostre que para qualquer $x > 0$ vale

   $$\lambda^{(n)}(x) = \exp(-1/x) \cdot p_n(1/x)$$

   onde $(p_n)_{n\geq 1}$ é a sequência de polinômios dada recursivamente por

   $$p_0(T) = 1 \text{ e, para } n \geq 1,\ p_n(T) = T^2 \cdot (p_{n-1}(T) - p'_{n-1}(T)).$$

   (b) Mostre que para qualquer polinômio p vale

   $$\lim_{x\to 0^+} \exp(-1/x) \cdot p(1/x) = 0.$$

   (c) Use os itens (a) e (b) para concluir que $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ e que $\lambda^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq} 0$. Uma função que possui todas as derivadas num ponto p, todas elas nulas em p, é chamada de função *flat* em p. A função λ é, portanto, *flat* em 0.

   (d) Compare a série de Taylor de λ em torno de 0 com a própria função λ e responda: λ é analítica em algum intervalo (aberto) que contenha zero?

16. A série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \tag{$\star$}$$

converge, no intervalo $]-1, 1[$, para a função

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1+x^2}.$$

Logo $(\star)$ é a série de Taylor de $f(x)$ em torno de 0. Sabendo disso, calcule $f^{(n)}(0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

17. Mostre que

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Dica: lembre que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$.

18. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência

$$\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, \ldots\}$$

onde cada $k \geq 1$ "aparece" 2^{k-1} vezes. O termo geral de $(a_n)_{n\geq 1}$ é dado pela seguinte expressão:

$$a_n = 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor.$$

Calcule $\limsup \sqrt[n]{a_n}$.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que possui todas as derivadas em 0 e satisfaz $f(0) \neq 0$. Como f é contínua em 0 e $f(0) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in]-\delta, \delta[$ então $f(x) \neq 0$.

(a) Seja $g :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ a função inverso multiplicativo de f, *i.e.*, $g(x) = 1/f(x)$. Mostre que a função g possui todas as derivadas em 0 e que elas podem ser obtidas através da regra de Leibniz generalizada:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(0) f^{(k)}(0) = (gf)^{(n)}(0) = 1^{(n)} = 0,$$

desde que $n \geq 1$ (se $n = 0$ obtém-se $g(0)f(0) = 1$).

(b) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\exp(x)-1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

possui todas as derivadas em 0. Mais ainda, mostre que para qualquer $n \geq 0$ vale:

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}.$$

(c) Use os itens (a) e (b) para encontrar as 5 primeiras parcelas da série de Taylor em torno de 0 da função

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{x}{\exp(x)-1}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Os termos da sequência $(g^{(n)}(0))_{n\geq 1}$ são os assim chamados números de Bernoulli.

20. Seja $(v_n)_{n\geq 1}$ a sequência de funções em $[0, 1]$ definida por

$$v_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n^x}.$$

Mostre que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente então a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x)$$

converge (absoluta e) uniformemente em $[0, 1]$. Dica: use o teste M de Weierstrass.

21. Para duas séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

seu produto de Cauchy é, por definição, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{onde} \quad c_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

O termo c_n pode ser encarado como o coeficiente que acompanha o monômio de grau n no produto dos polinômios

$$(a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n) \cdot (b_0 + b_1 T + \ldots + b_n T^n).$$

Suponha que

— $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente; faça $A_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $A \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

— $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge; faça $B_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k$, $B \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ e $\beta_n \overset{\text{def}}{=} B_n - B$.

Faça $C_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k$ onde $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ é o produto de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(a) Mostre que para qualquer $n \geq 0$ vale

$$C_n = A_n B + \gamma_n$$

onde

$$\gamma_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k}.$$

(b) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

(c) Conclua que, sob as hipotéses listadas acima, o produto de Cauchy converge e tem soma igual ao produto das somas de seus fatores. Isso é conhecido como teorema de Mertens.

(d) A convergência absoluta de um dos fatores é essencial para a convergência do produto de Cauchy: mostre que o produto de Cauchy da série (convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{\sqrt{n}}$$

com ela mesma não converge.

22. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ defina

$$\binom{\alpha}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - (k-1))}{k!}$$

para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e

$$\binom{\alpha}{0} \overset{\text{def}}{=} 1.$$

Note que

— se $\alpha \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, então $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ para qualquer k e

— se $\alpha \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $k > \alpha$ então $\binom{\alpha}{k}$ troca de sinal à medida que k aumenta.

Seja $\alpha \neq 0$ e considere a função suave $f_\alpha : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_\alpha \overset{\text{def}}{=} (1+x)^\alpha.$$

(a) Mostre que para quaisquer $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $t \in \mathbb{R}_{>-1}$ vale

$$\frac{f_\alpha^{(k)}(t)}{k!} = \binom{\alpha}{k} (1+t)^{\alpha - n}.$$

(b) Mostre que o resto de Lagrange correspondente ao polinômio de Taylor de ordem n de f_α em torno de 0 é dado por

$$R_{n,0}(x) = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+t)^{\alpha-(n+1)},$$

onde t está entre 0 e x (e depende de n e de x!).

(c) Mostre que o resto de Cauchy correspondente ao polinômio de Taylor de ordem n de f_α em torno de 0 é dado por

$$R_{n,0}(x) = (n+1)\binom{\alpha}{n+1} x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n,$$

onde t está entre 0 e x (e depende de n e de x!). N.B.: os restos de Cauchy e Lagrange coincidem, apenas suas expressões são distintas.

(d) Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

converge desde que $|x| < 1$. Em particular, se $|x| < 1$ vale

$$\lim_{k\to\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 0.$$

A seguir veremos que a série acima converge para o valor que se espera que ela convirja, *i.e.*, $(1+x)^\alpha$.

(e) Suponha que $0 \le x < 1$. Use o item (b) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$. Dica: $(1+t)^{\alpha-n-1} \le 1$ se $\alpha < n+1$, pois $1 \le 1+t \le 2$.

(f) A dica do item (e) não funciona se $-1 < x < 0$. Nesse caso vamos usar o resto de Cauchy, *i.e.*, o item (c) para mostar que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$. Mostre que se $-1 < x < t < 0$, então valem

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \le |x| \quad \text{e} \quad |x(1+t)^{\alpha-1}| \le |x| \cdot \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}.$$

O máximo acima assume ou um ou o outro valor a depender se $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$.

(g) Use os itens (c) e (f) e a identidade

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n}$$

para mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$ se $-1 < x < 0$.

(h) Conclua, finalmente, que se $|x| < 1$, então podemos escrever

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

igualdade essa conhecida como expansão em série binomial. Em particular, para $x = 1/4$ e $\alpha = 1/2$ obtemos

$$\sqrt{5} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{1}{4^n} = \left(2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4^3} - \frac{5}{64}\cdot\frac{2}{4^4} + \frac{7}{128}\cdot\frac{1}{4^5} + \dots\right),$$

e o teste de Leibniz garante que a soma finita

$$2\sum_{n=0}^{N} \binom{1/2}{n} \frac{1}{4^n}$$

aproxima $\sqrt{5}$ com erro menor que $2 \cdot |\binom{1/2}{N+1}| \cdot 4^{-(N+1)}$.