1. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{se } n = k! \text{ para algum } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ converge? A título de curiosidade: o número real $0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ (ou seja: o dígito da n-ésima casa decimal é a_n) é conhecido como constante de Liouville e, historicamente, foi o primeiro exemplo "concreto" de um número transcendente, *i.e.*, de um número que não é raíz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros.

2. Suponha que $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência cujos termos são todos estritamente positivos, *i.e.*: $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

   (a) Mostre que se $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ então $\log(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

   (b) Mostre que se $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ então $\log(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

   (c) Mostre que se $\log(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ então $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

   (d) Mostre que se $\log(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ então $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

3. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por

$$a_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \quad \text{e} \quad a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2a_n}, \text{ qualquer que seja } n \geq 1,$$

onde, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $\sqrt{\alpha}$ denota a raíz positiva do polinômio, na variável T, $T^2 - \alpha$. Note que, como $a_1 > 0$, a sequência "faz sentido" (nunca é tomada a raíz quadrada de um número negativo).

   (a) Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada superiormente por 2.

   (b) Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ é estritamente crescente.

   (c) Pelos itens (a) e (b), $(a_n)_{n\geq 1}$ converge. Encontre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dica: considere a função (contínua) $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2x}$; note que $f(a_n) = a_{n+1}$.

4. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por $a_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2$ e

$$a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n},$$

para $n \geq 1$.

   (a) Mostre que $1 \leq a_n \leq 2$, qualquer que seja $n \geq 1$. Em particular os termos dessa sequência são todos positivos.

   (b) Mostre que $a_n^2 \geq 2$, qualquer que seja $n \geq 1$.

   (c) Use o item (b) para mostrar que $(a_n)_{n\geq 1}$ é decrescente.

   (d) Pelos itens (a) e (c), $(a_n)_{n\geq 1}$ converge. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   (e) Calcule a_2, a_3, a_4 e a_5 e compare com o limite encontrado no item (d).

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - 2$. Vamos definir duas sequências, que denotaremos por $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$, da seguinte maneira. Começamos com $a_1 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ e $b_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2$. Note que $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Agora faça

$$\begin{cases} a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{e} \quad b_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} b_n, & \text{se } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0, \\ \qquad\qquad\qquad \text{ou} & \\ a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} a_n \quad \text{e} \quad b_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{se } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Perceba que $f((b_n + a_n)/2) \neq 0$ para qualquer $n \geq 1$ pois, sendo a_1 e b_1 números racionais, os termos das duas sequências são todos números racionais, enquanto que as raízes de f são irracionais. Calcule os três primeiros termos das duas sequências para entender melhor o que está acontecendo. Note também que, para todo $n \geq 1$, $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$.

(a) Mostre que vale $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq 1$.

(b) Use o item (a) para mostrar que $(a_n)_{\geq 1}$ é crescente e que $(b_n)_{\geq 1}$ é decrescente.

(c) Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada superiormente por b_1 e $(b_n)_{n\geq 1}$ é limitada inferiormente por a_1. Portanto, ambas sequências convergem.

(d) Mostre que $b_n - a_n = 2^{-n+1}$, para todo $n \geq 1$. Conclua que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(e) Seja $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; note que $\gamma > 0$. Mostre que $f(\gamma) = 0$, ou seja: $\gamma = \sqrt{2}$.

(f) Calcule a_5 e b_5 e compare com o item (e) do exercício 4.

6. Para quaisquer $n \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, existe um único número real positivo, denotado por $\sqrt[n]{\alpha}$, que é raíz do polinômio, na variável T, $T^n - \alpha$.

(a) Mostre que a sequência $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 1}$ é limitada superiormente por 2 e inferiormente por 1.

(b) Mostre que $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 1}$ é decrescente a partir do terceiro termo. Dica: para qualquer $n \geq 1$, vimos em aula que $(1 + 1/n)^n \leq 3$; se $n \geq 3$ então vale $(1 + 1/n)^n \leq n$.

(c) Pelos itens (a) e (b), $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 1}$ converge. Encontre $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. Dica: mostre que, para qualquer $n \geq 2$, vale $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{2/(n-1)}$.

7. Tome $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência convergente. Seja $(b_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por

$$b_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k},$$

ou seja: b_k é a média aritmética dos k primeiros termos de $(a_n)_{n\geq 1}$. Mostre que a sequência $(b_n)_{n\geq 1}$ também é convergente e calcule seu limite.

8. Tome $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência convergente, cujos termos são estritamente positivos. Seja $(b_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por

$$b_k \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k},$$

ou seja: b_k é a média geométrica dos k primeiros termos de $(a_n)_{n\geq 1}$. Mostre que a sequência $(b_n)_{n\geq 1}$ também é convergente e calcule seu limite. Dica: considere a sequência $(\log(b_n))_{n\geq 1}$ e dois casos: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$.

9. Sejam p e q dois polinômios em uma variável com coeficientes em $\mathbb{R}$, e suponha que nenhum inteiro positivo é raíz de q. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

   (a) Mostre que se o grau de q for estritamente maior que o grau de p, então $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
   (b) Mostre que se o grau de q for estritamente menor que o grau de p, então $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \pm\infty$.
   (c) Mostre que se os graus de q e p forem iguais, então $a_n \xrightarrow{n\to\infty} p^\star/q^\star$, onde $p^\star$ e $q^\star$ são os coeficientes do monômio de maior de grau em p e q, respectivamente.

10. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{n^n}$$

   (a) Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada (superiormente por 1 e inferiormente por 0).
   (b) Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ é estritamente decrescente.
   (c) Pelos itens (a) e (b), $(a_n)_{n\geq 1}$ converge. Encontre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dica: mostre que para qualquer $M \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que se $n \geq N$ então $\log(a_n) < -M$.

11. Tome $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e considere $(a_n^{(k)})_{n\geq k}$ a sequência definida por

$$a_n^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(k)} = 1/k!$.

12. Para uma sequência limitada $(a_n)_{n\geq 1}$, lembre que

$$\overline{a_n} \overset{\text{def}}{=} \sup\{a_k \mid k \geq n\} \quad \text{e} \quad \underline{a_n} \overset{\text{def}}{=} \inf\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por

$$a_n \overset{\text{def}}{=} (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

   (a) Encontre uma expressão para o termo geral das sequências $(\overline{a_n})_{n\geq 1}$ e $(\underline{a_n})_{n\geq 1}$.
   (b) Determine se a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ converge ou não.

13. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência limitada, e lembre que

$$\limsup a_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \overline{a_k} \quad \text{e} \quad \liminf a_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \underline{a_k}.$$

   (a) Mostre que $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$.
   (b) Mostre que $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$.

14. Mostre que se uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge para $+\infty$ (resp. para $-\infty$), então $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada inferiormente (resp. superiormente).

15. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência que satisfaz a seguinte propriedade:

$$|a_{k+1} - a_k| < 2^{-k}, \text{ qualquer que seja } k \geq 1.$$

Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy.

16. O exercício anterior pode ser generalizado da seguinte maneira. Comecemos com uma sequência $(b_n)_{n\geq 1}$ de termos positivos tal que a série definida por ela converge, *i.e.* tal que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$. Com isso, mostre que se $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfaz a desigualdade

$$|a_{k+1} - a_k| < b_k, \text{ qualquer que seja } k \geq 1,$$

então $(a_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy.

17. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência para a qual existem um número real $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e um inteiro $N^\star \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tais que

$$|a_{k+N^\star} - a_k| > c, \text{ qualquer que seja } k \geq 1.$$

Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ não é de Cauchy.

18. Seja X um subconjunto de $\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Para cada $n \geq 1$ faça

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} \#\{x \in X \mid x \leq n\},$$

ou seja: X_n conta a quantidade de elementos de X que são menores ou iguais a n, donde X_n é denominada função de contagem de X. Note que a sequência $(X_n/n)_{n\geq 1}$ é limitada (superiormente por 1 e inferiormente por 0). Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \alpha$$

dizemos que o conjunto X possui densidade aritmética α. Note que a densidade aritmética de X, quando existe, pode ser encarada como a probabilidade de um número inteiro escolhido ao acaso estar no conjunto X.

   (a) Mostre que o conjunto dos números pares possui densidade aritmética $1/2$.

   (b) Mais geralmente, para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, mostre que o conjunto dos múltiplos de k possui densidade aritmética $1/k$.

   (c) Mostre que o conjunto dos quadrados, *i.e.* o conjunto $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$, possui densidade aritmética nula.

A título de curiosidade: um resultado fundamental em teoria dos números, conhecido como teorema dos números primos, diz que o conjunto dos números primos tem densidade nula.

19. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência descrescente de termos positivos.

   (a) Mostre que, para qualquer $N \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} a_k \leq \sum_{s=0}^{N-1} 2^s \cdot a_{2^s}.$$

   Logo, se a série definida por $(2^n \cdot a_{2^n})_{n\geq 0}$ converge, então a série definida por $(a_n)_{n\geq 1}$ também converge. Isso é conhecido como teste da condensação de Cauchy.

(b) Mostre que, para qualquer $N \geq 1$, vale:

$$\sum_{s=0}^{N} 2^s \cdot a_{2^s} \leq 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^N - 1} a_k \right) + a_{2^N}.$$

Logo, se a série definida por $(2^n \cdot a_{2^n})_{n \geq 0}$ converge, vale

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^s a_{2^s} \leq 2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_k \right).$$

(c) Mostre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log(n))^2} < \infty.$$

20. Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ a sequência definida por

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

onde $\lceil \cdot \rceil$ denota a função teto. Mostre que a série definida por $(a_n)_{n \geq 1}$ converge para zero.

21. O objetivo deste exercício é verificar a igualdade

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

(a) Primeiramente, mostre que a série definida por $(1/n!)_{n \geq 1}$ converge.

(b) Para quaisquer $\alpha \in]0, 1[$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, mostre que vale $(1 - \alpha)^k \geq 1 - k\alpha$.

(c) Use o item (b) para concluir que, quaisquer que sejam $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ e $n \geq k$, vale

$$1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \leq \frac{(k-1)^2}{n}.$$

(d) Conclua, a partir e nas mesmas hipóteses do item (c), que

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right| < \frac{3}{n}.$$

(e) Finalmente, conclua que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

22. Seja $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$. Mostre que a série definida por $(1/n^\alpha)_{n \geq 1}$ converge e que

$$\zeta(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

A função $\zeta : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}$ acima definida é conhecida como função zeta de Riemann. Dica: use uma "estimativa integral".

23. Seja $(a_n)_{\geq 1}$ uma sequência de números inteiros que satisfaz

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$$

Suponha que $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a_n \mid n \geq 1\}$ possui densidade aritmética estritamente positiva. Mostre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = +\infty.$$

Dica: mostre que existe $N^\star$ tal que se $N \geq N^\star$ então $a_N < 2N/\alpha$, onde α é a densidade aritmética de A. A volta desse resultado não é verdadeira: a série

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p}$$

diverge, mas o conjunto $\{p \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid p \text{ é primo}\}$ possui densidade aritmética nula.

24. Para $k \geq 1$, seja $\log_k :]E_k, \infty[\to \mathbb{R}$ a função definida recurvisamente por

$$\log_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log(x) \text{ e } \log_{n+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log(\log_n(x)),$$

onde os números reais E_k também são definidos recursivamente por

$$E_1 \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ e } E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \exp(E_n).$$

(a) Mostre que $\lim_{x \to \infty} \log_k(x) = +\infty$, qualquer que seja $k \geq 1$.

(b) Mostre que

$$(\log_{k+1}(x))' = \frac{1}{\log_k(x) \cdot \log_{k-1}(x) \cdots \log_1(x) \cdot x}.$$

(c) Mostre que

$$\sum_{n=\lceil E_k \rceil + 1}^{\infty} \frac{1}{\log_k(n) \cdot \log_{k-1}(n) \cdots \log_1(n) \cdot n} = +\infty.$$

(d) Conclua que

$$\sum_{n=\lceil E_k \rceil + 1}^{\infty} \frac{1}{\log_k(n) \cdot n} = +\infty.$$