A função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

é conhecida como curva senoidal do topólogo (ou círculo de Varsóvia). Afirmo que $f$ é integrável, o que justifico a seguir. Como $f$ é contínua (e, *a fortiori*, integrável) em $[\delta, 1]$, qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma partição de $[0,1]$ tal que, em $[\delta, 1]$, as somas superior e inferior de Riemann diferem por não mais que $\varepsilon/2$. Em cada subintervalo de $[0, \delta]$ induzido por qualquer partição, temos que a diferença entre as parcelas superior e inferior correspondentes ao subintervalo não ultrapassa 2, pois o máximo e o mínimo que $f$ assume são, respectivamente, $+1$ e $-1$, cuja diferença é 2. Logo, em $[0, \delta]$, a diferença entre as somas superior e inferior de Riemann não ultrapassa $2 \cdot \delta$. Tomando $\delta < \varepsilon/4$, temos então que existe uma partição de $[0,1]$ para a qual a diferença entre as somas superior e inferior de Riemann em todo intervalo $[0,1]$ não ultrapassa $\varepsilon/2 + 2 \cdot \varepsilon/4 = \varepsilon$. Portanto $f$ é integrável em $[0,1]$.

Uma outra forma de verificar a integrabilidade de $f$ é apresentada na sequência. Temos que $f$ será integrável se, e somente se, existir o limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} f.$$

Note que para qualquer $\varepsilon > 0$ a integral acima está bem definida pois $f$ é contínua no respectivo intervalo de integração. Fazendo $y = 1/x$, temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \sin(1/x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} - \int_{1/\varepsilon}^{1} \frac{\sin(y)}{y^2} = \lim_{R \to +\infty} \int_{1}^{R} \frac{\sin(y)}{y^2}$$

e, dos limites acima, aquele mais à direita existe por sin ser limitada e por existir

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{1}^{R} \frac{1}{y^2}.$$

Os mesmos argumentos permitem concluir a integrabilidade de funções como $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \cos(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

e $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$