Catálogo

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Nome

____

Pseudônimo

____

Questão [`potenciametadefatorial`] Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(2n-1)!}{n^{2n-1}}.$$

Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$
- □ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n > 1$
- □ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$
- □ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$
- □ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- □ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`termial`] Sobre a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k},$$

qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ A série converge e tem soma 2.
- □ A série converge e tem soma 1.
- □ A série converge e tem soma 1/2.
- □ A série diverge para ∞.
- □ A série converge e tem soma estritamente maior que 2.
- □ A série converge e tem soma estritamente menor que 1/2.
- □ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`qualconverge`] Dentre as séries númericas a seguir, qual é a única que converge?

- ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \log(n)/n^2$.
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[2025]{n}$.
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+1/n)$.
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n/e^{n+1}$.
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} (2025n^2+2024n+2023)/(2026n^2+2025n+2024)$.

Questão [`integral`] Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_n^{2n} x^{-n}.$$

Qual das seguintes alernativas é verdadeira?

- ■ A série definida por $(a_n)_{n\geq 1}$ converge.
- ☐ A série definida por $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge para $+\infty$.
- ☐ A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ não converge.
- ☐ A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ possui infinitos termos positivos e infinitos termos negativos.
- ☐ A série definida por $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada, porém não converge.
- ☐ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`perimetro-circunferencia`] Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \cdot n \cdot \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Qual das seguintes alternativas é verdadeira? Dica: para $n \geq 3$, a_n é o perímetro de um polígono de n lados que satisfaz uma certa condição.

- ■ $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para 2π.
- ☐ $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada, porém não converge.
- ☐ $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge para $+\infty$.
- ☐ $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para 0.
- ☐ $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para $\sqrt{2}$.
- ☐ $(a_n)_{n\geq 1}$ não é limitada nem superior nem inferiormente.
- ☐ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`razao`] O teste da razão assintótica garante que a série

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^k}$$

converge. Qual é o valor exato de S?

- ■ 9/4.
- ☐ 3/2.
- ☐ 4/9.
- ☐ 16/9.
- ☐ 3.
- ☐ 2.

Questão [`fourier-escada`] Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1, \text{ se } -1 \leq x \leq -1/2 \\ 0, \text{ se } -1/2 < x < 1/2 \\ 1, \text{ se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Lembre que

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

denota a série de Fourier de f. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ■ A sequência $(n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ é limitada, porém não converge.
- □ $b_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$.
- □ $b_n = (-1)^{n+1} 2/n\pi$ para todo $n \geq 1$.
- □ $S_f(x)$ converge para $f(x)$, qualquer que seja $x \in [-1,1]$.
- □ S_f converge uniformemente para f em $[-1,1]$.
- □ A sequência $(n \cdot a_n)_{n\geq 1}$ é limitada, porém não converge.
- □ A série numérica $S_f(1/2)$ converge para 0.

Questão [`bessel-derivadaalta`] A função $J_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$J_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}}$$

é conhecida como função de Bessel (do primeiro tipo) de ordem 1. Note que J_1 é analítica em $\mathbb{R}$. Qual é o valor de $J_1^{(2025)}(0)$?

- ■ $2025!/(1012! \cdot 1013! \cdot 2^{2025})$.
- □ $-2025!/(1012! \cdot 1013! \cdot 2^{2025})$.
- □ 0.
- □ $1/(1012! \cdot 1013! \cdot 2^{2025})$.
- □ $-1/(1012! \cdot 1013! \cdot 2^{2025})$.

Questão [`raioconv-grande`] Considere a seguinte série de potências:

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^{2025}}{(2025 \cdot n)!} x^n.$$

Qual é o raio de convergência de $S(x)$?

- ■ 2025^{2025}.
- □ 0.
- □ 1.
- □ $+\infty$.
- □ 2025.
- □ $1/2025$.

Questão [`raioconv-2`] Dentre as séries de potências abaixo, qual delas possui raio de convergência estritamente maior que 1?

- [x] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n^2}((n!\cdot(2n)!)/(3n)!)\cdot x^n$.
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty}\log(n)\cdot x^n$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{5n+3}\cdot x^{3n+5}$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty}(n!/(n+1)!)\cdot x^n$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty}\pi^n\cdot x^{2n}$.
- [ ] Todas as séries em questão possuem raio de convergência menor ou igual a 1.

Questão [`EDO-2`] Considere a seguinte equação diferencial:

$$y' - x\cdot y - x^2 = 0.$$

Dentre as funções abaixo, qual delas é solução da equação acima com a condição inicial $y(0)=0$? Lembre que $n!! \overset{\text{def}}{=} n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdots s$, onde $s=1$ se n é ímpar e $s=2$ se n é par.

- [x] $\sum_{n=1}^{\infty}-x^{2n+1}/(2n+1)!!$.
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!!$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}/(2n+1)!!$.
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}/(2n)!!$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty}-x^{2n}/(2n)!!$.

Questão [`forget1st`] Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ o conjunto de todas as sequências de números reais. Considere a função $\mathcal{F}:\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ dada por

$$\mathcal{F}(\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}) \overset{\text{def}}{=} \{a_2,a_3,\ldots\}.$$

Faça $\mathcal{F}_1 \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}$ e, para cada $k\geq 2$, $\mathcal{F}_k \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}\circ\mathcal{F}_{k-1}$. Finalmente, dada $(a_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$, denote por $a_n^{(k)}$ o n-ésimo termo da sequência $\mathcal{F}_k((a_n)_{n\geq 1})$. Qual das seguintes alternativas é verdadeira? Considere $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência qualquer.

- [x] Se $(a_n)_{n\geq 1}$ converge, então para quaisquer N e $K\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ vale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(K)} = \lim\limits_{k\to\infty} a_N^{(k)}$.
- [ ] Para qualquer $n\geq 1$ a sequência $(a_n^{(k)})_{k\geq 1}$ converge.
- [ ] Para qualquer $k\geq 1$, a sequência $\mathcal{F}_k((a_n)_{n\geq 1})$ converge.
- [ ] Existe $k^\star\geq 1$ tal que se $k\geq k^\star$ então $\mathcal{F}_k(((-1)^n/n)_{n\geq 1})$ é a sequência constante igual a zero.
- [ ] Existe $k^\star\geq 1$ tal que se $k\geq k^\star$ então a série definida por $\mathcal{F}_k((1/n)_{n\geq 1})$ converge.
- [ ] As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`nvezes-limitada`] Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência qualquer. Se $(n\cdot a_n)_{n\geq 1}$ é limitada, qual das seguintes alternativas é correta?

- [x] $(a_n)_{n\geq 1}$ converge.
- [ ] $(n\cdot a_n)_{n\geq 1}$ converge.
- [ ] $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada superior mas não inferiormente.
- [ ] $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada inferior mas não superiormente.
- [ ] $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada porém não converge.
- [ ] $(a_n)_{n\geq 1}$ é monótona.
- [ ] As outras alternativas estão incorretas.

Questão [powser-qualquer] Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências qualquer; denote por R seu raio de convergência. Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ As outras alternativas estão incorretas.
- ☐ Se $R > 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n / R^n$ não converge.
- ☐ Se $R > 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ não converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n / R^n$ converge.
- ☐ Se $R > 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n / R^n$ converge.
- ☐ Se $R > 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ não converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n / R^n$ não converge.
- ☐ $|a_n / a_{n+1}|$ converge para R.

Questão [arith-geo-mean] Sejam s_1 e $g_1 \in \mathbb{R}_{>0}$. Para qualquer $n \geq 1$ faça

$$s_{n+1} = \frac{s_n + g_n}{2} \quad \text{e} \quad g_{n+1} = \sqrt{s_n \cdot g_n}.$$

Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ $(s_n)_{n \geq 1}$ e $(g_n)_{n \geq 1}$ convergem e vale $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} g_n$.
- ☐ $(s_n)_{n \geq 1}$ e $(g_n)_{n \geq 1}$ convergem e vale $\lim_{n \to \infty} s_n < \lim_{n \to \infty} g_n$.
- ☐ $(s_n)_{n \geq 1}$ e $(g_n)_{n \geq 1}$ convergem e vale $\lim_{n \to \infty} s_n > \lim_{n \to \infty} g_n$.
- ☐ $(s_n)_{n \geq 1}$ e $(g_n)_{n \geq 1}$ não convergem.
- ☐ $(s_n)_{n \geq 1}$ converge mas $(g_n)_{n \geq 1}$ não converge.
- ☐ $(s_n)_{n \geq 1}$ não converge mas $(g_n)_{n \geq 1}$ converge.
- ☐ As outras alternativas estão incorretas.