Catálogo

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Nome

____

Pseudônimo

____

Questão [`3nescolhe2n`] Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \binom{3n}{2n}.$$

Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- [x] $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 27/4.$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 3.$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 6.$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$
- [ ] A sequência $(a_{n+1}/a_n)_{n\geq 1}$ é limitada mas não converge.

Questão [`somatelescopica-2`] Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida recursivamente da seguinte maneira:

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} a_n \cdot \left(\frac{n-1}{n+1}\right).$$

Sobre a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- [x] A série converge e tem soma 1.
- [ ] A série diverge para $+\infty$.
- [ ] A série converge e tem soma estritamente maior que 1.
- [ ] A série converge e tem soma estritamente menor que 1.
- [ ] A série é limitada mas não converge.

Questão [`geometrica-2`] Para qualquer número real T a série

$$S(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^2}{(1+T^2)^n}$$

converge. Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ $\lim_{T\to 0} S(T) = 1$.
- □ $\lim_{T\to 0} S(T) = 0$.
- □ $\lim_{T\to 0} S(T) = -1$.
- □ $\lim_{T\to 0} S(T) = +\infty$.
- □ Não existe $\lim_{T\to 0} S(T)$.

Questão [`qualconverge-2`] Dentre as séries númericas a seguir, qual é a única que converge?

- ■ $\sum_{n=1}^{\infty} (2023^n + 2024^n)/2025^n$.
- □ $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\log(n^{2025})$.
- □ $\sum_{n=3}^{\infty} 1/\log(\log(n))$.
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2025}/(n+2025)^{2025}$.
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(n)/n^{2025}$.

Questão [`amplitude-domina-frequencia`] Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a sequência de funções em $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ $(f_n)_{n\geq 1}$ e $(f_n')_{n\geq 1}$ convergem uniformemente para funções contínuas.
- □ $(f_n)_{n\geq 1}$ e $(f_n')_{n\geq 1}$ convergem pontualmente, mas não uniformemente, para funções contínuas.
- □ $(f_n)_{n\geq 1}$ e $(f_n')_{n\geq 1}$ convergem uniformemente para funções descontínuas.
- □ $(f_n)_{n\geq 1}$ e $(f_n')_{n\geq 1}$ convergem pontualmente, mas não uniformemente, para funções descontínuas.
- □ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`nested-sqrt`] Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida recursivamente da seguinte maneira:

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a_n + 6}.$$

Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 3$.
- □ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 6$.
- □ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -2$.
- □ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.
- □ $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada mas não converge.

Questão [razao-2] Para qualquer $\rho \in \mathbb{R}_{>1}$ o teste da razão assintótica garante que a série

$$S_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho n + 1}{\rho^n}$$

converge. Qual é o valor exato de S_ρ?

- [x] $\rho(2\rho - 1)/(\rho - 1)^2$.
- [ ] $(\rho + 1)^2/(\rho - 1)^2$.
- [ ] $\rho/\rho - 1$.
- [ ] $2\rho(\rho + 1)/(\rho - 1)^2$.
- [ ] $2(\rho^2 + 1)/(\rho - 1)^2$.

Questão [fourier-inverted-spike] Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} |x|, \text{ se } |x| \leq 1/2 \\ 0, \text{ se } |x| > 1/2 \end{cases} .$$

Lembre que

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

denota a série de Fourier de f. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- [x] $a_{4n} = 0$ para todo $n \geq 1$.
- [ ] $a_{4n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$.
- [ ] $a_{4n+2} = 0$ para todo $n \geq 0$.
- [ ] $a_{4n+3} = 0$ para todo $n \geq 0$.
- [ ] As outras alternativas estão incorretas.

Questão [derivadaalta-2] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x^3).$$

Note que f é suave em $\mathbb{R}$. Qual é o valor de $f^{(2025)}(0)$?

- [x] $-2025!/675!$.
- [ ] $2025!/675!$.
- [ ] 0.
- [ ] $675!/2025!$.
- [ ] $-675!/2025!$.
- [ ] $+1$.
- [ ] -1.

Catálogo

Questão [`raioconv-quase-fermat`] Considere a seguinte série de potências:

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{2^n}}.$$

Qual é o raio de convergência de $S(x)$?

- ■ $+\infty$.
- □ 0.
- □ 1.
- □ 2.
- □ 4.

Questão [`raioconv-3`] Dentre as séries de potências abaixo, qual delas possui raio de convergência estritamente maior que 1?

- ■ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^n/(2n+1)^n) \cdot x^n$.
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/(2025n)$.
- □ $\sum_{n=0}^{\infty}(10^n/9^n)x^n$.
- □ $\sum_{n=0}^{\infty}((2n)!/(n)!^2) \cdot x^n$.
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}/n$.
- □ Todas as séries em questão possuem raio de convergência menor ou igual a 1.

Questão [`EDO-3`] Considere a seguinte equação diferencial:

$$y' - x^2 \cdot y - 1 = 0.$$

Dentre as funções abaixo, qual delas é solução da equação acima com a condição inicial $y(0) = 0$? Lembre que $n!!! \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots s$, onde $s = 1$, 2 ou 3 se n deixa resto 1, 2 ou 0, respectivamente, quando divido por 3.

- ■ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}/(3n+1)!!!$.
- □ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}/(3n+1)!!!$.
- □ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}/(3n)!!!$.
- □ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{3n}/(3n)!!!$.
- □ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{3n+2}/(3n+2)!!!$.

Questão [`seqrecursiva-2`] Seja $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ a sequência definida por $\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $\alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ e, para qualquer $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\alpha_{n+2} \stackrel{\text{def}}{=} 2\alpha_{n+1} + 3\alpha_n$. Faça

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

e denote por R_f o raio de convergência da série em questão. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ■ $R_f = 1/3$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = (1-x)/(1-2x-3x^2)$.
- □ $R_f = 3$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = (1-x)/(1-3x-2x^2)$.
- □ $R_f = 1$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = (1-x)/(1-2x-3x^2)$.
- □ $R_f = 1/3$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = (1-x)/(x^2-2x-3)$.
- □ $R_f = 3$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = (2-3x)/(1-x-x^2)$.
- □ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`limitada-vezes-infinitesimo`] Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sequências quaisquer que satisfazem:

- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, e
- $(b_n)_{n\geq 1}$ é limitada.

Qual das seguintes alternativas é correta?

- ■ $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy.
- ☐ $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ é monótona.
- ☐ $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ é limitada mas não é de Cauchy.
- ☐ $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n\to\infty} (\limsup b_n + \liminf b_n)/2$.
- ☐ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`breslavia`] Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(2n^{1/n} - 1)^n}{n^2}$$

Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$.
- ☐ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
- ☐ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 2$.
- ☐ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.
- ☐ $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada mas não converge.