Catálogo

☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9

Nome

____

Pseudônimo

____

Questão [`gauss`] Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a sequência de funções em $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \exp(-n \cdot x^2).$$

Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente, mas não uniformemente, para uma função descontínua.
- ☐ $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente, mas não uniformemente, para uma função contínua.
- ☐ $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para uma função contínua.
- ☐ $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para uma função descontínua.
- ☐ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`convergenciaqualquer`] Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência qualquer de funções em $\mathbb{R}$. Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

- ■ Se $|f_n(x)| \leq 1/(\log(n))$, para qualquer $n \geq 2$, então $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente.
- ☐ Se $|f_n(x)| \leq 1/n$, para qualquer $n \geq 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge desde que $|x| < 1$.
- ☐ Se, para todo $n \geq 1$, f_n é contínua e $f_n(0) = 0$, e se $f_n \overset{n\to\infty}{\dashrightarrow} 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = 0$.
- ☐ Se f_n é integrável, para qualquer $n \geq 1$, e $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, então $\int f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
- ☐ Se $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$, então f é contínua.
- ☐ As outras alternativas estão incorretas.

Questão [`derivadaalta`] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{6(\sin(x)-x)}{x^2}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases} .$$

Note que f é suave em $\mathbb{R}$. Qual é o valor de $f^{(2025)}(0)$?

- ■ $-6/(2026 \cdot 2027)$.
- ☐ $6/(2026 \cdot 2027)$.
- ☐ 0.
- ☐ $1/2025$.
- ☐ $-1/2025$.
- ☐ -6.
- ☐ 6.

Questão [`abel`] O teste de Leibniz garante que a série

$$S \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$$

converge. Qual é o valor exato de S? Dica: lembre que $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$, que $\operatorname{atan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, e que $(-1)^{3k+1} = -(-1)^k$.

- [x] $\log(2)/3 + \sqrt{3}\pi/9$.
- [ ] 0.
- [ ] $\log(8)/3$.
- [ ] $-\log(2) + \sqrt{3}\pi/18$.
- [ ] $-\log(2) + \pi/\sqrt{3}$.
- [ ] 1.

Questão [`raioconv`] Dentre as séries de potências abaixo, qual delas possui raio de convergência estritamente maior que 1?

- [x] $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \binom{2n}{n}^{-1} (x - 2025^{2025})^n$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} (x+2025)^{n!}$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot x^{2^n}$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1/2025} x^{n^2}$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(n) \cdot x^{11n+7}$.
- [ ] Todas as séries em questão possuem raio de convergência menor ou igual a 1.

Questão [`seqrecursiva`] Seja $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ a sequência definida por $\alpha_0 \overset{\text{def}}{=} 1$, $\alpha_1 \overset{\text{def}}{=} 1$ e, para qualquer $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\alpha_{n+2} \overset{\text{def}}{=} \alpha_{n+1} + 2\alpha_n$. Faça

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

e denote por R_f o raio de convergência da série em questão. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- [x] $R_f = 1/2$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = 1/(1 - x - 2x^2)$
- [ ] $R_f = 2$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = 1/(1 - x - 2x^2)$
- [ ] $R_f = 2$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = 1/(2 + x - x^2)$
- [ ] $R_f = 1/2$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = 1/(1 - 2x + x^2)$
- [ ] $R_f = 1$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = -1/(1 - x - 2x^2)$
- [ ] $R_f = 1$, e em $]-R_f, R_f[$ vale $f(x) = 1/(1 - 2x + x^2)$
- [ ] As outras alternativas estão incorretas.

Questão [EDO] Considere a seguinte equação diferencial:

$$y' + x \cdot y = x$$

Dentre as funções abaixo, qual delas é solução da equação acima com a condição inicial $y(0) = 0$?

- [x] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}/(2^n \cdot n!)$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}/(2^n \cdot n!)$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}/(2^n \cdot n!)$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}/(2^n \cdot n!)$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n+1}/(2^{n+1} \cdot (n+1)!)$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}/(2^{n+1} \cdot (n+1)!)$

Questão [quadrada-pw-pequeno] Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1/4 \\ 0, & \text{se } |x| > 1/4 \end{cases} .$$

Lembre que

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

denota a série de Fourier de f. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- [x] $a_{4n} = 0$ para todo $n \geq 1$.
- [ ] $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$.
- [ ] $S_f(x)$ converge para $f(x)$, qualquer que seja $x \in [-1, 1]$.
- [ ] S_f converge uniformemente para f em $\in [-1, 1]$.
- [ ] A sequência $(n \cdot a_n)_{n \geq 1}$ converge para 0.
- [ ] As séries numéricas $S_f(\pm 1/4)$ não convergem.

Questão [coeficientes-fourier] Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq 0 \\ x, & \text{se } |x| > 0 \end{cases} .$$

Lembre que

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

denota a série de Fourier de f. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- [x] $a_{2n+1} = -2/n^2\pi^2$, para todo $n \geq 1$.
- [ ] $a_n = (-1)^{n+1}/n^2\pi^2$ para todo $n \geq 1$.
- [ ] $b_n = (-1)^{n+1}/n^2\pi^2$ para todo $n \geq 1$.
- [ ] $b_{2n} = 0$ para todo $n \geq 1$.
- [ ] $b_n = -1/n\pi$ para todo $n \geq 1$.
- [ ] $a_n = 2/n\pi$ para todo $n \geq 1$.

Questão [`leibniz`] O teste de Leibniz garante que a série

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{10^n}$$

converge. Qual é o valor exato de S?

- [x] $10/121$.
- [ ] $-10/81$.
- [ ] $-10/121$.
- [ ] $1/11$.
- [ ] $-1/11$.
- [ ] $10/81$.