Notas do Curso de SMA333 - Cálculo III ou SMA356 - Cálculo IV

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes

São Carlos - junho de 2015

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Estas notas de aula serão utilizadas para o cursos cuja ementa trata de sequencias e séries numéricas, sequencias e séries de funções, em particular, série de potências e de Fourier.

Aplicaremos séries de Fourier para a resolução de alguns problemas relacionados com algumas Equações Diferenciais Parciais, a saber, as Equações do Calor, da Onda e de Laplace, no caso periódico.

Serão exibidos todos os conceitos relacionados com o conteúdo acima, bem como propriedades e aplicações dos mesmos.

As referências (ver (8.5)) ao final das notas poderão servir como material importante para o conteúdo aqui desenvolvido.

Capítulo 2

Sequências Numéricas

2.1 Definições

Começaremos tratando de:

Definição 2.1.1 *Uma* <u>sequência</u> *de números reais (ou complexos) (ou, simplesmente, sequência numérica) é uma aplicação*

$$\begin{array}{rcl} a: \ \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \quad \textit{(ou } \mathbb{C}) \\ n & \mapsto & a(n) \end{array}$$

isto é, uma lei que associa a cada número natural $\underline{n}$ *um, único, número real (ou complexo)* $\underline{a(n)}$*, que indicaremos por* $\underline{a_n}$ *e denotaremos uma sequência numérica por:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \quad (a_n)\,, \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,, \quad \{a_n\}\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ *fixado, o elemento* $\underline{a_n}$ *será dito* **<u>termo</u>** *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

O conjunto

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

será dito **<u>conjunto dos valores</u>** *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *.*

Exemplo 2.1.1

1. *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Logo o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\left\{1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \cdots\right\}\,.$$

2. *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Notemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\{0\}\,.$$

3. *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$\begin{aligned} a_n &\doteq \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0\,, & \textit{quando a} \quad n \textit{ for par} \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}}\,, & \textit{quando} \quad n \textit{ for ímpar} \end{cases} \,. \end{aligned}$$

Observemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\{1\,,0\,,-1\}\,.$$

4. *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Notemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\{1\,,2\,,3\,,4\,,\cdots\}\,.$$

5. *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq (-1)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Notemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\{1\,,-1\}\,.$$

6. *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{n+1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Observemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\left\{2\,,\frac{3}{2}\,,\frac{4}{3}\,,\frac{5}{4}\,,\cdots\right\}\,.$$

7. *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1+(-1)^n}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Logo, o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\left\{0\,,1\,,0\,,\frac{1}{2}\,,0\,,\frac{1}{3}\,,0\,,\cdots\right\}\,.$$

2.2 Operações com sequências numéricas

Como sequências numéricas são funções a valores reais (respectivamente, complexos), cujo domínio é $\mathbb{N}$, podemos somá-las, multiplicá-las por números reais (ou complexos) de maneira semelhante a quando tratamos de quaisquer funções a valores reais (respectivamente, complexos), isto é,

Definição 2.2.1 *Dadas as sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) definimos a sequência numérica* **soma** *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, denotada por*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

como sendo a seguinte sequência numérica:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.1}$$

ou seja, a sequência numérica soma, a saber, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, é obtida somando-se os correspondentes termos de cada uma das sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definimos a sequência numérica **produto** *do número real (respectivamente, complexo)* $\underline{\alpha}$*, pela sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, indicada por*

$$\alpha\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

como sendo a seguinte sequência numérica:

$$\alpha\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (\alpha\, a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.2}$$

ou seja, a sequência numérica produto, isto é, $\alpha\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, é obtida multiplicando-se os correspondentes termos de cada sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pelo número real (respectivamente, complexo)* $\underline{\alpha}$.

Definimos a sequência **produto** *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pela sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, indicada por*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

como sendo a seguinte sequência numérica:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.3}$$

ou seja, a sequência numérica produto, isto é, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\cdot(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, é obtida multiplicando-se os correspondentes termos de cada uma das sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Se $b_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, definimos a sequência numérica* **quociente** *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pela sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, indicada por*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{ou} \quad \frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}\,,$$

como sendo a seguinte sequência numérica:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.4}$$

ou seja, a sequência numérica quociente, isto é, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, é obtida dividindo-se os correspondentes termos de cada uma das sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(observe que* $b_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*).*

Com isto temos o seguinte exercício:

Exercício 2.2.1 *Se as sequências numéricas (reais)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sãos dadas por:*

$$a_n \doteq \frac{1}{n} \quad e \quad b_n \doteq (-1)^n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

e $\alpha \doteq 2$*, encontrar as sequência numéricas:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \alpha\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Resolução:

Logo, de (2.1), segue que

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.5)\text{ e }(2.1)}{=} \left(\frac{1}{n} + (-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1 + (-1)^n\, n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

De (2.2), temos que:

$$\alpha\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.5)\text{ e }(2.2)}{=} \left(2\,\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

De (2.3), segue que

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.5)\text{ e }(2.3)}{=} \left(\frac{1}{n}\,(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Finalmente, de (2.4), temos que:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.5)\text{ e }(2.4)}{=} \left(\frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(-1)^n\, n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

□

Observação 2.2.1 *Como sequências numéricas são funções a valores reais (respectivamente, complexos), cujo domínio é* $\mathbb{N}$, *podemos representar seus gráficos em* $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ *(ou em* $\mathbb{N} \times \mathbb{C}$, *respectivamente).*

Denotaremos o gráfico da sequência numérica (real ou complexa) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *por* $G\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, *e será definido por:*

$$G\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \doteq \{(n\,,a_n)\,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Na verdade, isto não terá muito interesse no estudo das sequências numéricas.

A seguir temos alguns exemplos relacionados com esta questão.

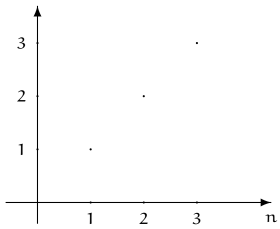
Exemplo 2.2.1 *Se a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dada por:*

$$a_n \doteq n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

então seu gráfico será dado por:

$$G\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \doteq \{(n\,,n)\,;\, n \in \mathbb{N}\},$$

e assim, a representação geométrica do seu gráfico será:



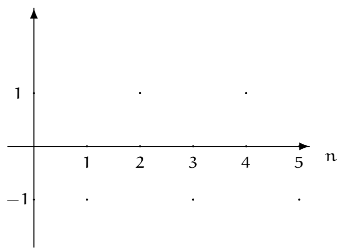
Exemplo 2.2.2 *Se a sequência numérica (real)* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dada por:*

$$b_n \doteq (-1)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

então seu gráfico será dado por:

$$G\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \doteq \{(n\,,(-1)^n)\,;\, n \in \mathbb{N}\},$$

e assim, a representação geométrica do seu gráfico será:



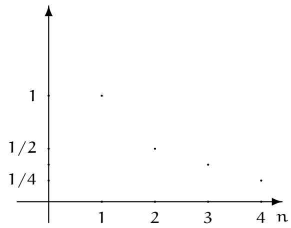
Exemplo 2.2.3 *Se a sequência numérica (real)* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dada por*

$$c_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

então seu gráfico será dado por:

$$G\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \doteq \left\{ \left(n, \frac{1}{n}\right) ; n \in \mathbb{N} \right\},$$

e assim, a representação geométrica do seu gráfico será:



2.3 Convergência de sequências numéricas

Observação 2.3.1 *Empiricamente, observando os exemplos acima temos:*

1. *No Exemplo (2.2.1), os termos da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescem, ilimitadamente, quando $\underline{n}$ cresce, ou ainda, os termos vão para "infinito", quando $\underline{n}$ cresce ilimitadamente, ou seja, quando $\underline{n}$ vai para "infinito".*

2. *No Exemplo (2.2.2), os termos da sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oscilam entre $\underline{-1}$ e $\underline{1}$, quando $\underline{n}$ cresce ilimitadamente, ou seja, quando $\underline{n}$ vai para "infinito".*

3. *No Exemplo (2.2.3), os termos da sequência numérica $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ "aproximam-se" de zero, quando $\underline{n}$ cresce ilimitadamente, isto é, os termos da sequência "tendem" a zero, quando $\underline{n}$ vai para infinito.*

A seguir vamos formalizar esta última situação de modo mais preciso, ou seja, colocar de forma correta o conceito de "convergir" (ou "aproximar-se de", ou ainda "tender a").

Definição 2.3.1 *Diremos que uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é* **convergente** *(ou converge, ou tende) para $l \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$), quando $\underline{n}$ vai para infinito, denotando-se por:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l, \quad \text{ou} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l, \quad \text{ou ainda,} \quad a_n \to l,$$

se, e somente se: dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que, para

$$n \geq N_o, \quad \text{deveremos ter} \quad |a_n - l| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Observação 2.3.2

1. *A Definição (2.3.1) acima nos diz, formalmente, que podemos ficar tão próximo de $\underline{l}$, quanto se queira (isto é, dado $\varepsilon > 0$), desde que o índice da sequência numérica, ou seja, $\underline{n}$, seja suficientemente grande (isto é, tenhamos $n \geq N_o$).*

2. *Na linguagem dos intervalos, a Definição (2.3.1) acima, nos diz que dado o intervalo*
$$(l-\varepsilon\,, l+\varepsilon)$$
(ou seja, dado $\varepsilon > 0$), todos os termos da sequência numérica caem dentro desse intervalo excetuando-se, eventualmente, os $\underline{N_o}$ primeiros termos da sequência numérica.

3. *Em geral, na Definição (2.3.1) acima, o número natural $\underline{N_o}$ depende do número real positivo $\underline{\varepsilon}$ dado inicialmente.*

4. *A Definição (2.3.1) acima, é semelhante à definição de limites no infinito, para funções a valores reais, de uma variável real, estudadas no Cálculo I.*

   Compare com aquela e veja as semelhanças.

O resultado a seguir, garante a unicidade do limite de uma sequência numérica, caso ele existe, mais precisamente:

Proposição 2.3.1 *(unicidade do limite de uma sequência convergente) Se o limite da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existir ele deverá ser único, isto é, se*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = l_2\,,$$
então
$$l_1 = l_2\,.$$

<u>Demonstração:</u>

Mostremos que, para cada $\varepsilon > 0$, teremos
$$|l_1 - l_2| < \varepsilon\,,$$
o que implica que
$$l_1 = l_2\,.$$

Para isto temos que, para cada $\varepsilon > 0$, como
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1\,,$$
podemos encontar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo
$$\text{se} \quad n \geq N_1\,, \quad \text{deveremos ter:} \quad |a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

De modo análogo, como
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_2\,,$$
podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que
$$\text{se} \quad n \geq N_2\,, \quad \text{deveremos ter:} \quad |a_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.8}$$

Logo, se

$$n \geq N_o \doteq \max\{N_1, N_2\},$$

segue que

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - a_n + a_n - l_2| \\ &\leq \underbrace{|l_1 - a_n|}_{=|a_n - l_1| \overset{n\geq N_1,\text{ logo vale (2.7)}}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_n - l_2|}_{\overset{n\geq N_2,\text{ logo vale (2.8)}}{<} \frac{\varepsilon}{2}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Temos o:

Exemplo 2.3.1 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, dada por*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.9}$$

é convergente para zero, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{2.10}$$

Resolução:

De fato, observemos que dado $\varepsilon > 0$, se considerarmos $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$N_o > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

Então, para

$$n \geq N_o, \tag{2.12}$$

teremos

$$\begin{aligned} |a_n - l| &\overset{a_n = \frac{1}{n} \text{ e } l=0}{=} \left|\frac{1}{n} - 0\right| \\ &\overset{n\geq 0}{=} \frac{1}{n} \overset{n \overset{(2.12)}{\geq} N_o \geq 1}{\leq} \frac{1}{N_o} \\ &\overset{(2.11)}{<} \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando a afirmação.

□

Temos temabém o:

Exemplo 2.3.2 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, dada por*

$$a_n \doteq \frac{2n}{n+1}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.13}$$

é convergente para 2*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2. \tag{2.14}$$

Resolução:

De fato, observemos que dado $\varepsilon > 0$, consioderemos $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$N_o > \frac{2}{\varepsilon}, \tag{2.15}$$

Então, se

$$n \geq N_o, \tag{2.16}$$

teremos

$$\begin{aligned}
|a_n - l| &\overset{a_n \overset{(2.13)}{=} \frac{2n}{n+1} \text{ e } l=2}{=} \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| \\
&= \left|\frac{2n - 2n - 2}{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \\
&\overset{n+1 \geq n \overset{(2.16)}{\geq} N_o \geq 1}{\leq} \frac{2}{N_o} \overset{(2.15)}{<} \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando que a afirmação é verdadeira.

□

Um outro caso é dado pelo:

Exemplo 2.3.3 *A sequência numérica* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, dada por*

$$a_n \doteq \cos(n\pi), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.17}$$

não é convergente.

Resolução:

De fato, observemos que

$$\begin{aligned}
a_n &= \cos(n\pi) \\
&= (-1)^n, \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}..
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Se a sequência fosse convergente para algum $l \in \mathbb{R}$, então dado

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0,$$

deveria existir um $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que, para

$$n \geq N_o, \quad \text{deveríamos ter} \quad |(-1)^n - l| < \frac{1}{2},$$

isto é,

$$l - \frac{1}{2} < (-1)^n < l + \frac{1}{2},$$

o que um absurdo, pois isto implicaria que os termos da sequência numérica,

$$-1 \overset{(2.18)}{=} a_{2n+1} \quad \text{e} \quad 1 \overset{(2.18)}{=} a_{2n},$$

deveriam pertencer ao intervalo

$$\left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right),$$

cujo comprimento é igual a $\underline{1}$ (notemos que se os números $\underline{-1}$ e $\underline{1}$ pertencem a um mesmo intervalo, este intervalo deverá ter um comprimento maior ou igual a 2), o que é um absurdo.

Portanto a sequência numérica não é convergente.

□

A seguir temos o seguinte:

Exercício 2.3.1 *Consideremos a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde seus termos são dados por*

$$a_1 \doteq 0.3\,, \quad a_2 \doteq 0.33\,, \quad a_3 \doteq 0.333\,, \quad a_4 \doteq 0.3333\,, \cdots, a_n \doteq 0.\underbrace{33\cdots3}_{n-casas}\,, \cdots. \tag{2.19}$$

Mostre que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\frac{1}{3}$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\doteq l}. \tag{2.20}$$

<u>**Resolução:**</u>

De fato, dado $\varepsilon > 0$, consideremos $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$N_o > \log\frac{1}{3\,\varepsilon} - 1\,, \quad \text{ou seja,} \quad 10^{N_o} > \frac{1}{3\,\varepsilon}\,,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{3\,10^{N_o}} < \varepsilon\,. \tag{2.21}$$

Logo, para

$$n \geq N_o\,, \tag{2.22}$$

teremos

$$|a_n - l| \overset{(2.19)\,\text{e}\,(2.20)}{=} \left|0.\underbrace{3\cdots3}_{n-\text{casas}} - \frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{0.\overbrace{9\cdots9}^{n-\text{casas}} - 1}{3}\right|$$

$$= \left|-\frac{0.\overbrace{0\cdots0}^{(n-1)-\text{casas}}1}{3}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{\frac{-1}{10^n}}{3} \right| \\
&= \frac{1}{3\,10^n} \\
&\overset{n \overset{(2.22)}{\geq} N_o \geq 1}{<} \frac{1}{3\,10^{N_o}} \\
&\overset{(2.21)}{<} \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar, completando a resolução do exercício.

□

Definição 2.3.2 *Diremos que uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* **limitada**, *se existir* $M > 0$, *de modo que*

$$|a_n| \leq M\,, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.23}$$

Observação 2.3.3 *Nos Exemplos (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) e Exercício (2.3.1) acima, todas sequências numéricas são limitadas.*

Observemos que nem todas elas são sequência numéricas convergentes (veja o Exemplo (2.3.3)).

Como veremos a seguir existe uma relação entre sequencias numéricas convergentes e sequencias numéricas limitadas, a saber:

Proposição 2.3.2 *Toda sequência numérica convergente é limitada, isto é, se a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente, então ela será uma sequência numérica limitada.*

Demonstração:

Como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, segue que existe $l \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l\,,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n \geq N_o\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - l| < \varepsilon\,.$$

Em particular, se tomarmos

$$\varepsilon \doteq 1\,,$$

poderemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$
\begin{aligned}
&\text{para} \quad n \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad |a_n - l| < 1\,,\\
\text{ou seja,}\quad &\text{para} \quad n \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad -1 < a_n - l < 1\\
\text{ou, equivalentemente,}\quad &l - 1 < a_n < 1 + l\,, \quad \text{para} \quad n \geq N_o\,,\\
\text{ou ainda,}\quad &-|l| - 1 < a_n < |l| + 1\,, \quad \text{para} \quad n \geq N_o\,,\\
\text{isto é,}\quad &|a_n| < |l| + 1\,, \quad \text{para} \quad n \geq N_o\,. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Definamos

$$M \doteq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_o-1}|, |l|+1\}. \tag{2.25}$$

Como isto temos que

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 2.3.4 *A recíproca do resultado acima é falsa, isto é, nem toda sequência numérica limitada é convergente, como mostra o Exemplo* (2.3.3).

A seguir temos algumas propriedades gerais para convergência de sequências numéricas.

Teorema 2.3.1 *(propriedades básicas da convergência de sequências) Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências numéricas.*

1. *Se as sequencias numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$, *respectivamente, então a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{a+b}$, *isto é, se existem* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *e* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *então existe* $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ *e*

   $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b,$$

   isto é,

   $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{2.26}$$

   Vale os análogos para as sequências numéricas

   $$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad \frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}},$$

   ou seja, as respectivas sequências numéricas serão convergentes para

   $$a-b, \quad a\,b \quad e \quad \frac{a}{b},$$

   onde, no último caso deveremos ter $b_n, b \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *respectivamente, ou seja:*

   $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a-b,$$
   $$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = a\,b,$$
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

   ou ainda,

   $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{2.27}$$
   $$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right), \tag{2.28}$$
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}. \tag{2.29}$$

2. *Se as sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*, respectivamente, e*

$$a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

então

$$a \leq b\,,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,. \tag{2.30}$$

3. *Se a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero e a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada, então a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0\,. \tag{2.31}$$

4. *Suponhamos que as sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $\underline{l}$ *e a sequência numérica* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaz:*

$$a_n \leq c_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.32}$$

Então a sequência numérica $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{l}$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l\,. \tag{2.33}$$

Demonstração:

De 1.:

Comecemos demonstrando (2.26):

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_1 \quad \text{temos} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.34}$$

$$\text{e}$$

$$\text{se} \quad n \geq N_2 \quad \text{temos} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.35}$$

Logo, tomando-se

$$N_o \doteq \max\{N_1\,, N_2\}\,, \tag{2.36}$$

temos para

$$n \geq N_o\,, \tag{2.37}$$

segue que

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(a+b)| &= |(a_n-a)+(b_n-b)| \\ &\leq |a_n-a|+|b_n-b| \\ &\overset{n \overset{(2.37)}{\geq} N_o \overset{(2.36)}{\geq} N_1 \text{ e } n \overset{(2.37)}{\geq} N_o \overset{(2.36)}{\geq} N_2\text{, logo valem (2.24) e (2.35)}}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,,\end{aligned}$$

mostrando que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$ ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\,,$$

mostrando a validade da identidade (2.26).

A demonstração de (2.27) é análoga e será deixada como exercício para para leitor.

Demonstração da indentidade (2.28):

Vamos supor que

$$a \neq 0$$

Como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, pela Proposição (2.3.2), elas serão sequências numéricas limitadas, em particular, a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica limtada.

Logo deverá existir $M>0$, tal que

$$|b_n| \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad n\in\mathbb{N}\,. \tag{2.38}$$

Dado $\varepsilon>0$, como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, podemos encontrar $N_1\,,\,N_2\in\mathbb{N}$, tais que:

$$\text{se} \quad n\geq N_1\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2\,M}\,, \tag{2.39}$$

$$\text{se} \quad n\geq N_2\,, \quad \text{teremos} \quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2\,\underbrace{|a|}_{>0}}\,. \tag{2.40}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1\,,N_2\}\,. \tag{2.41}$$

Observemos que

$$\text{se} \quad n\geq N_o\,, \quad \text{segue, de (2.41), que} \quad n\geq N_1 \quad \text{e} \quad n\geq N_2\,. \tag{2.42}$$

logo

$$\begin{aligned}|(a_n\,b_n)-(a\,b)| &= |(a_n-a)\,b_n+(b_n-b)\,a| \\ &\leq |a_n-a|\,|b_n|+|b_n-b|\,|a| \\ &\overset{(2.38)}{<} |a_n-a|\,M+|b_n-b|\,|a| \\ &\overset{\text{(2.42) implca que vale (2.39) e (2.40)}}{<} \frac{\varepsilon}{2\,M}\,M+\frac{\varepsilon}{2\,|a|}\,|a| \\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,,\end{aligned}$$

mostrando que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = a\, b$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$

isto é, a validade de (2.28).

Se

$$b \neq 0\,,$$

podemos fazer uma demonstração semelhante e esta será deixada como exercício para o leitor.

Se

$$a = b = 0\,,$$

então temos que dado $\varepsilon > 0$, como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, podemos encontrar $N_1\,,\,N_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$\text{se}\quad n \geq N_1\,,\quad \text{teremos:}\quad |a_n| \overset{a=0}{=} |a_n - 0| < \sqrt{\varepsilon}\,, \tag{2.43}$$

$$\text{se}\quad n \geq N_2\,,\quad \text{teremos:}\quad |b_n| \overset{b=0}{=} |b_n - 0| < \sqrt{\varepsilon}\,. \tag{2.44}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1\,,N_2\}\,. \tag{2.45}$$

Observemos que

$$\text{se}\quad n \geq N_o\,,\quad \text{de (2.45), segue que}\quad n \geq N_1 \quad \text{e} \quad n \geq N_2\,. \tag{2.46}$$

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} |(a_n\, b_n) - a\, b| &\overset{a=b=0}{=} |a_n\, b_n| \\ &= |a_n|\,|b_n| \\ &\overset{(2.46),\ \text{implica na validade de: } (2.43) \text{ e } (2.44)}{<} \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$

isto é, a validade de (2.28).

A demonstração de (2.29) é semelhante e será deixada como exercício.

De 2.:

Suponhamos, por absurdo, que

$$a > b\,,\quad \text{isto é,}\quad \lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Logo,

$$a - b > 0\,,$$

dado

$$\varepsilon \doteq \frac{a-b}{2} > 0\,, \tag{2.47}$$

como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, podemos encontrar $N_1\,, N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad n \geq N_1\,, \quad & \text{teremos} \quad |a_n - a| < \varepsilon\,,\\
\text{ou seja,} \quad & -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon\,,\\
\text{isto é,} \quad & -\varepsilon + a < a_n < \varepsilon + a\,,\\
\text{que, de (2.47), é o mesmo que:} \quad & \underbrace{-\frac{a-b}{2} + a}_{=\frac{a+b}{2}} < a_n < \frac{a-b}{2} + a\,,\\
\text{em particular, teremos:} \quad & \frac{a+b}{2} < a_n\,. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad n \geq N_2\,, \quad & \text{teremos} \quad |b_n - b| < \varepsilon\,,\\
\text{ou seja,} \quad & -\varepsilon < b_n - b < \varepsilon\,,\\
\text{isto é,} \quad & -\varepsilon + b < b_n < \varepsilon + b\,,\\
\text{que, de (2.47), é o mesmo que:} \quad & -\frac{a-b}{2} + b < b_n < \underbrace{\frac{a-b}{2} + b}_{=\frac{a+b}{2}}\,,\\
\text{em particular, teremos:} \quad & b_n < \frac{a+b}{2}\,. \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{se} \quad n \geq \max\{N_1\,, N_2\}, \quad \text{teremos} \quad n \geq N_1 \quad \text{e} \quad n \geq N_2\,, \tag{2.50}$$

assim

$$b_n \overset{(2.50)\text{ implica na validade de }(2.50)}{<} \frac{a+b}{2} \overset{(2.48)\text{ implica na validade de }(2.50)}{<} a_n,$$

isto é,

$$b_n < a_n\,, \quad \text{se} \quad n \geq \max\{N_1\,, N_2\},$$

o que é um absurdo pois, por hipótese,

$$a_n \leq b_n\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

isto é, vale (2.30).

De 3.:

Como a sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica limitada, podemos encontrar $M > 0$, tal que

$$|b_n| \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.51}$$

Por outro lado, como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica convergente para zero, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\text{se} \quad n \geq N_o \quad \text{teremos:} \quad |a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}\,. \tag{2.52}$$

Logo, dado dado $\varepsilon > 0$, se $n \geq N_o$, teremos

$$|a_n\, b_n - 0| = |a_n|\, |b_n| \overset{(2.51) \text{ e } (2.52)}{\leq} \frac{\varepsilon}{M} M < \varepsilon\,,$$

mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = 0\,,$$

ou seja, a validade de (2.31).

De 4.:

Como as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para l, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1\,,\; N_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$\text{se} \quad n \geq N_1\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - l| < \varepsilon\,,$$

$$\text{que implicará em:} \quad -\varepsilon \overset{(*)}{<} a_n - l < \varepsilon\,, \tag{2.53}$$

$$\text{se} \quad n \geq N_2\,, \quad \text{teremos:} \quad |b_n - l| < \varepsilon\,,$$

$$\text{que implicará em} \quad -\varepsilon < b_n - l \overset{(**)}{<} \varepsilon \tag{2.54}$$

Logo definido-se

$$N_o = \max\{N_1\,, N_2\}\,, \tag{2.55}$$

para $n \geq N_o$, teremos que $n \geq N_1$ e $n \geq N_2$, assim

$$-\varepsilon \overset{(*) \text{ em } (2.53)}{<} a_n - l \overset{a_n \overset{(2.32)}{\leq} c_n}{\leq} c_n - l \overset{c_n \overset{(2.32)}{\leq} b_n}{\leq} b_n - l \overset{(**) \text{ em } (2.54)}{<} \varepsilon\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad -\varepsilon < c_n - l < \varepsilon\,,$$

$$\text{ou, equivalentemente,} \quad |c_n - l| < \varepsilon\,,$$

mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l\,,$$

isto é, a validade de (2.33), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.3.5

1. *O item 2. do Teorema (2.3.1) acima, é conhecido como o* **Teorema da Comparação** *para sequências numéricas.*

2. *Uma sequência numérica que tem limite zero será dita* **infinitésimo**.

   Com isto o item 3. do Teorema (2.3.1) acima, pode ser resumido como: "o produto de uma sequência numérica que é um infinitésimo, por uma sequência numérica limitada é uma sequência numérica que é um infinitésimo".

3. *O item 4. do Teorema (2.3.1) acima, é conhecido como o* **Teorema do sanduiche ou do confronto** *para sequências numéricas.*

Apliquemos os resultados acima ao:

Exemplo 2.3.4 *Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-parcelas}\right)=0\,.$$

Resolução:

Para isto observemos que

$$a_n \doteq 0 \le \overbrace{\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-parcelas}}^{\doteq c_n}$$

$$\overset{\begin{pmatrix} n+1\ge n\\ n+2\ge n\\ \cdots\\ 2n\ge n\end{pmatrix}}{\le} \underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{(n+1)-parcelas}$$

$$=\frac{n+1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\doteq b_n\,,$$

para cada $n\in\mathbb{N}$.

Notemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{a_n=0}{=} 0\,, \tag{2.56}$$

e do Exemplo (2.3.1) *e do item 1. do Teorema* (2.3.1), *segue qe*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\\ &\overset{(2.26)\ e\ (2.28)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\\ &\overset{(2.10)}{=} 0+0\cdot 0=0\,,\end{aligned} \tag{2.57}$$

ou seja, de (2.56) *e* (2.57), *teremos:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{0}_{\doteq l} = \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Logo, do item 4. do Teorema (2.3.1) *(isto é, do Teorema do sanduiche), segue que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-parcelas}\right)=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n \overset{(2.57)}{=} 0\,.$$

Observação 2.3.6 *Vale observar que no Exemplo (2.3.4) acima, não podemos aplicar a propriedade de soma de limites, isto é, limite da soma é a soma dos limites, pois o número de parcelas de $\underline{a_n}$ aumenta, quando $\underline{n}$ aumenta.*

Observemos que para:

$$
\begin{aligned}
&n = 1 \text{ (duas parcelas)}, \quad \text{temos que:} \quad a_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \\
&n = 2 \text{ (três parcelas)}, \quad \text{temos que:} \quad a_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \\
&n = 3 \text{ (quatro parcelas)}, \quad \text{temos que:} \quad a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}
\end{aligned}
$$

e assim por diante.

Um resultado bastante importante no estudo da convergência de sequências numéricas é o que relaciona limites de sequências numéricas com limites, no infinito, de funções a valores reais, de uma variável real (estudado no Cálculo 1) , a saber:

Teorema 2.3.2 *Seja* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função e suponhamos que*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,. \tag{2.58}$$

Então a sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.59}$$

é convergente para $\underline{l}$*, isto é,*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to \infty} f(x)\,. \tag{2.60}$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,,$$

dado $R > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad x \geq R\,, \quad \text{teremos:} \quad |f(x) - l| < \varepsilon\,. \tag{2.61}$$

Seja $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$N_o \geq R\,. \tag{2.62}$$

Logo

$$\text{se} \quad n \geq N_o \overset{(2.62)}{\geq} R\,, \quad \text{teremos, por (2.61), que:} \quad |\underbrace{f(n)}_{\overset{(2.59)}{=} a_n} - l| < \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$\text{se} \quad n \geq N_o\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - l| < \varepsilon\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{l}$, ou seja, vale (2.60), completando a demonstração.

□

Observação 2.3.7 *Observemos que* **NÃO** *podemos aplicar as regras de L'Hôspital para sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Porém, podemos utilizar o resultado acima para estudar o limite de funções a valores reais, de uma variável real, no infinito (utilizando, se possível, a regra de L'Hôspital), e assim tirar conclusões para o limite da sequências numéricas associada, como veremos em alguns exemplos a seguir.

Exemplo 2.3.5 *Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{n^2+1} = 0\,. \tag{2.63}$$

Resolução:

Para isto, consideremos a fumção $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1-x}{x^2+1}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1\,\infty)\,. \tag{2.64}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x^2+1} \\ &\overset{\text{do tipo: } \frac{-\infty}{\infty}\text{, por L'Hôspital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}[1-x]}{\frac{d}{dx}\left[x^2+1\right]} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2\,x} \\ &\overset{\text{Exercício de Cálculo 1}}{=} 0\,.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}a_n &\doteq \frac{1-n}{n^2+1} \\ &\overset{(2.64)}{=} f(n)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Logo, do Teorema (2.3.2) acima, segue que a sequência numérica

$$(a_n)_{n_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{1-n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é convegente para $l = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= \lim_{x\to\infty} f(x) \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{n^2+1} = 0\,,$$

como afirmamos.

□

Exemplo 2.3.6 *Estudemos a convergência da sequência numérica* $(a_n)_{n_{n\in\mathbb{N}}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{n}{e^n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.65}$$

Resolução:

Definamos a função $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{x}{e^x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1\,,\infty). \tag{2.66}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \\ &\overset{\frac{\infty}{\infty},\ \text{por L'Hôspital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} \\ &\overset{\text{Exercício de Cálculo 1}}{=} 0\,, \end{aligned} \tag{2.67}$$

onde estamos utilizando o fato que último limite foi tratado na disciplina Cálculo I.

De (2.65), temos que

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.65)}{=} \frac{n}{e^n} \\ &\overset{(2.66)}{=} f(n)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Assim, do Teorema (2.3.2) acima, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= \lim_{x\to\infty} f(x) \\ &\overset{(2.67)}{=} 0\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0\,,$$

ou seja, sequência numérica

$$(a_n)_{n_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{n}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é convegente para $l = 0$, completando a resolução.

□

Exemplo 2.3.7 *A sequência numérica* $(a_n)_{n_{n\in\mathbb{N}}}$*, onde*

$$a_n \doteq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.68}$$

é convergente para $\underline{e}$ *(ou seja, o número de Euler).*

Resolução:

Consideremos a função $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \text{para cada} \quad x \in [1\,,\infty)\,. \tag{2.69}$$

Então, do 2.o limite fundamental (estudado em Cálculo 1), segue que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e\,. \tag{2.70}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.68)}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\overset{(2.69)}{=} f(n)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Assim segue, do Teorema (2.3.2) acima, que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &\overset{(2.68)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\overset{(2.71)}{=} \lim_{x\to\infty} f(x) \\ &\overset{(2.70)}{=} e\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,,$$

ou ainda, a sequência numérica

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é convegente para $\underline{e}$, como queríamos mostrar.

□

Exemplo 2.3.8 *Seja $r \in (0\,,\infty)$ fixado. Então a sequência numérica $(a_n)_{n\in\ n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$a_n \doteq r^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.72}$$

é convergente para

$$\begin{cases} 0\,, & \textit{se} \quad r \in (0\,,1)\,, \\ 1\,, & \textit{se} \quad r = 1\,, \\ \textit{não será convergente, se} & r \in (1\,,\infty) \end{cases}\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que, se

$$r = 0\,,$$

teremos que

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.72)}{=} r^n \\ &\overset{r=0}{=} 0^n \\ &= 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

e assim a a sequência numérica

$$(a_n)_{n\in\ \ n\in\mathbb{N}} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será convergente para $\underline{0}$.

Se

$$r = 1\,,$$

teremos que

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.72)}{=} r^n \\ &\overset{r=1}{=} 1^n \\ &= 1\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

e assim a a sequência numérica

$$(a_n)_{n\in\ \ n\in\mathbb{N}} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será convergente para $\underline{1}$.

Por outro lado, se

$$r \in (0\,,1) \cup (1\,,\infty)\,,$$

temos que

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.72)}{=} r^n \\ &= e^{n\ln r}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Portanto, se

$$r \in (0\,,1]\,, \quad \text{teremos que} \quad \ln r < 0\,,$$

e assim a sequência numérica $(a_n)_{n\in\ \ n\in\mathbb{N}}$ é convergente para zero, pois

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln r} \overset{\text{Exercício de Cálculo 1}}{=} 0\,, \quad \text{para cada} \quad r \in (0\,,1]\,.$$

Se

$$r \in (1\,,\infty)\,, \quad \text{teremos} \quad \ln r > 0\,,$$

logo a sequência numérica $(a_n)_{n\in\ \ n\in\mathbb{N}}$ não será convergente pois, neste caso

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln r} \overset{\text{Exercícios de Cálculo 1}}{=} \infty\,, \quad \text{para cada} \quad r \in (1\,,\infty)\,,$$

completando a resolução.

□

Observação 2.3.8

1. *Vale observar, uma vez mais, que* **NÃO** *podemos aplicar a Regra de L'Hôspital, diretamente, às sequências numéricas.*

2. *O Teorema (2.3.2) acima* **não** *garante que se o limite* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ **não** *existe, então o limite* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *também não existirá, onde*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi\, x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.74}$$

Notemos que o limite

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

não existe (Exercício de Cálculo 1) porém, considerando-se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$\begin{aligned} a_n &\doteq f(n) \\ &\overset{(2.74)}{=} \operatorname{sen}(\pi\, n) \\ &= 0\,, \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

teremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,$$

ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente (para* $\underline{0}$*).*

3. *Todos os resultados apresentado acima permanecem verdadeiros se substituirmos a hipótese*

$$n \in \mathbb{N}\,, \quad \textit{por} \quad n \geq N_o\,,$$

para algum $N_o \in \mathbb{N}$ *fixado.*

Por exemplo, no item 2. do Teorema (2.3.1), se trocarmos a hipótese:

$$\boxed{a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}}\,, \quad \textit{por} \quad \boxed{a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o}\,,$$

a conclusão continuará válida, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Observação 2.3.9 *Como vimos anteriormente (veja a Proposição (2.3.2)) toda sequência numérica convergente é limitada, mas* **não** *vale a recíproca (veja o Exemplo (2.3.3)).*

A questão que poderíamos colocar é a seguinte: além de ser limitada, que propriedade(s) uma sequência numérica poderia ter, para que pudéssemos garantir que ela será convergente ?

A seguir introduziremos uma nova classe de sequências numéricas que nos ajudarão a responder essa pergunta.

2.4 Sequências numéricas monótonas

Definição 2.4.1 *Diremos que uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é:*

1. **crescente** *se:*
$$a_{n+1} \geq a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.75}$$

2. **decrescente** *se:*
$$a_{n+1} \leq a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.76}$$

3. **estritamente crescente** *se:*
$$a_{n+1} > a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.77}$$

4. **estritamente decrescente** *se*
$$a_{n+1} < a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.78}$$

Se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for de um dos tipos acima ela será dita* **monótona**.

Exemplo 2.4.1 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*
$$a_n \doteq n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.79}$$
é estritamente crescente (portanto monótona)

Resolução:

De fato, pois
$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(2.79)}{=} n+1 \\ &> n \\ &\overset{(2.79)}{=} a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$
mostrando que a equência numérica
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$$
é estritamente crescente.

□

Exemplo 2.4.2 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde por*
$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.80}$$
é estritamente decrescente (portanto monótona).

Resolução:

De fato, pois

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(2.80)}{=} \frac{1}{n+1} \\ &\overset{n+1>n}{<} \frac{1}{n} \\ &\overset{(2.80)}{=} a_n \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, mostrando que a equência numérica

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é estritamente decrescente.

□

Exemplo 2.4.3 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde por*

$$a_n \doteq \cos(n\,\pi)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.81}$$

não *é monótona.*

Resolução:

Notemos que

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.81)}{=} \cos(n\,\pi) \\ &= (-1)^n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

que mostra que nenhuma das condições da Definição (2.4.1) ocorrerá.

□

Exemplo 2.4.4 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1}{2^n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.82}$$

é estritamente decrescente (portanto monótona).

Resolução:

De fato, pois, como

$$2^{n+1} > 2^n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

segue que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(2.82)}{=} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &< \frac{1}{2^n} \\ &\overset{(2.82)}{=} a_n\,, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, mostrando que a sequência numérica

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é estritamente decrescente.

$\square$

Observação 2.4.1

1. *Podemos estudar a monotonicidade de uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, estudando-se o comportamento da sequência numérica dada por:*

   $$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n_{n\in\mathbb{N}}},$$

   se $a_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Para ilustrar, suponhamos que

   $$a_n > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

   Com isto teremos que:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

   se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

2. *Podemos obter um resultado análogo ao citado acima, trocando-se o sinal*

   $$\boxed{\geq}\,, \quad \textit{pelo sinal:} \quad \boxed{>}$$

   e a palavra

   $$\boxed{\textit{crescente}}\,, \quad \textit{pela palavra:} \quad \boxed{\textit{estritamente crescente}}\,.$$

3. *Notemos também que, se*

   $$a_n > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

   temos que

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

   se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

4. *Podemos obter um resultado análogo ao citado acima, trocando-se o sinal*

   $$\boxed{\leq}\,, \quad \textit{pelo sinal:} \quad \boxed{<}$$

   e a palavra

   $$\boxed{\textit{decrescente}}\,, \quad \textit{pela palavra:} \quad \boxed{\textit{estritamente decrescente}}\,.$$

5. *Podemos obter resultado análogos aos acima, para o caso que*

$$a_n < 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

trocando-se as palavras

$$\boxed{\textit{crescente}}\,, \quad \textit{pela palavra:} \quad \boxed{\textit{decrescente}}.$$

e vice-versa.

Conclusão: *supondo que*

$$a_n > 0 \quad (\textit{ou } a_n < 0)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será monótona se, e somente se, ou*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \left(\textit{ou} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1\right), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

6. *Podemos, quando possível, estudar a monotonicidade de uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *estudando-se a monotonicidade de uma função* $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$*, onde*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Por exemplo, se a função $\underline{f}$ *é crescente (respectivamente, estritamente crescente, decrescente, estritamente decrescente), isto é,*

$$f(x) \geq f(y) \quad (\textit{respectivamente, } > \,, \leq \,, <)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \geq y \geq 1\,,$$

então a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

será crescente (respectivamente, estritamente crescente, decrescente, estritamente decrescente).

7. *Lembremos que, quando possível (ou seja, se a função* $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *for diferenciável em* $[1\,,\infty)$*), poderemos estudar a monotonicidade da função* $\underline{f}$ *acima, estudando o sinal de sua derivada , mais precisamente:*

$$\begin{aligned}
&\textit{se} \quad f'(x) \geq 0\,, \ \textit{para todo } x \in [1\,,\infty)\,,\\
&\qquad\qquad \textit{a função } \underline{f} \textit{ será crescente em } [1\,,\infty)\,,\\
&\textit{se} \quad f'(x) > 0\,, \ \textit{para todo } x \in [1\,,\infty)\,,\\
&\qquad\qquad \textit{a função } \underline{f} \textit{ será estritamente crescente em } [1\,,\infty)\,,\\
&\textit{se} \quad f'(x) \leq 0\,, \ \textit{para todo } x \in [1\,,\infty)\,,\\
&\qquad\qquad \textit{a função } \underline{f} \textit{ será decrescente em } [1\,,\infty)\,,\\
&\textit{se} \quad f'(x) < 0\,, \ \textit{para todo } x \in [1\,,\infty)\,,\\
&\qquad\qquad \textit{a função } \underline{f} \textit{ será estritamente decrescente em } [1\,,\infty)\,.
\end{aligned}$$

8. *Pode ocorrer da função* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ **não** *ser uma função monótona, mas a sequência numérica* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq f(n), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

ser monótona, como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \text{sen}(\pi x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [1, \infty).$$

Então a função $\underline{f}$ *não é monótona, mas a sequência numérica* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *onde*

$$\begin{aligned} a_n &\doteq f(n) \\ &= \text{sen}(\pi n) \\ &= 0, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

é uma sequência numérica monótona, pois

$$a_{n+1} = 0 \geq 0 = a_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 2.4.5 *A sequência numérica* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq \frac{-n}{n+1}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.83}$$

é estritamente decrescente.

Resolução:

De fato, pois

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(2.83)}{=} \frac{\dfrac{-(n+1)}{(n+1)+1}}{\dfrac{-n}{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{n+2}\,\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{n^2+2}}_{>0} > 1. \end{aligned} \tag{2.84}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$a_n \overset{(2.83)}{<} 0, \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, multiplicando-se (2.84) por $\underline{a_n}$, segue que

$$a_{n+1} < a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente, em particular, será uma sequência numérica monótona.

□

Exemplo 2.4.6 *A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$a_n \doteq \frac{2\,n}{3\,n+2}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.85}$$

é estritamente crescente.

Resolução:

De fato, pois

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(2.85)}{=} \frac{\dfrac{2\,(n+1)}{3\,(n+1)+2}}{\dfrac{2\,n}{3\,n+2}} \\ &= \frac{2\,n+2}{3\,n+5}\,\frac{3\,n+2}{2\,n} \\ &= \frac{6\,n^2+10\,n+4}{6\,n^2+10\,n} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{4}{6\,n^2+10\,n}}_{>0} > 1\,,\end{aligned} \tag{2.86}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$a_n \overset{(2.85)}{<} 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, multiplicando-se (2.86) por $\underline{a_n}$, segue que

$$a_{n+1} > a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente, em particular, será sequência numérica monótona.

□

Exemplo 2.4.7 *A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$a_n \doteq \frac{\ln(n+2)}{n+2}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.87}$$

é estritamente decrescente.

Resolução:

De fato, consideremos a função $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \frac{\ln(x+2)}{x+2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1\,,\infty)\,. \tag{2.88}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.87)}{=} \frac{\ln(n+2)}{n+2} \\ &\overset{(2.88)}{=} f(n)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Por outro lado, notemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[1\,,\infty)$ e

$$\begin{aligned} f\,'(x) &\overset{(2.88)}{=} \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right] \\ &\overset{\text{regras de derivação}}{=} \frac{\dfrac{1}{x+2}\,(x+2) - \ln(x+2)\cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2} < 0 \end{aligned}$$

para $x \in [1\,,\infty)$.

De fato, pois se

$$\begin{aligned} & x \in [1\,,\infty)\,, \\ \text{teremos} \quad & x+2 > e\,, \\ \text{logo,} \quad & \ln(x+2) > 1\,, \\ \text{ou seja,} \quad & 1-\ln(x+2) < 0\,. \end{aligned}$$

Logo, como

$$f\,'(x) < 0\,, \quad \text{para} \quad x \in [1\,,\infty)\,,$$

segue, do item 7. da Observação (2.4.1), que a função $\underline{f}$ será estritamente decrescente e assim, pelo item 6. da mesma Observação, teremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também será estritamente decrescente (pois $a_n \overset{(2.89)}{=} f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$).

□

Observação 2.4.2 *Sabemos que toda sequência numérica convergente é limitada (veja a Proposição (2.3.2)), mas nem toda sequência numérica limitada é convergente (veja o Exemplo (2.3.3)).*

A pergunta que podemos formular é a seguinte: que outra propriedade a sequência numérica poderá ter (além de ser limitada), para que possamos garantir que ela seja converente ?

A resposta será dada no resultado a seguir:

Teorema 2.4.1 *Toda sequência numérica limitada e monótona será convergente em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Faremos a demonstração para o caso em que a sequência numérica $(a_n)_{N \in \mathbb{N}}$ seja crescente.

Os outros casos serão deixados como exercício para o leitor.

Como a sequência numérica $(a_n)_{N \in \mathbb{N}}$ é limitada temos que existe $M > 0$, de modo que

$$|a_n| \leq M, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo o conjunto

$$A \doteq \{a_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$$

será limitado em $\mathbb{R}$.

Portanto existe

$$L \doteq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Afirmamos que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, da definição de supremo, como

$$L \doteq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R},$$

podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$L - \varepsilon < a_{N_o} \leq L. \tag{2.90}$$

Como a sequência numérica $(a_n)_{N \in \mathbb{N}}$ é crescente temos, para $n \geq N_o$, que

$$L - \varepsilon \overset{(2.90)}{<} a_{N_o} \leq a_n \overset{\text{L é limitante superior do conjunto } \underline{A}}{\leq} L < L + \varepsilon, \tag{2.91}$$

ou seja, para $n \geq N_o$, teremos

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

ou ainda

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad n \geq N_o,$$

mostrando que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L = \sup\{a_n \,;\, n \in \mathbb{N}\},$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 2.4.3

1. *O Teorema (2.4.1) acima nos diz que se uma sequência* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é monótona e limitada, então ela será convergente para algum* $L \in \mathbb{R}$ *e, além disso,*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L = \sup\{a_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}. \tag{2.92}$$

2. *Se no Teorema (2.4.1) acima, a sequência numérica* $(a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ *for decrescente (e limitada), então, de modo semelhante, pode-se mostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \inf\{a_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}. \tag{2.93}$$

3. *O resultado acima nos dá uma condição suficiente (mas* **não** *necessária) para que uma sequência numérica limitada, seja convergente em* $\mathbb{R}$*, a saber, que ela seja monótona.*

   Deixaremos como exercício para o leitor uma sequência numérica que seja limitada, não seja monótona, mas é convergente em $\mathbb{R}$*.*

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 2.4.8 *Mostre que a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{2^n}{n!}, \quad \textit{para cada} \quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.94}$$

é convergente para zero, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0\,.$$

Resolução:

Para garantir a convergência em $\mathbb{R}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mostremos que ela é uma sequência numérica limitada e monótona.

Logo, pelo Teorema (2.4.1), segue que ela será convergente em $\mathbb{R}$.

Após isto, mostraremos que o valor do seu limite é zero.

(i) Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

De fato, notemos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(2.94)}{=} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} \\ &= \frac{2^{n+1}\,n!}{2^n\,(n+1)!} \\ &= 2\,\frac{1}{n+1} \\ &\overset{n+1\geq 2}{\leq} 2\,\frac{1}{2} = 1\,. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Como

$$a_n > 0\,, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N},$$

para cada $n\in\mathbb{N}$, mutiplicando (2.95) por $\underline{a_n}$, segue que

$$a_{n+1}\leq a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.96}$$

ou seja, a sequência numérica é decrescente (em particular, monótona).

(ii) Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Do item (i) temos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

Por outro lado,

$$a_n \overset{(2.94)}{>} 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

seque que

$$-2 \leq 0 < a_n \overset{(2.96)}{\leq} a_1 = 2\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

em particular,

$$|a_n| \leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Portanto a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Logo, do Teorema (2.4.1), segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} a_n\,. \tag{2.97}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &\overset{(2.94)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{n}\, \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{n}\, a_{n-1}\right]\,. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = L \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0\,. \tag{2.99}$$

Logo, de (2.99) e (2.98), segue que

$$\begin{aligned} L &= \left[\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right] \left[\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right] \\ &\overset{(2.99)\text{ e }(2.98)}{=} 0 \cdot L \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$L = 0\,, \quad \text{ou ainda,} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para zero, completando a resolução.

□

Exemplo 2.4.9 *Mostre que a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_1 \doteq \sqrt{2}\,, \quad a_2 \doteq \sqrt{2\sqrt{2}}\,, \cdots, a_n \doteq \sqrt{2\,a_{n-1}}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.100}$$

é convergente para $\underline{2}$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Para garantir a convergência em $\mathbb{R}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mostremos que ela é uma sequência numérica limitada e monótona.

Logo, pelo Teorema (2.4.1), segue que ela será convergente em $\mathbb{R}$.

Após isto, mostraremos que o valor do seu limite é igual a $\underline{2}$.

(i) Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Na verdade, mostraremos que

$$0 < a_n \leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.101}$$

que implicará, em particular, que

$$|a_n| \leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada.

Para (2.101), utilizaremos <u>**indução matemática**</u>, isto é, precisaremos mostrar que:

(a) a propriedade (2.101) é válida para $n = 1$;

e

(b) se a propriedade (2.101) for válida para $n = k - 1$, ela será válida para $n = k$.

Notemos que a propriedade (2.101) é válida para $n = 1$, pois

$$0 < a_1 \overset{(2.100)}{=} \sqrt{2} \leq 2\,,$$

ou seja, vale (a).

Além disso, se a propriedade (2.101) for válida para $n = k - 1$, teremos:

$$0 < a_{k-1} \leq 2 \tag{2.102}$$

Mas

$$0 < a_k \overset{(2.100)}{=} \sqrt{2\,\underbrace{a_{k-1}}_{\overset{(2.102)}{\leq}\;2}}$$
$$\leq \sqrt{2\cdot 2} = 2\,,$$

mostrando a propriedade (2.101) será válida para $n = k$, isto é, vale (b).

Assim segue, da indução matemática, que (2.101) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, em particular, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

(ii) Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

Para isto observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(2.100)}{\leq} \frac{\sqrt{2\,a_n}}{a_n} \\ &= \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{a_n}}{(\sqrt{a_n})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} \\ &\overset{(2.101)}{\geq} 1\,, \end{aligned} \tag{2.103}$$

Como

$$a_n > 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, multiplicando-se (2.101) por $\underline{a_n}$, segue que

$$a_{n+1} \geq a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente (em particular, monótona).

Logo, do Teorema (2.4.1), segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Seja

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} a_n\,. \tag{2.104}$$

Então

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &\overset{(2.100)}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\,a_{n-1}} \\ &\overset{\text{propriedades de limite}}{=} \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \\ &\overset{(2.104)}{=} \sqrt{2\,L}\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad L^2 = 2\,L\,.$$

Com isto poderemos ter as seguintes possibildades:

$$L = 0\,, \quad \text{ou} \quad L = 2\,.$$

Notemos que

$$L = 0\,,$$

não poderá ocorrer pois a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e

$$a_n \geq a_1 = \sqrt{2} > 0\,.$$

Portanto deveremos ter

$$L = 2\,,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{2}$, completando a resolução.

□

Observação 2.4.4 *Observemos que na sequência numérica do Exemplo (2.4.9) acima, temos*

$$a_1 = 2^{\frac{1}{2}}, \quad a_2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}, \quad a_3 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}, \cdots, \; a_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}},$$

par cada $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

é uma P.G. (progressão geométrica) de razão

$$r \doteq \frac{1}{2},$$

cujo primeiro termo é

$$a_1 \doteq \frac{1}{2},$$

sabemos que a soma da mesma será igual a

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Logo é natural acharmos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2^1 = 2.$$

Exemplo 2.4.10 *Mostremos que a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_1 \doteq \sqrt{2}, \quad a_2 \doteq \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \quad a_n \doteq \sqrt{2+a_{n-1}}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.105}$$

é convergente para $\underline{2}$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Resolução:

Para garantir a convergência em $\mathbb{R}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mostremos que ela é uma sequência numérica limitada e monótona.

Logo, pelo Teorema (2.4.1), segue que ela será convergente em $\mathbb{R}$.

Após isto, mostraremos que o valor do seu limite é igual a $\underline{2}$.

(i) Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, isto é,

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.106}$$

Para isso usaremos indução matemática, ou seja, mostraremos que:

(a) a propriedade é válida para $n = 1$

e

(b) se a propriedade for válida para $n = k - 1$, então ela também será válida para $n = k$.

Notemos que

$$a_1 \overset{(2.105)}{=} \sqrt{2} \overset{2 \leq 2+\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{\ } \text{ é } \uparrow}{\leq} \sqrt{2+\sqrt{2}} \overset{(2.105)}{=} a_2 ,$$

$$\text{portanto:} \quad a_1 \leq a_2 ,$$

ou seja, vale a propriedade (2.106) para $n = 1$, isto vale (a).

Suponhamos que a propriedade for válida para $n = k - 1$, isto é,

$$a_{k-1} \leq a_k . \tag{2.107}$$

Com isto, teremos:

$$\begin{aligned} a_k &\overset{(2.105)}{=} \sqrt{2 + \underbrace{a_{k-1}}_{\overset{(2.107)}{\leq} a_k}} \\ &\overset{\sqrt{\ } \text{ é } \uparrow}{\leq} \sqrt{2 + a_k} \\ &\overset{(2.105)}{=} a_{k+1} , \end{aligned}$$

mostrando que a propriedade será válida para $n = k$.

Assim, segue da indução matemática, que (2.106) vale para todo $n\imath\mathbb{N}$, ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

(ii) Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$0 < a_n \leq 2 , \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} , \tag{2.108}$$

em particular, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada.

Para isso usaremos, novamente, indução matemática para mostrar (2.108), ou seja, mostremos que

(a) a propriedade é válida para $n = 1$.

e

(b) se a propriedade for válida para $n = k - 1$, então ela será válida para $n = k$.

Notemos que a propriedade é válida para $n = 1$, pois

$$0 < a_1 \overset{(2.105)}{=} \sqrt{2} \leq 2 .$$

Observemos também que, se a propriedade for válida para $n = k - 1$, isto é, se

$$0 < a_{k-1} \leq 2 , \tag{2.109}$$

então ela será válida para $n = k$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} a_k &\overset{(2.105)}{=} \sqrt{2 + a_{k-1}} \\ &\overset{(2.109) \text{ e } \sqrt{\ } \text{ é } \uparrow}{\leq} \sqrt{2+2} \\ &= 2 , \end{aligned}$$

mostrando que a propriedade é válida para $n = k$, ou seja, vale (b).

Assim, do processo de indução matemática, segue que vale (2.108), em particular, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Logo, do Teorema (2.4.1), segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Seja

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} a_n \,. \tag{2.110}$$

Então

$$\begin{aligned}
L = \lim_{n\to\infty} a_n &\overset{(2.105)}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} \\
&\overset{\text{propriedades de limite}}{=} \sqrt{2 + \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}_{\overset{(2.110)}{=} L}} \\
&= \sqrt{2 + L}\,,
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad L^2 = 2 + L\,,$$

ou seja, temos as seguintes possibilidades:

$$L = -1\,, \quad \text{ou} \quad L = 2\,.$$

Observemos que

$$L = -1$$

não poderá ocorrer, pois a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, assim

$$a_n \geq a_1 = \sqrt{2} > 0\,.$$

Portanto, deveremos ter

$$L = 2\,,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{2}$, completando a resolução.

□

Alguns tipos de a sequências numéricas que são divergentes podem ser importantes como veremos a seguir.

2.5 Sequências numéricas divergentes

Definição 2.5.1 *Diremos que uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergente para** $\underline{+\infty}$ *(respectivamente,* $\underline{-\infty}$*) se dado* $K > 0$*, podemos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$*, de modo que, para*

$$n \geq N_o\,, \quad \textit{temos} \quad a_n \geq K \quad (\textit{respectivamente, } a_n \leq -K). \tag{2.111}$$

Neste caso escreveremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\textit{respectivamente, } -\infty)\,.$$

Com isto temos os:

Exemplo 2.5.1 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.112}$$

é uma sequência numérica divergente para $\underline{\infty}$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty\,. \tag{2.113}$$

Resolução:

De fato, dado $K > 0$, consideremos $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$N_o > K\,.$$

Logo,

$$\text{para} \quad n \geq N_o\,, \tag{2.114}$$

$$\text{teremos} \quad a_n \overset{(2.112)}{=} n \overset{(2.114)}{\geq} N_o \geq K\,,$$

mostrando, pela Definição (2.5.1), que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,,$$

isto é, (2.113).

□

Exemplo 2.5.2 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq \frac{1-n^3}{1+n^2}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.115}$$

é uma sequência numérica divergente para $\underline{-\infty}$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{1+n^2} = -\infty\,, \tag{2.116}$$

Resolução:

De fato, dado $K > 0$, conisderemos $N_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$N_o > K + 1\,. \tag{2.117}$$

Assim,

$$\text{para} \quad n \geq N_o \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned} \text{teremos} \quad a_n &= \frac{1-n^3}{1+n^2} \\ &\overset{1\leq n^2}{<} \frac{n^2-n^3}{1+n^2} \\ &\overset{n^2+1\geq n^2\geq 1}{<} \frac{n^2-n^3}{n^2} \\ &\overset{n^2\neq 0}{<} 1-n \\ &\overset{(2.118)}{<} 1-N_o \\ &\overset{(2.117)}{<} -K, \end{aligned} \tag{2.119}$$

mostrando, pela Definição (2.5.1), que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,,$$

isto é, (2.116).

□

Semelhantemente com o caso de convergência, podemos estudar a divergência de uma sequência numérica para ∞ (respectivamente, para $-\infty$), estudando o comportamento de uma função de uma variável real, a valores reais, que a define.

Mais claramente temos:

Proposição 2.5.1 *Suponhamos que a função* $f : (0\,,\infty)$ *(respectivamente,* $(-\infty\,,0)$*)* $\to \mathbb{R}$ *é tal que*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ (respectivamente, } -\infty)\,, \tag{2.120}$$

Então a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.121}$$

é uma sequência numérica divergente para ∞ *(respectivamente, para* $-\infty$*), isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\text{respectivamente, } -\infty)\,. \tag{2.122}$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

□

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 2.5.3 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1-n^3}{1+n^2}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.123}$$

uma sequência numérica divergente para $\underline{-\infty}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{1+n^2} = -\infty\,. \tag{2.124}$$

Resolução:

Notemos que este Exemplo é igual ao Exemplo (2.5.2).

Observemos que se definirmos a função $f:(0\,,\infty)\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \frac{1-x^3}{1+x^2}\,, \quad \text{para cada} \quad x\in(0\,,\infty)\,, \tag{2.125}$$

teremos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{1+x^2} \\
&\overset{\text{tipo: } \frac{-\infty}{\infty}\text{, aplicamos L'Hôspital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left[1-x^3\right]}{\frac{d}{dx}\left[1+x^2\right]} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-3\,x^2}{2\,x} \\
&\overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-3\,x^2}{2} \\
&\overset{\text{Exercício de Cálculo 1}}{=} -\infty\,.
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Como, para cada $n\in\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
a_n &\overset{(2.123)}{=} \frac{1-n^3}{1+n^2} \\
&\overset{(2.125)}{=} f(n)\,,
\end{aligned}$$

pela Proposição (2.5.1) acima, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{x\to\infty} f(x) \\
&\overset{(2.126)}{=} -\infty\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração da identidade (2.124).

□

Exemplo 2.5.4 *A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$a_n \doteq \frac{3^n}{n^3}\,, \quad \textit{para cada} \quad n\in\mathbb{N} \tag{2.127}$$

é uma sequência numérica divergente para $\underline{\infty}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^3} = \infty\,. \tag{2.128}$$

Resolução:

De fato, consideremos a função $f : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \frac{3^x}{x^3}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0\,,\infty)\,. \tag{2.129}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &\overset{(2.129)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{x^3} \\
&\overset{\text{tipo } \frac{\infty}{\infty} \text{ aplicando L'Hôspital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left[3^x\right]}{\frac{d}{dx}\left[x^3\right]} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \ln(3)}{3\,x^2} \\
&\overset{\text{tipo } \frac{\infty}{\infty} \text{ aplicando L'Hôspital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left[3^x \ln(3)\right]}{\frac{d}{dx}\left[3\,x^2\right]} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x (\ln 3)^2}{6\,x} \\
&\overset{\text{tipo } \frac{\infty}{\infty} \text{ aplicando L'Hôspital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left[3^x (\ln 3)^2\right]}{\frac{d}{dx}\left[6\,x\right]} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x (\ln 3)^3}{6} \\
&\overset{\text{Exercício de Cálculo 1}}{=} \infty\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
a_n &\overset{(2.127)}{=} \frac{3^n}{n^3} \\
&\overset{(2.129)}{=} f(n)\,,
\end{aligned}$$

pela Proposição (2.5.1) acima, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{x\to\infty} f(x) \\
&\overset{(*)}{=} \infty\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração da identidade (2.128).

□

Observação 2.5.1

1. *Se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente (respectivamente, decrescente) e não é limitada, então ela será divergente para $\underline{\infty}$ (respectivamante, $\underline{-\infty}$), isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\textit{respectivamente, } \underline{-\infty})\,.$$

2. *Outra classe de a sequências numéricas que não serão alvo de nosso estudo é a classe formada pelas sequências numéricas que são* **oscilatórias**, *ou seja, sequências numéricas que não são sequências numéricas convergentes, nem divergentes para $\underline{\infty}$ ou $\underline{-\infty}$.*

   Por exemplo, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$a_n \doteq (-1)^n, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N},$$

   não convergente, nem divergente para $\underline{\infty}$ ou $\underline{-\infty}$, ou seja, é uma sequência numérica oscilatória.

Temos um teorema da comparação para sequência numérica divergentes para $\underline{\infty}$ (respectivamente, $\underline{-\infty}$), a saber:

Teorema 2.5.1 *Suponhamos que as a sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem:*

$$a_n \leq b_n, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.130}$$

Então:

1. *Se*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{deveremos ter} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty. \tag{2.131}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty, \quad \text{deveremos ter} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty. \tag{2.132}$$

Demonstração:

De **1.**:

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

então dado $K > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que para

$$n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad a_n \geq K. \tag{2.133}$$

Assim, se $n \geq N_o$, segue que

$$b_n \overset{(2.130)}{\geq} a_n \overset{(2.133)}{\geq} K,$$

mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty,$$

completando a demonstração do item 1. .

De modo análogo mostra-se o item 2. .

Os detalhes da demonstração do mesmo serão deixados como exercício para o leitor.

□

Apliquemos isto ao (compare com o Exemplo (2.3.4)):

Exemplo 2.5.5 *Mostre que a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$b_n \doteq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2\,n}}}_{(n+1)-parcelas}, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.134}$$

é uma sequência numérica é divergente para $\underline{\infty}$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2\,n}}}_{(n+1)-parcelas}\right) = \infty\,. \tag{2.135}$$

Resolução:

Para isto, observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos:

$$\begin{aligned}
b_n &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2\,n}}}_{(n+1)-\text{parcelas}} \\
&\overset{\begin{pmatrix} 1 \le n \le 2\,n \\ 1 \le n+1 \le 2\,n \\ \vdots \\ 1 \le 2\,n-1 \le 2\,n \end{pmatrix}}{\geq} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\,n}} + \frac{1}{\sqrt{2\,n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2\,n}}}_{(n+1)-\text{parcelas}} \\
&= \frac{n+1}{\sqrt{2\,n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\,n}} \doteq a_n\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$a_n \le b_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.136}$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\,n}} \overset{\text{Exercício}}{=} \infty\,.$$

Logo, pelo item 1. do Teorema (2.5.1) acima, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2\,n}}}_{(n+1)-\text{parcelas}}\right) \overset{(2.134)}{=} \lim_{n\to\infty} b_n = \infty\,,$$

mostrando (2.135).

□

2.6 Subsequências de uma sequência numérica

Definição 2.6.1 *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica e $A \doteq \{n_1, n_2, \cdots\}$ subconjunto infinito dos números naturais, satisfazendo*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

Como isto podemos construir a sequência numérica $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ (isto é, consideramos a restrição $a_{|_A} : A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

Tal sequência numérica será denominada **subsequência** *da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Observação 2.6.1 *Um outro modo de definir subsequência de uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seria a seguinte:*

Considere uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que seja estritamente crescente.

A sequência numérica $\left(a_{f(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ será dita subsequência da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Temos os:

Exemplo 2.6.1 *Consideremos a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$a_n = \operatorname{sen}\left(n\,\frac{\pi}{2}\right), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.137}$$

Se considerarmos somente os índices ímpares, isto é

$$n_i \doteq 2\,i + 1, \quad \textit{para cada} \quad i \in \mathbb{N},$$

obteremos a subsequência $(a_{2\,i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$\begin{aligned} a_{2\,i+1} &\overset{(2.137)}{=} \operatorname{sen}\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2}\right] \\ &= (-1)^i, \quad \textit{para cada} \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ou seja, a subsequência $(a_{2\,i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será a sequência:

$$-1\,, 1\,, -1\,, 1\,, \cdots$$

Se considerarmos somente os índices pares, isto é,

$$n_i \doteq 2\,i\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \mathbb{N},$$

obteremos a subsequência $(a_{2\,i})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$\begin{aligned} a_{2\,n} &\overset{(2.137)}{=} \operatorname{sen}(2\,i\,\pi) \\ &= 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ou seja, a subsequência $(a_{2\,i})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será a sequência:

$$0\,, 0\,, 0\,, \cdots .$$

□

Exemplo 2.6.2 *Consideremos a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n = n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.138}$$

Então se considerarmos somente os índices ímpares, isto é,

$$n_i \doteq 2\,i + 1\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

obteremos a subsequência $(a_{2\,i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_{2\,i+1} \stackrel{(2.138)}{=} 2\,i + 1\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a subsequência $(a_{2\,i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *será a sequência*

$$1\,,3\,,5\,,7\,,\cdots$$

Se considerarmos somente os índices pares, isto é,

$$n_i \doteq 2\,i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

obteremos a subsequência $(a_{2\,i})_{i\in\mathbb{N}}$, *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_{2\,i} \stackrel{(2.138)}{=} 2\,i\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a subsequência $(a_{2\,i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *será a sequência*

$$2\,,4\,,6\,,\cdots$$

□

Um resultado importante no estudo da convergência de sequências numéricas, utilizandos-e subsequências da mesma, é dado pelo:

Teorema 2.6.1

1. *Se a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{a}$, *então toda subsequência da mesma, será convergente para* $\underline{a}$.

   Em particular, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{a}$, *então para cada* $k_o \in \mathbb{N}$, *a subsequência* $(a_{n+k_o})_{n\in\mathbb{N}}$, *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *será convergente para* $\underline{a}$.

2. *Se toda subsequência da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{a}$, *então a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente para* $\underline{a}$.

3. *Toda sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *possui uma subsequência monótona.*

4. *Toda sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *limitada, possui uma subsequência que é convergente.*

Demonstração:

De 1. :

Se
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$
então dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que se
$$n \geq N_o\,, \quad \text{temos que} \quad |a_n - a| < \varepsilon\,. \tag{2.139}$$

Logo, para $n_i \geq N_o$ temos que
$$|a_{n_i} - a| \overset{(2.139)}{<} \varepsilon\,,$$
mostrando que
$$\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a\,,$$
como queríamos demonstrar.

Observemos que para cada $k_o \in \mathbb{N}$ fixado, tem que a sequência $(a_{n+k_o})_{n\in\mathbb{N}}$ será uma subsequência da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$ segue, do que acabamos de mostrar, que a subsequência $(a_{n+k_o})_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para $\underline{a}$, completando a demonstração do item 1.
.

De 2. :

Observemos que para cada $k_o \in \mathbb{N}$ fixado, a sequência $(a_{n+k_o})_{n\in\mathbb{N}}$ será subsequência da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Logo, por hipótese, será convergente para $\underline{a}$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que se
$$n \geq N_1\,, \quad \text{temos que} \quad |a_{n+k_o} - a| < \varepsilon\,,$$
que é equivalente a escrever
$$|a_n - a| < \varepsilon\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq N_o \doteq N_1 + k_o\,,$$
mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, completando a demonstração do item 2. .

De 3. :

Consideremos os seguintes subconjuntos:
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\doteq \{p \in \mathbb{N};\quad \text{podemos encontrar} \quad n > p\,, \quad \text{de modo que} \quad a_n \geq a_p\}\,,\\ \mathcal{B} &\doteq \{q \in \mathbb{N};\quad \text{podemos encontrar} \quad n > q\,, \quad \text{de modo que} \quad a_n \leq a_q\}\,, \end{aligned} \tag{$*$}$$

Notemos que
$$\mathbb{N} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\,.$$

Logo, se o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ for finito, teremos que o conjunto $\underline{\mathcal{B}}$ será infinito, ou seja, existirá uma subsequência da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é decrescente.

De fato, como o conjunto $\underline{\mathcal{B}}$ é infinito e contido em $\mathbb{N}$, temos que;

$$\mathcal{B} = \{q_i \,;\, i \in \mathbb{N}\},$$

onde

$$p_i < p_{i+1}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

Da definição de $\underline{\mathcal{B}}$ (isto é, de (*)), segue que

$$a_{q_{i+1}} \le a_{q_i}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

ou ainda, a subsequência $(a_{q_i})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será decrescente.

Por outro lado, se o conjunto $\underline{\mathcal{B}}$ for finito, teremos que o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ será infinito, ou seja, existirá uma subsequência da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é crescente.

A verificação deste fato, será deixada como exercício para o leitor.

<u>De 4. :</u>

Notemos que toda subsequência de uma sequência numérica limitada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada.

Por outro lado, do item 3. acima, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência monótona, que indicaremos por $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Assim, a subsequência $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ será monótona e limitada.

Portanto, do Teorema (2.4.1), segue que a subsequência $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ será convergente, completando a demonstração do item 4. e do resultado.

□

2.7 Sequências numéricas de Cauchy

A seguir introduziremos uma nova classe de sequencias numéricas, a saber:

Definição 2.7.1 *Diremos que uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será dita uma* <u>**sequência numérica de Cauchy**</u>*, se dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo*

$$\textit{para} \quad n\,, m \ge N_o\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon\,. \tag{2.140}$$

Observação 2.7.1 *Uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy se a diferença, em módulo, entre dois termos da mesma for arbitrariamente pequena, para índices suficientemente grandes.*

Temos os:

Exemplo 2.7.1 *A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.141}$$

é uma sequência numérica de Cauchy.

Resolução:

De fato pois, dado $\varepsilon > 0$, considerarmos $N_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$N_o > \frac{2}{\varepsilon}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{2}{N_o} < \varepsilon\,. \tag{2.142}$$

Logo, para $n\,, m \geq N_o$, segue

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{m} < \frac{1}{N_o}, \tag{2.143}$$

e assim, teremos:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\overset{(2.141)}{=} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\overset{(2.143)}{<} \frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \\ &= \frac{2}{N_o} \overset{(2.142)}{<} \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{2.144}$$

ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência numérica de Cauchy.

□

Observemos que a sequência numérica do Exemplo (2.7.1) acima é convergente em $\mathbb{R}$.

Isto é, no caso acima, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$ e é uma sequência numérica de Cauchy.

Isto ocorre em geral, como mostra o:

Teorema 2.7.1 *Toda sequência numérica convergente é uma sequência numérica de Cauchy.*

Demonstração:

De fato, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, então dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.145}$$

Logo, para $n\,, m \geq N_o$, segue que

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a| + \underbrace{|a - a_m|}_{=|a_m - a|} \\ &\overset{(2.145)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy, completando a demonstração.

□

A seguir trataremos do seguinte importante exemplo:

Exemplo 2.7.2 *Consideremos a sequência numérica* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$\begin{aligned} S_1 &\doteq 1 \\ S_2 &\doteq 1 + \frac{1}{2} \\ S_3 &\doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &\cdots \\ S_n &\doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.146}$$

Mostre que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *é divergente para* $\underline{+\infty}$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty .$$

Resolução:

Mostraremos que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** é uma sequência numérica de Cauchy. De fato, para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |S_{2k} - S_k| &\overset{(2.146)}{=} \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{2k}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)\right| \\ &= \underbrace{\frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{2k}}_{k-\text{parcelas}} \\ &\overset{\begin{cases} k+1 \le 2k \\ k+2 \le 2k \\ \vdots \\ 2k-1 \le 2k \end{cases}}{\geq} \underbrace{\frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k}}_{k-\text{parcelas}} \\ &= k\,\frac{1}{2k} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|S_{2k} - S_k| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo dado, por exemplo,

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{3} > 0, \tag{2.147}$$

segue que **não** podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo para $n, m \geq N_o$, tenhamos

$$|S_n - S_m| < \varepsilon = \frac{1}{3}.$$

De fato, pois para cada $N_o \in \mathbb{N}$, se tomarmos $m \geq N_o$, então para

$$n \doteq 2\,m \geq N_o$$

(com isto teremos que $n\,, m \geq N_o$) segue que

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| &= |S_{2\,m} - S_m| \\ &\geq \frac{1}{2} \\ &> \frac{1}{3} \\ &\overset{(2.147)}{=} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

ou seja, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** é uma sequência numérica de Cauchy.

Logo, do Teorema (2.7.1), segue que numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não poderá ser convergente em $\mathbb{R}$.

Para finalizar, observemos que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acima é estritamente crescente, pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &\overset{(2.146)}{=} \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\overset{(2.146)}{=} s_n} + \frac{1}{n+1} \\ &= S_n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} \\ &> S_n\,. \end{aligned}$$

Como a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e não é convergente em $\mathbb{R}$, ela não poderá ser limitada (pois se fosse, seria monótona e limitada, portanto, do Teorema (2.4.1), deveria ser convergente em $\mathbb{R}$).

Portanto deveremos ter

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\,,$$

completando a resolução.

□

Observação 2.7.2

1. *O Exemplo (2.7.2) acima, será muito importante ao longo do próximo capítulo, que tratará das séries numéricas.*

2. *Com isto surge a pergunta: "vale a recíproca do Teorema (2.7.1) acima? ".*

   A resposta será positiva, se considerarmos a sequência numérica tomando valores sobre o **todo** *o conjunto dos números reais, ou seja, em $\mathbb{R}$.*

   Para mostrar isso precisaremos de alguns resultados que serão exibidos a seguir.

Proposição 2.7.1 *Toda sequência numérica de Cauchy é uma sequência numérica limitada.*

Demonstração:

De fato, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência numérica de Cauchy, então dado

$$\varepsilon \doteq 1\,,$$

podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} &\text{para} \quad n\,,m \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon = 1\,,\\ &\text{em particular,} \quad |a_n - a_{N_o}| < 1\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq N_o\,. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Logo, para $n \geq N_o$, teremos:

$$\begin{aligned} |a_n| - |a_{N_o}| &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a_{N_o}| \overset{(2.148)}{<} 1\,,\\ \text{ou seja,} \quad |a_n| &\leq |a_{N_o}| + 1\,. \end{aligned} \tag{2.149}$$

Consideremos

$$M \doteq \max\{|a_1|\,,|a_2|\,,\cdots,|a_{N_o-1}|\,,|a_{N_o}|+1\}\,. \tag{2.150}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ de (2.149) e (2.150), segue que

$$|a_n| \leq M\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, completando a demonstração.

□

Observação 2.7.3 *A recíproca do resultado acima* __*não*__ *é verdadeira, isto é, nem toda sequência numérica limitada é uma sequência numérica de Cauchy, como mostra o seguinte exemplo:*

Consideremos a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$a_n \doteq (-1)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.151}$$

A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica limitada mas __*não*__ *é uma sequência numérica de Cauchy.*

De fato, se considerarmos, por exemplo,

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{2} > 0\,, \tag{2.152}$$

segue que, para $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n+1}| &\overset{(2.151)}{=} |(-1)^n - (-1)^{n+1}|\\ &= |(-1)^n\,[1-(-1)]|\\ &= |(-1)^n|\;|1+1|\\ &= 2\\ &> \frac{1}{2} \overset{(2.152)}{=} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ __*não*__ *é uma sequência numérica de Cauchy.*

Temos também o:

Proposição 2.7.2 *Se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e possui uma subsequência convergente para $\underline{a}$, então a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para $\underline{a}$.*

Demonstração:

De fato, suponhamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy, de modo que uma subsequência numérica da mesma, que indicaremos por $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, seja convergente para $\underline{a}$.

Como sequência numérica $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ (que é uma subsequência numérica da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$), é convergente para $\underline{a}$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n_i \geq N_1\,, \quad \text{teremos} \quad |a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.153}$$

Como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$, de modo

$$\text{para} \quad n\,, m \geq N_2 \quad \text{teremos} \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.154}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1\,, N_2\}\,. \tag{2.155}$$

Portanto, para

$$n \geq N_o\,, \quad \text{ou seja,} \quad n \geq N_1 \;\; \text{e} \;\; n \geq N_2\,,$$

teremos

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_{N_o} + a_{N_o} - a| \\ &= |(a_n - a_{N_o}) + (a_{N_o} - a)| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a_{N_o}| + |a_{N_o} - a| \\ &\overset{(2.154)\text{ e }(2.153)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que a sequência numérica é convergente para $\underline{a}$, completando a demonstração.

□

Com isto podemos enunciar e demonstrar o:

Teorema 2.7.2 *(critério de Cauchy para convergência de sequências numéricas)*

Um sequência numérica é convergente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, ela é uma sequência numérica de Cauchy.

Demonstração:

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica em $\mathbb{R}$.

O Teorema (2.7.1) afirma que se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente, ela deverá ser uma sequência numérica de Cauchy.

Por outro lado, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy então, da Proposição (2.7.1), segue que ela será uma sequência numérica limitada.

Mas, do item 3. do Teorema (2.6.1), temos que toda sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que é monótona, que indicaremos por $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, seque que a subsequência numérica monótona $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ também será limitada e assim, do Teorema (2.7.1), segue que a subsequência numérica $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ deverá ser convergente em $\mathbb{R}$.

Portanto a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em $\mathbb{R}$.

Logo, da Proposição (2.7.2) acima, segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.7.4 *O Teorema (2.7.2) acima, não nos diz para que valor a sequência numérica de Cauchy converge em* $\mathbb{R}$.

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 2.7.3 *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência numérica que tem a seguinte propriedade:*

$$|a_{n+1}-a_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.156}$$

Afirmamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente em* $\mathbb{R}$.

<u>**Resolução:**</u>

De fato, se considerarmos $n\,,m\in\mathbb{N}$, com $n\leq m$, ou seja,

$$m=n+k\,, \quad \text{para algum} \quad k\in\mathbb{N}\,,$$

segue que

$$\begin{aligned}
|a_n-a_m| &= |a_n-a_{n+k}| \\
&= |a_n-a_{n+1}+a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+2}+\cdots-a_{n+k}| \\
&= |(a_n-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+2}+\cdots-a_{n+k})| \\
&\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_{n+2}|+|a_{n+2}-a_{n+3}|+\cdots+|a_{n+k-1}-a_{n+k}| \\
&\overset{(2.156)}{\leq} \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+k-1}} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}}_{k-\text{parcelas}}\right) \\
&\overset{(2.157)}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

pois,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}} \leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N}\,. \tag{2.157}$$

Portanto

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{para} \quad m \geq n. \tag{2.158}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, considerando-se

$$N_o > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.159}$$

para

$$m \geq n \geq N_o, \tag{2.160}$$

segue que

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\overset{(2.158)}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\overset{(2.160)}{\leq} \frac{1}{2^{N_o-1}} \\ &\overset{(2.159)}{\leq} \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que a sequência numérica é uma sequência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Logo, do Teorema (2.7.2), segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$, completando a resolução.

□

Uma generalização do exemplo acima é dado pelo:

Exercício 2.7.1 *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica que tem a seguinte propriedade:*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r^n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.161}$$

onde $r \in [0, 1)$ está fixado.

Afirmamos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Resolução:

De modo análogo a resolução do Exemplo (2.7.3) podemos mostrar que a sequência numérica acima é uma sequência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$ logo, pelo Teorema (2.7.2), deverá ser convergente em $\mathbb{R}$.

Para mostrarmos que a sequência numérica acima é uma sequência numérica de Cauchy precisaremos mostrar que

$$|a_n - a_m| \leq \frac{r^n}{1-r}, \quad \text{para} \quad m \geq n.$$

Deixaremos os detalhes da verificção deste fato como exercício para o leitor.

□

Com isto podemos resolver o:

Exemplo 2.7.4 *Mostre que a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$\begin{aligned} a_1 &\doteq 1\,,\\ a_2 &\doteq 1+\frac{1}{3}\,,\\ &\cdots\\ a_n &= 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}} \end{aligned} \tag{2.162}$$

é uma sequência numérica convergente em $\mathbb{R}$*.*

Resolução:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} |a_{n+1}-a_n| &\overset{(2.162)}{=} \left|\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\right)-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)\right|\\ &= \frac{1}{3^n}\\ &= r^n\,, \qquad \text{onde} \qquad r \doteq \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Logo, do Exemplo (2.7.1) acima, segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

□

2.8 Exercícios

Capítulo 3

Séries Numéricas

3.1 Definições

A seguir trataremos de uma classe especial de sequências numéricas, denominadas séries numéricas, a saber:

Definição 3.1.1 *Dada a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos considerar uma outra sequência numérica, que indicaremos por $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujos termos são definidos da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} S_1 &\doteq a_1\,, \\ S_2 &\doteq a_1 + a_2\,, \\ S_3 &\doteq a_1 + a_2 + a_3\,, \\ &\vdots \\ S_n &\doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, que será denominada de **série numérica**, *definida pela sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, simplesmente,* **série dos a_n**.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número real (ou complexo) $\underline{a_n}$ será denominado **termo da série numérica (ou n-ésimo termo da)** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo $\underline{S_n}$ da sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou seja, da série numérica) será denominado **n-ésima soma parcial**, *ou* **soma parcial de ordem n**, *ou* **reduzida de ordem n** *da série numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Denotaremos a série numérica acima por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \quad \text{ou} \quad \sum a_n\,, \quad \text{ou ainda} \quad \sum_{1}^{\infty} a_n\,. \tag{3.2}$$

Observação 3.1.1 *Observemos que (3.2) denotam a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, cada termo desta sequência numérica é dada por (3.1).*

A sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(ou seja, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*) também poderá ser chamada de* **sequência numérica das somas parciais da série numérica** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exemplo 3.1.1 *Consideremos a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq (-1)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.3}$$

Com isto temos que série numérica, associada a esta sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, que denotaremos por* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, terá os seguintes termos:*

$$\begin{aligned}
S_1 &\doteq a_1 \\
&\overset{(3.3)}{=} (-1)^1 \\
&= -1\,, \\
S_2 &\doteq a_1 + a_2 \\
&\overset{(3.3)}{=} (-1)^1 + (-1)^2 \\
&= -1 + 1 = 0\,, \\
S_3 &\doteq a_1 + a_2 + a_3 \\
&\overset{(3.3)}{=} (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 \\
&= -1 + 1 - 1 = -1\,, \\
&\vdots \\
S_n &\doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \\
&\overset{\textit{Exercício}}{=} \frac{-1 + (-1)^n}{2}\,, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Observação 3.1.2 *Observemos que a sequência numérica* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(ou seja, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*) é divergente.*

De fato, pois a subsequência, da sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, cujos índices são pares, converge para* $\underline{0}$*, pois*

$$S_{2n} \overset{(3.4)}{=} 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

e a subsequência, da sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, cujos índices são ímpares, converge para* $\underline{-1}$*, pois*

$$S_{2n+1} \overset{(3.4)}{=} -1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Portanto, pelo item 1. do Teorema (2.6.1), segue que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é divergente.*

Exemplo 3.1.2 *Considereremos a sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.5}$$

A série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, associada a esta sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, que denotaremos por* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, terá os seguintes termos:*

$$\begin{aligned}
S_1 &\doteq a_1 \\
&\overset{(3.5)}{=} \frac{1}{1} \\
&= 1\,, \\
S_2 &\doteq a_1 + a_2 \\
&\overset{(3.5)}{=} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\,, \\
S_3 &\doteq a_1 + a_2 + a_3 \\
&\overset{(3.5)}{=} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,, \\
S_4 &\doteq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\overset{(3.5)}{=} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,, \\
&\vdots \\
S_n &\doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\overset{(3.5)}{=} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\,,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

□

Observação 3.1.3 *Vimos, no Exemplo (2.7.2), que a sequência numérica* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é divergente para* $\underline{+\infty}$*, isto é*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\,. \tag{3.7}$$

Exemplo 3.1.3 *Consideremos a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$\begin{aligned}
a_1 &\doteq 1\,,\\
a_2 &\doteq -1\,,\\
a_3 &\doteq \frac{1}{2}\,,\\
a_4 &\doteq -\frac{1}{2}\,,\\
a_5 &\doteq \frac{1}{3}\,,\\
&\vdots\\
a_{2n-1} &\doteq \frac{1}{n}\,, && (3.8)\\
a_{2n} &\doteq -\frac{1}{n}\,, && (3.9)\\
&\cdots
\end{aligned}$$

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, associada a esta sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, que indicaremos por* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, terá os seguinte termos:*

$$\begin{aligned}
S_1 &\doteq a_1\\
&\overset{n=1\ em\ (3.8)}{=} \frac{1}{1}\\
&= 1\,,\\
S_2 &\doteq a_1 + a_2\\
&\overset{n=1\ em\ (3.8)\ e\ (3.9)}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{1}\\
&= 0\,,\\
S_3 &\doteq a_1 + a_2 + a_3\\
&\overset{n=1\ em\ (3.8),(3.9)\ e\ n=2\ em\ (3.8)}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}\,,\\
S_4 &\doteq a_1 + a_2 + a_3 + a_4\\
&\overset{n=1\ em\ (3.8),(3.9)\ e\ n=2\ em\ (3.8),(3.9)}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\\
&= 0\,,\\
&\vdots\\
S_n &\doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$= \begin{cases} 0\,, & para \quad n \text{ é par} \\ \dfrac{2}{n+1}\,, & para \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}\,, \tag{3.10}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

□

Observação 3.1.4 *Observemos que a sequência numérica* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero, isto é*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0\,. \tag{3.11}$$

Exemplo 3.1.4 *Consideremos a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde*

$$a_n = c\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.12}$$

(a sequência numérica constante) onde $c \in \mathbb{R}$ *é fixado.*

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, associada a esta sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, que denotaremos por* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, terá os seguinte termos:*

$$\begin{aligned}
S_1 &\doteq a_1 \\
&\overset{(3.12)}{=} c\,, \\
S_2 &\doteq a_1 + a_2 \\
&\overset{(3.12)}{=} c + c \\
&= 2\,c, \\
S_3 &\doteq a_1 + a_2 + a_3 \\
&\overset{(3.12)}{=} c + c + c \\
&= 3\,c, \\
&\vdots \\
S_n &\doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\overset{(3.12)}{=} \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n-\text{parcelas}} \\
&= n\,c\,,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

□

Observação 3.1.5 *Logo, de (3.13), segue que a sequência numérica* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente (para zero) se, e somente se,* $c = 0$.

Na verdade

$$\text{a sequência numérica } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ será: } \begin{cases} \text{divergente para } +\infty\,, & \text{para } c > 0\,, \\ \text{divergente para } -\infty\,, & \text{para } c < 0\,, \\ \text{convergente para } 0\,, & \text{para } c = 0\,. \end{cases} \tag{3.14}$$

A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

3.2 Operações com séries numéricas

Podemos operar com séries numéricas usando as operações de sequências numéricas introduzidas na Definição (2.2.1), ou ainda:

Definição 3.2.1 *Dadas as séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), podemos definir:*

i. a **soma das séries numéricas** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **e** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *indicada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,,$$

como sendo a série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \doteq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)\,. \tag{3.15}$$

ii. a **diferença das séries numéricas** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **e** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *indicada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,,$$

como sendo a série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \doteq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)\,. \tag{3.16}$$

iii. a **multiplicação da série numérica** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **pelo um número real (ou complexo)** $\underline{\alpha}$, *indicada por*

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,$$

como sendo a série numérica:

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha\, a_n)\,. \tag{3.17}$$

iiv. *o* **produto das séries numéricas** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *será indicada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,,$$

é a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, *onde*

$$\begin{aligned} c_n &\doteq \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n-k} \\ &= a_1\, b_{n-1} + a_2\, b_{n-2} + \cdots + a_{n-2}\, b_2 + a_{n-1}\, b_1\,, \end{aligned} \tag{3.18}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.2.1

1. *No caso das séries numéricas serem do tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,,$$

a série produto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,,$$

é a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *onde*

$$\begin{aligned} c_n &\doteq \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= a_o\, b_n + a_1\, b_{n-1} + a_2\, b_{n-2} + \cdots + a_{n-2}\, b_2 + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_o\,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. *O quociente das séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *que será indicado por*

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} \quad ou \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,,$$

pode também ser definido, porém isto é um pouco mais delicado e será deixado para outra ocasião.

Os interessados em ver como é definida a série quociente pode ver o item **9.** *(página 73) das Referências (8.5).*

Com isto temos o:

Exercício 3.2.1 *Considerando as seguintes séries numéricas:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{3.20}$$

então podemos considerar as seguintes séries numéricas:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n &\overset{(3.20)\ e\ (3.15)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2} \right), \\
10 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &\overset{(3.20)\ e\ (3.17)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n} \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n &\overset{(3.20)\ e\ (3.16)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Convergência de séries numéricas

Como vimos nos Exemplo (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) e (3.1.4) da seção (3.1), algumas das sequências numéricas das somas parciais consideradas (ou sejam, das séries numéricas consideradas) são convergentes, outras não.

Baseado nisto, introduziremos a:

Definição 3.3.1 *Diremos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* <u>**convergente**</u>*, se a sequência numérica das somas parciais, isto é, a sequência numérica* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *(que é a própria série numérica), for convergente.*

Nesta situação, se a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge para* $S \in \mathbb{R}$*, isto é, se*

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

diremos que o número real (ou complexo) <u>S</u> *é a* <u>**soma da serie numérica**</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Neste caso escreveremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq S\,. \tag{3.21}$$

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, não for convergente, diremos que ela é* **divergente**.

Observação 3.3.1

1. *Observemos que se série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, com soma* $\underline{S}$*, então*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= S \\ &\overset{(3.21)}{=} \lim_{n\to\infty} S_n \\ &\overset{(3.1)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right),\end{aligned}$$

$$\textit{ou seja,}\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i\,. \tag{3.22}$$

2. *Vale observar que símbolo* $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ *denota duas coisas diferentes.*

   Masi precisamente: por um lado, denota a série numérica, isto é, a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e, por outro lado, sua soma* $\underline{S}$*, ou seja, o limite da sequência numérica* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, se ele existir.*

3. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente em* $\mathbb{R}$*, como soma igual a* $S \in \mathbb{R}$ *se, e somente se, a sequência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente para* $\underline{S}$*, em* $\mathbb{R}$ *que, pela Definição (2.3.1), é equivalente a dizer que, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$*, de modo que,*

$$\textit{para}\quad n \geq N_o\,,\quad \textit{deveremos ter}\quad |S_n - S| < \varepsilon\,. \tag{3.23}$$

Consideremos alguns exemplos:

Exemplo 3.3.1 *A série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tag{3.24}$$

é divergente.

Resolução:

De fato pois, como vimos no Exemplo (3.1.1) da seção (3.1), a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente.

Portanto, pela Definição (3.3.1), temos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente.

$\square$

Exemplo 3.3.2 *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, onde*

$$a_{2n+1} \doteq \frac{1}{n} \quad e \quad a_{2n} \doteq -\frac{1}{n}, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N},$$

é convergente para zero.

Em particular, a soma da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é igual a zero, ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

Resolução:

De fato pois, como vimos no Exemplo (3.1.3) da seção (3.1), a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para zero.

Portanto, pela Definição (3.3.1), temos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, com soma igual a zero, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

$\square$

Exemplo 3.3.3 *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, onde*

$$a_n \doteq c, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N},$$

será divergente, se $c \neq 0$*, e será convergente para zero, se* $c = 0$*.*

Resolução:

De fato pois, como vimos no Exemplo (3.1.4) da seção (3.1), a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será divergente se $c \neq 0$, e será convergente para zero, se $c = 0$.

Portanto, pela Definição (3.3.1), temos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, com soma igual a zero, se $c = 0$, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

e será a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, se $c \neq 0$.

$\square$

Exemplo 3.3.4 *Mostre a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} \tag{3.25}$$

é convergente, com soma igual a $\underline{1}$*, ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1\,. \tag{3.26}$$

<u>**Resolução:**</u>

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n\,(n+1)}\,, \tag{3.27}$$

assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}\,.$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\
&\overset{(3.27)}{=} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}\,.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &\overset{(3.28)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\overset{\text{seção }(2.3)}{=} 1\,,
\end{aligned}$$

ou seja, pela Definição (3.3.1), a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ é convergente, com soma igual a $\underline{1}$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1\,,$$

ou seja, (3.27) é verdadeira.

$\square$

Exemplo 3.3.5 *A série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n \tag{3.29}$$

é convergente, se $c \in [0\,,1)$, *e divergente para* $\underline{+\infty}$, *se* $c \in [1\,,\infty)$.

Além disso, no caso convergente, isto é, se

$$c \in [0\,,1)$$

a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^n$, *terá soma igual a* $\dfrac{c}{1-c}$, *isto é,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n = \frac{c}{1-c}\,. \tag{3.30}$$

<u>**Resolução:**</u>

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq c^n\,, \tag{3.31}$$

assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c^n\,.$$

Observemos primeiramente que, para cada $r \in [0\,,\infty)$ e $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$1 + r + r^2 \cdots + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1-r}\,. \tag{3.32}$$

Para mostrar isto, basta notarmos que

$$(1-r)\,\left(1 + r + r^2 \cdots + r^k\right) = 1 - r^{k+1}\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
S_1 &\doteq a_1 \\
&\overset{(3.31)}{=} c\,, \\
S_2 &\doteq a_1 + a_2 \\
&\overset{(3.31)}{=} c + c^2\,, \\
S_3 &\doteq a_1 + a_2 + a_3 \\
&\overset{(3.31)}{=} c + c^3 + c^3\,, \\
&\vdots \\
S_n &\doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,, \\
&\overset{(3.31)}{=} c + c^2 + \cdots + c^n\,, \\
&= c\,\left(1 + c + \cdots + c^{n-1}\right) \\
&\overset{(3.32)}{=} = c\,\frac{1-c^n}{1-c}\,,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Logo, se $c \in [0\,,1)$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} c^n &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln c} \\ &\overset{\ln(c)<0}{=} 0\,.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &\overset{(3.33)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(c\,\frac{1-c^n}{1-c}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(c\,\frac{1}{1-c} - c\,\frac{c^n}{1-c}\right) \\ &= \frac{c}{1-c}\,.\end{aligned}$$

Logo, pela Definição (3.3.1), temos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ é convergente, se $c \in [0\,,1)$ e sua soma será igual a $\frac{c}{1-c}$, isto é

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} c^n &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \frac{c}{1-c}\,.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $c = 1$, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ será divergente (veja o Exemplo (3.3.3)).

Para finalizar, notemos que para $c \in (1\,,\infty)$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} c^n &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln c} \\ &\overset{\ln(c)>0}{=} \infty\,,\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(c\,\frac{1-c^n}{1-c}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(c\,\frac{1}{1-c} - c\,\frac{c^n}{1-c}\right) \\ &\overset{c>1>0}{=} \infty\,,\end{aligned}$$

portanto, para cada $c \in (1\,,\infty)$, pela Definição (3.3.1), temos que a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ será divergente, para $\underline{+\infty}$, completando a demonstração da afirmação.

$\square$

Observação 3.3.2 *Como vimos anteriormente no Exemplo (2.7.2), a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente.*

A seguir exibiremos uma outra maneira de mostrar isto.

Exemplo 3.3.6 *A série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{3.34}$$

é divergente.

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n}, \tag{3.35}$$

assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Mostraremos que sequência das somas parciais da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ não é limitada logo, pela Proposição (2.3.2), segue que ela não poderá ser convergente, ou seja, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Para tanto, observemos que,

$$\begin{aligned}
& S_1 \doteq a_1 \\
& \quad \overset{(3.35)}{=} 1 \\
& \quad = (2+0)\frac{1}{2}, \\
\text{isto é,} \quad & S_{2^0} \geq (2+0)\frac{1}{2}, \\
& S_2 \doteq a_1 + a_2 \\
& \quad \overset{(3.35)}{=} 1 + \frac{1}{2} \\
& \quad = (2+1)\frac{1}{2}, \\
\text{isto é,} \quad & S_{2^1} \geq (2+1)\frac{1}{2}, \\
& S_4 \doteq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
& \quad \overset{(3.35)}{=} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
& \quad = 1 + \frac{13}{12} > (2+2)\frac{1}{2}, \\
\text{isto é,} \quad & S_{2^2} \geq (2+2)\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pode-se mostrar, por indução, que :

$$\begin{aligned} S_{2^n} &\doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \\ &\geq (2+n)\,\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício exercício para o leitor.

Logo a subsequência $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ não será limitada.

De fato, como

$$\lim_{n\to\infty} (2+n)\,\frac{1}{2} = \infty\,,$$

da desigualdade acima e do item 1. do Teorema (2.5.1), segue que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty\,.$$

Como consequência temos que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não poderá ser limitada, e assim, pela Proposição (2.3.2), teremos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ será divergente, completando a resolução.

□

Observação 3.3.3

1. *A série numérica* (3.34) *será denominada* <u>**serie harmônica**</u>.

   Segue do Exemplo (2.7.2) *ou do Exemplo* (3.3.6), *que a série harmônica é uma série numérica divergente.*

2. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ *será denominada* <u>**serie geométrica**</u> *de razão* $c \in \mathbb{R}$.

   Do Exemplo (3.3.5) *acima, sabemos que a série geométrica de razão* $\underline{c}$ *é uma série numérica convergente, se* $c \in [0\,,1)$, *cuja soma será igual a* $\frac{c}{1-c}$, *isto é,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n = \frac{c}{1-c}$$

   e divergente, para $\underline{+\infty}$, *se* $c \in [1\,,\infty)$.

Valem as propriedades básicas de convergência para a convergência de séries numéricas, a saber:

Proposição 3.3.1 *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries numéricas convergentes, cujas somas são* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$, *respectivamente e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então as séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serão convergentes, com somas $\underline{a \pm b}$ *e* $\underline{\alpha\, a}$*, respectivamente, isto é,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,, \tag{3.36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\, a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,. \tag{3.37}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Como as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, com somas $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, então, considerando-se as sequências numéricas $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$S_n \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad R_n = \sum_{i=1}^{n} b_i\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.38}$$

temos, pela Definição (3.3.1), que que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} R_n = b\,. \tag{3.39}$$

Definindo-se a sequência numérica $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} T_n &\doteq (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \\ &\overset{\text{soma finita}}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\,, \end{aligned} \tag{3.40}$$

segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} T_n &\overset{(3.40)}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\overset{(3.38)}{=} S_n} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i}_{\overset{(3.38)}{=} R_n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n \\ &\overset{(3.39)}{=} a + b\,. \end{aligned}$$

Notemos que a sequência numérica $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ou seja, da Definição (3.3.1), acabamos de mostrar que a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, com soma $\underline{a + b}$.

De modo análogo, pode-se mostrar o caso correspondente para a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para a outra situação, como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\,, \tag{3.41}$$

então definido-se a sequência numérica $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$U_n \doteq \sum_{i=1}^{n} (\alpha\, a_i)\,, \tag{3.42}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U_n &\overset{(3.42)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\alpha\, a_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{=S_n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\alpha\, S_n) \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} S_n \\
&\overset{(3.42)}{=} \alpha\, a\,.
\end{aligned}$$

Notemos que a sequência numérica $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a série $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ou seja, da Definição (3.3.1), acabamos de mostrar que a serie numérica $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, com soma igual a $\underline{\alpha\, a}$, completando a demonstração do resultado.

□

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 3.3.7 *Expressar o número real*

$$0,333\cdots$$

na forma de um número racional, isto é, na forma

$$\frac{p}{q}\,, \quad \textit{onde} \quad p\,, q \in \mathbb{Z}\,,$$

com $q \neq 0$.

Resolução:

Para isto observemos que definido-se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$\begin{aligned}
a_1 &\doteq 0,3 \\
&= 3\cdot 10^{-1}\,, &\quad (3.43)\\
a_2 &\doteq 0,03 \\
&= 3\cdot 10^{-2}\,, &\quad (3.44)\\
a_3 &\doteq 0,003 \\
&= 3\cdot 10^{-3}\,, &\quad (3.45)\\
&\vdots \\
a_n &\doteq 0,\underbrace{00\cdots 3}_{n-\text{posições}} \\
&= 3\cdot 10^{-n}\,, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N}\,, &\quad (3.46)
\end{aligned}$$

temos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ associada à sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, terá seus termos dados por:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
&\overset{(3.43)}{=} 3\cdot 10^{-1}\,, \\
S_2 &= a_1 + a_2 &\quad (3.47)\\
&\overset{(3.43)\text{ e }(3.44)}{=} 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} \\
&= 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right)\,, \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &\quad (3.48)\\
&\overset{(3.43),(3.44)\text{ e }(3.45)}{=} 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} \\
&= 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right)\,, \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\overset{(3.46)}{=} 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} + \cdots + 3\cdot 10^{-n} \\
&= 3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^i\,, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N}\,. &\quad (3.49)
\end{aligned}$$

Notemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente para $0,333\cdots$.

Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{(3.46)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-n}$$
$$\overset{\text{Prop. (3.3.1)}}{=} 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$
$$\overset{\text{Exemplo (3.3.5) com } c \doteq \frac{1}{10} < 1}{=} 3 \left(\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \right)$$
$$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

que mostra como surge a fórmula aprendida no colégio, que diz que para transformar um número que é uma dízima periódica para forma de um quociente entre números inteiros, basta colocar no numerador o período e no denominador tantos $\underline{9}$ quantos forem o número de dígitos do período.

No caso acima o período é $\underline{3}$, logo tem apenas um dígito assim, na forma de fração, teremos

$$0,333\cdots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Deixaremos para o leitor o:

Exercício 3.3.1 *Expressar o número real*

$$0,272727\cdots$$

na forma de um número racional, isto é, na forma

$$\frac{p}{q}, \quad \text{onde} \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

com $q \neq 0$.

Resolução:

Para isto observemos que definindo-se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$a_1 \doteq 0,27 = 27 \cdot 10^{-2}, \tag{3.50}$$
$$a_2 \doteq 0,0027 = 27.10^{-4}, \tag{3.51}$$
$$a_3 = 0,000027 = 27 \cdot 10^{-6}, \tag{3.52}$$
$$\vdots$$
$$a_n \doteq 0\underbrace{00\cdots 27}_{(2n-2)-\text{posições}} = 27 \cdot 10^{-2n}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.53}$$

temos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ associada à sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, terá como termos:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
&\overset{(3.50)}{=} 27 \cdot 10^{-2}\,, \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
&\overset{(3.50)\text{ e }(3.51)}{=} 27 \cdot 10^{-2} + 27 \cdot 10^{-4} \\
&= 27\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4}\right)\,, \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\overset{(3.50),(3.51)\text{ e }(3.52)}{=} 27 \cdot 10^{-2} + 27 \cdot 10^{-4} + 27 \cdot 10^{-6} \\
&= 27\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6}\right)\,, \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\overset{(3.53)}{=} 27 \cdot 10^{-2} + 27 \cdot 10^{-4} + 27 \cdot 10^{-6} + \cdots + 27 \cdot 10^{-2n} \\
&= 27 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^{2i}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Observemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente para $0,272727\cdots$.

Mas

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &\overset{(3.53)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 27 \cdot 10^{-2n} \\
&\overset{\text{Prop. }(3.3.1)}{=} 27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} \\
&\overset{\text{Exemplo }(3.3.5),\text{ com } c \doteq \frac{1}{10^2}}{=} 27\,\frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} \\
&= \frac{27}{99} = \frac{3}{11}\,,
\end{aligned}
$$

que também pode ser reobtida pelo processo aprendido no 2.o grau.

□

A seguir daremos outros dois exemplos importantes de séries numéricas convergentes.

Exemplo 3.3.8 *A série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,. \qquad (3.55)$$

é convergente.

Resolução:

Definamos a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujos termos são dados por

$$a_n \doteq \frac{1}{n^2}, \tag{3.56}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associada à série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, é uma sequência numérica limitada.

De fato, pois

$$S_n \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

e temos que:

$$\begin{aligned}
|S_n| &= S_n \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\overset{(3.56)}{=} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot n} \\
&\overset{\begin{cases} 2\geq 1 \\ 3\geq 2 \\ \vdots \\ n\geq n-1 \end{cases}}{\leq} 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&\overset{\text{soma telescópica}}{=} 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} \\
&\leq 2\,,
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$|S_n| \leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Como

$$a_n \overset{(3.56)}{=} \frac{1}{n^2} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

temos que

$$S_{n+1} \overset{\text{definição}}{=} S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{>0} > S_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou seja, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) é estritamente crescente, em particular, será um sequência numérica monótona.

Como ela também é uma sequência numérica limitada, segue, do Teorema (2.4.1), que ela será convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, da Definição (3.3.1), a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

□

Observação 3.3.4 **Curiosidades:**

1. *Pode-se mostrar que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *tem soma igual a* $\frac{\pi^2}{6}$, *ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

   como veremos mais adiante (chamado de problema de Basel).

   Na verdade Leonard Euler mostrou em 1735, essa relação.

2. *A série numérica acima é um caso particular (tomando-se* $s = 2$*) da* **função zeta de Riemann***, a saber, a função*

$$\zeta : \mathcal{A} \doteq \{s = x + i\,y\,;\, x > 1\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

   dada por

$$\zeta(s) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

   para cada $s \in \mathcal{A}$.

Exemplo 3.3.9 *A série numérica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{3.57}$$

é convergente.

Resolução:

Definamos a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujos termos são dados por

$$a_n \doteq \frac{1}{n!}, \tag{3.58}$$

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observemos que a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é limitada pois, como

$$S_n \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

temos que:

$$
\begin{aligned}
|S_n| = S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n \\
&\overset{(3.58)}{=} \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 3 \cdots n}_{(n-1)-\text{fatores}}}
\end{aligned}
$$

$$
\overset{\begin{cases} 3 \geq 2 \\ 4 \geq 2 \\ \vdots \\ n \geq 2 \end{cases}}{\leq} \quad 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{(n-1)-\text{fatores}}} \tag{3.59}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2^2} + + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{soma dos } \underline{n} \text{ primeiros termos de uma PG, de razão igual a } \frac{1}{2}} \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}}}_{\leq 2} \leq 3, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
|S_n| \leq 3 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
$$

Como

$$
a_n \overset{(3.58)}{=} \frac{1}{n!} > 0, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},
$$

temos que

$$
S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{>0} > S_n, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},
$$

assim a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é estritamente crescente, em particular, será uma sequência numérica monótona.

Como ela também é limitada, segue, do Teorema (2.4.1), que ela será convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, da Definição (3.3.1), a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

□

Observação 3.3.5 *Pode-se mostrar que a soma da série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é igual a* $\underline{e}$, *ou seja,*

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e,
$$

como veremos mais adiante.

A seguir daremos alguns resultados de convergência para séries numéricas.

3.4 Resultados de Convergência de Séries Numéricas

Começaremos com dois resultados simples que podem ser úteis no estudo de convergência de séries numéricas, a saber:

Proposição 3.4.1 *Suponhamos que as séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são tais que*

$$b_{2n} = a_n \quad e \quad b_{2n-1} = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.60}$$

Então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge.*

Neste caso a soma das séries numéricas coincidem, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,. \tag{3.61}$$

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definido-se

$$S_n \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad T_n \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3.62}$$

segue que

$$T_n = \begin{cases} S_{\frac{n}{2}}\,, \text{ se } n \text{ é par} \\ \\ S_{\frac{n+1}{2}}\,, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

logo, da Definição (3.3.1), a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente se, e somente se, a séria numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente e, neste caso, as somas das respectivas séries numéricas serão iguais, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.4.1 *Podemos generalizar este resultado considerando a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, constituída dos termos da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, introduzindo-se zeros à mesma em posições aleatórias.*

No caso da Proposição (3.4.1) acima, a sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é obtida da a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, intercalando-se zeros entre os temos da sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, a saber, a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$0\,, a_1\,, 0\,, a_2\,, 0\,, a_3\,, 0\,, \cdots\,.$$

Outro resultado é dado pela:

Proposição 3.4.2 *Consideremos a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *fixado.*

Então, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, com soma* $\underline{a}$*, se, e somente se, a série numérica* $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *converge, com soma* $b = a - a_1 - a_2 - \cdots - a_{p-1}$*, ou seja,*

$$\text{se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a\,, \quad \text{então} \quad \sum_{n=p}^{\infty} a_n = a - a_1 - a_2 - \cdots - a_{p-1}\,. \tag{3.63}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Denotemos a sequência numérica das somas parciais da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e a sequência numérica das somas parciais da série numérica $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ por $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Logo deveremos ter:

$$T_n = S_{n+p}, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.64}$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a$$

se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = a - a_1 + a_2 - \cdots - a_p$$

isto é, da Definição (3.3.1), a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, com soma $\underline{a}$, se, e somente se, a série numérica $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge, com soma $b = a - a_1 - a_2 - \cdots - a_{p-1}$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.4.2 *A Proposição (3.4.2) acima nos diz que podemos desprezar um* <u>**número finito**</u> *de termos de uma série numérica que isso não alterará o estudo da convergência da mesma.*

Poderá alterar o valor da sua soma da série numérica obtida.

Podemos aplicar este resultado ao:

Exercício 3.4.1 *Mostre que a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\,(n+6)} \tag{3.65}$$

é convergente.

Encontre o valor de sua soma.

Resolução:

De fato, do Exemplo (3.3.4), sabemos que a série numérica $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\,(m+1)}$ é convergente com soma igual a $a \doteq 1$.

Logo, pela Proposição (3.4.2) acima, a série numérica

$$\sum_{m=6}^{\infty} \frac{1}{m\,(m+1)}$$

também será convergente com soma igual a:

$$a - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 1 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6}\right)$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{6}\,.$$

Para finalizar, notemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\,(n+6)} \overset{m=n+5}{=} \sum_{m=6}^{\infty} \frac{1}{m\,(m+1)}\,,$$

logo a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\,(n+6)}$ é convergente e sua soma será igual a $\frac{1}{6}$, ou seja, a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\,(n+6)} = \frac{1}{6}\,.$$

□

O primeiro resultado geral importante para convergência de series numéricas é dado pelo:

Teorema 3.4.1 *(critério de Cauchy para convergência de séries numéricas).*

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N_o \in \mathbb{N}$ *de modo que, para* $n \geq N_o$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *qualquer, temos*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon\,. \tag{3.66}$$

Demonstração:

Lembremos que, da Definição (3.3.1), a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, uma sequência numérica é convergente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, ela for uma sequência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\text{se} \quad n\,,m \geq N_o\,, \quad \text{deveremos ter} \quad |S_m - S_n| < \varepsilon\,. \tag{3.67}$$

Observemos que se

$$m > n\,, \quad \text{então} \quad m = n + p\,, \quad \text{para algum} \quad p \in \mathbb{N}\,,$$

assim

$$\begin{aligned} S_m - S_n &= \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \\ &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\,. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Logo, da Definição (3.3.1), a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, ela for uma sequência numérica de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que, para $n \geq N_o$ e $p \in \mathbb{N}$ qualquer, temos

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \overset{(3.68)}{=} |S_m - S_n| \overset{(3.67)}{=} \varepsilon\,,$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 3.4.3 *Nos Exemplos (3.3.4), (3.3.5), (3.3.8), (3.3.9) da seção (3.3), exibimos séries numérica que são convergentes.*

Observemos que, em todos estes Exemplos, as sequências numéricas que as definem, convergem para zero (verifique!),isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Isto é um fato geral, como afirma o:

Teorema 3.4.2 *(critério da divergência para séries numéricas)*

Suponhamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Então deveremos ter

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \tag{3.69}$$

Demonstração:

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente com soma igual a $\underline{S}$ então, da Definição (3.3.1), temos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\,,$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\,. \tag{3.70}$$

Logo, da Definição (3.3.1), dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N_o$, deveremos ter

$$|S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.71}$$

Logo, para $n > N_o$ (ou seja $n - 1 \geq N_o$), segue que:

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &\overset{(3.70)}{=} |S_n - S_{n-1}| \\ &= |S_n - S + S - S_{n-1}| \\ &\overset{\text{desigualdade triabgular}}{\leq} |S_n - S| + |S - S_{n-1}| \\ &\overset{(3.71)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição (2.3.1), que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

finalizando a demonstração.

□

Observação 3.4.4

1. *<u>**Não**</u> vale a recíproca do Teorema (3.5.2) acima, isto é, existe uma (na verdade existem várias) sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que é convergente para zero, e cuja série numérica associada a ela, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, <u>**não**</u> é convergente.*

   Por exemplo, a série harmônica,

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

   é um série numérica divergente (veja o Exemplo (3.3.6)) e

   $$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. *Na verdade o Teorema (3.5.2) acima nos dá uma condição <u>**necessária**</u> (mas <u>**não suficiente**</u>) para que uma série numérica seja convergente, a saber, que os termos da série numérica sejam convergentes para zero.*

   *Podemos usar Teorema (3.5.2) como um <u>**critério de divergência**</u>, dai o nome, ou seja, se*

   $$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0,$$

   então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente (pois se fosse convergente, pelo Teorema (3.5.2), deveríamos ter $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$).

Apliquemos o Teorema (3.5.2) ao:

Exemplo 3.4.1 *Mostre que a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.72}$$

é divergente.

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq 1+\frac{1}{n^2}\,. \tag{3.73}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{(3.73)}{=} \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1 \neq 0\,,$$

do critério da divergência (isto é, do Teorema (3.5.2)), segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

será divergente.

□

3.5 Critérios de Convergência para Séries Numéricas com Termos Não-negativos

Observação 3.5.1 *Nos Exemplos (3.3.8) e (3.3.9) mostramos que as series numéricas*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,,$$

cujos termos são não-negativos (pois $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$) são convergentes, utilizando-se do fato que as respectivas sequências numéricas das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou seja, as próprias séries numéricas) eram limitadas.

Isto ocorre em geral, para séries numéricas cujos termos são não-negativos*, a saber:*

Teorema 3.5.1 *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência numérica cujos termos são não-negativos, isto é,*

$$a_n \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.74}$$

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, a sequência numérica das somas parciais é limitada, isto é, a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica limitada, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$S_n \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,.$$

Demonstração:

Suponhamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, da Definição (3.3.1), a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Logo, da Proposição (2.3.2), segue que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Por outro lado, se sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, como

$$a_n \geq 0 \,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \,,$$

temos que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será crescente, pois

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n \,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

Assim $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada, , do Teorema (2.4.1), ela será convergente, ou seja, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do resultado.

□

Apliquemos o resultado acima aos:

Exemplo 3.5.1 *Verifique se as séries numéricas abaixo são convergentes ou divergentes.*

$$\textbf{1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{3.75}$$

$$\textbf{2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{3.76}$$

$$\textbf{3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} \tag{3.77}$$

$$\textbf{4.} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{3.78}$$

Resolução:

1.:

No Exemplo (3.3.8) foi mostrado que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente em $\mathbb{R}$, utilizando o Teorema (2.4.1).

2.:

No Exemplo (3.3.9) foi mostrado que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente em $\mathbb{R}$, utilizando o Teorema (2.4.1).

3.:

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n = \frac{1}{n\,(n+1)} \geq 0\,. \tag{3.79}$$

Logo a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona (na verdade é estritamente crescente).
Vimos no Exemplo (3.3.4) (veja (3.28)) que

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

logo a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Logo, do Teorema (3.5.1) acima, segue que série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

4.:

A série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.
De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.80}$$

Logo a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona (na verdade estritamente crescente).
Mas,

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&\overset{(3.80)}{=} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\overset{\begin{cases} 1 \leq \sqrt{n} \\ \sqrt{2} \leq \sqrt{n} \\ \vdots \\ \sqrt{n-1} \leq \sqrt{n} \end{cases}}{\geq} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n-\text{parcelas}} \\
&= \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$S_n \geq \sqrt{n}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.81}$$

Portanto a a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada, pois

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \quad \text{e temos} \quad (3.81)\,.$$

Logo, do Teorema (3.5.1) acima, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ será divergente (para $\underline{+\infty}$).

□

Outro critério importante para o estudo da convergência de series numéricas cujos termos são não-negativos é o:

Teorema 3.5.2 *(critério da comparação para séries numéricas)*

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries numéricas de tal modo que seus termos satisfazem a seguinte condição:*

$$0 \leq a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.82}$$

1. *Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente, então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

   Além disso,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,. \tag{3.83}$$

2. *Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente, então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *será divergente.*

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$S_n \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{e} \quad T_n \doteq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \tag{3.84}$$

as somas parciais de ordem $\underline{n}$, das series numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

Como temos (3.82) segue, de (3.84), que

$$0 \leq S_n \leq T_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.85}$$

De 1.:

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então a sequência numérica $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$.

Logo, da Proposição (2.3.2), a sequência numérica $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada, ou seja existe $M \geq 0$, tal que

$$|T_n| \leq M\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.86}$$

Logo, de (3.86) e (3.85), segue que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada.

Mas, como $a_n \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será monótona (na verdade crescente).

Portanto, do Teorema (2.4.1), segue que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, da Definição (3.3.1), temos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente em $\mathbb{R}$.

Além disso, seque do item 2. do Teorema (2.3.1) (ou seja, do critério da comparaçao para sequências numéricas), que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} T_n\,,$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,,$$

completando a demonstração do item 1. .

<u>**De 2.:**</u>

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então, da Proposição (2.3.2), a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não será limitada.

De fato, como ela é monótona crescente, se fosse limitada, do Teorema (2.4.1), ela teria que ser convergente em $\mathbb{R}$, o que seria um absurdo.

Assim, como $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\,.$$

Logo, de (3.85) e do item 1. do Teorema (2.5.1), segue que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \infty\,,$$

isto é, a sequência numérica $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também não será limitada.

Portanto não poderá ser convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, da Definição (3.3.1), a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ será divergente, completando a demonstração do item 2. e do resultado.

$\square$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 3.5.2 *Estudar a convergência de cada uma das séries numéricas a seguir:*

$$\textbf{1.}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1} \tag{3.87}$$

$$\textbf{2.}\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \tag{3.88}$$

<u>**Resolução:**</u>

<u>**1.:**</u>

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ é convergente .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{3^n + 1} \tag{3.89}$$

e

$$b_n \doteq \frac{1}{3^n} \,. \tag{3.90}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_n \\ &\overset{(3.89)}{=} \frac{1}{3^n + 1} \\ &\overset{3^n+1>3^n}{\leq} \frac{1}{3^n} \\ &\overset{(3.89)}{=} b_n \,. \end{aligned}$$

Observemos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \overset{(3.90)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

é convergente em $\mathbb{R}$, pois trata-se de uma série geométrica de razão $c \doteq \dfrac{1}{3} < 1$, que, pelo Exemplo (3.3.5), com $c \doteq \dfrac{1}{3}$, é convergente em $\mathbb{R}$.

Então do item 1. do critério da comparação para séries numéricas (isto é, do item 1. do Teorema (3.5.2)) segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$$

será convergente em $\mathbb{R}$.

<u>**2.:**</u>

A série numérica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ é divergente.

Antes de mais nada vale salientar que, para cada $n \geq 3$, temos que

$$0 \leq \ln(n) \leq n \,. \tag{3.91}$$

De fato, se considerarmos a função $f : [e\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{\ln(x)}{x} \,, \quad \text{para cada} \quad x \in [e\,,\infty) \,, \tag{3.92}$$

segue que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[e\,,\infty)$ e, além disso,

$$f\,'(x) \overset{(3.92)}{=} \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \leq 0 \,, \quad \text{para cada} \quad x \in [e\,,\infty),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é decrescente em $[e\,,\infty)$.

Como

$$\begin{aligned}
& f(e) = \frac{1}{e} < 1\,, \\
\text{segue que} \quad & f(x) < 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [e\,,\infty)\,, \\
\text{ou seja,} \quad & f(x) = \frac{\ln(x)}{x} < 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [e\,,\infty)\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & \ln(x) < x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [e\,,\infty)\,, \\
\text{em particular,} \quad & \text{vale a afirmação (3.91)}\,.
\end{aligned}$$

Logo se, para cada $n \geq 3$, definirmos

$$b_n \doteq \frac{1}{\ln(n)} \tag{3.93}$$

e

$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \tag{3.94}$$

segue

$$\begin{aligned}
0 \leq a_n & \overset{(3.93)}{=} \frac{1}{n} \\
& \overset{(3.91)}{=} \frac{1}{\ln(n)} \\
& \overset{(3.94)}{=} b_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Mas a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente (é a série harmônica, veja o Exemplo (3.3.6)).

Então, do item 2. do critério da comparação para séries numéricas (isto é, do item 2. do Teorema (3.5.2)), segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

será divergente, completando a resolução.

□

Antes de exibirmos outro exemplo, vale fazer a seguinte observação:

Observação 3.5.2 *O Teorema (3.5.2) acima permanece válido se trocarmos a hipótese*

$$\text{" } 0 \leq a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \text{ "}$$

por

$$\text{" } 0 \leq a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o \text{ "},$$

ou seja, temos o:

Corolário 3.5.1 *(critério da comparação para séries numéricas estendido)*

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries numéricas de tal modo que seus termos satisfazerm a seguinte condição:*

$$0 \leq a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,.$$

1. *Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente, então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

2. *Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente, então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *será divergente.*

Demonstração:

A demonstração é semelhante a do critério da comparação para séries numéricas (isto é do Teorema (3.5.2)) e será deixada como exercício para o leitor.

□

Podemos aplicar esse resultado a seguinte série numérica:

Exemplo 3.5.3 *Estudar a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^n} \tag{3.96}$$

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$a_n \doteq \frac{n+1}{n^n} \qquad \text{e} \qquad b_n \doteq \frac{1}{n^2}\,. \tag{3.97}$$

Afirmamos que:

$$0 \leq a_n \leq b_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq 4\,. \tag{3.98}$$

Mostrar a desigualdade (3.98) acima, é equivalente a mostrar

$$n^2(n+1) \leq n^n\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq 4\,. \tag{3.99}$$

Na verdade mostraremos a seguinte desigualdade:

$$n^2\,(n+1) \leq n^4\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq 4 \tag{3.100}$$

e notando que

$$n^4 \leq n^n\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq 4$$

teremos a afirmação (3.99).

Notemos que (3.100) é equivalente à:

$$n^2 - n - 1 \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq 4\,. \tag{3.101}$$

Por outro lado, observemos que que

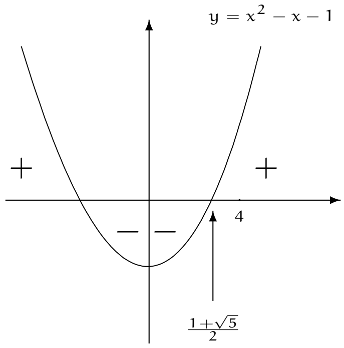
$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} < 4\,.$$

Como

$$x^2 - x - 1$$

é um trinômio do 2.o grau, cujo coeficiente do termo de 2.o grau é maior que zero (no caso é igual a 1), segue que (veja a figura abaixo)

$$x^2 - x - 1 \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \geq 4\,.$$



Em particular valerá (3.101), ou ainda, (3.99).

Notemos que a série numérica

$$\sum_{n=4}^{\infty} b_n = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente, pois do Exemplo (3.3.8) a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente e assim, da Propsição (3.4.2), a série numérica acima será convergente.

Portanto, de (3.98) e do item 1. do critério da comparação para séries numéricas estendido (isto é, do item 1. do Corolário (3.5.1)) segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^n}$$

será convergente, completando a resolução.

□

Outro critério importante para o estudar da convergência de séries numéricas cujos termos são não-negativos, é dado pelo:

Teorema 3.5.3 *(critério da comparação para séries numéricas, por limites)*

Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries numéricas, cujos termos satisfazem:*

$$0 \leq a_n \quad e \quad 0 < b_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.102}$$

Consideremos

$$c \doteq \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}\,. \tag{3.103}$$

1. *Se*
$$c \in (0, \infty), \tag{3.104}$$
então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente se, e somente se, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for convergente.*

2. *Se*
$$c = 0 \tag{3.105}$$
e a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for convergente, então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

3. *Se*
$$c = \infty \tag{3.106}$$
e a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for divergente, então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

Demonstração:

De 1.:

Suponhamos que
$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty). \tag{3.107}$$

Logo, dado
$$\varepsilon \doteq \frac{c}{2} > 0,$$
podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{se} \quad n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad & \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \varepsilon = \frac{c}{2}, \\ \text{ou seja,} \quad & -\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2}, \\ \text{ou ainda,} \quad & \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\,c}{2}. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Como
$$b_n > 0, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.109}$$
segue, de (3.108), que
$$0 \overset{(3.109)}{\leq} \frac{c}{2} b_n \overset{(I)}{<} a_n \overset{(II)}{<} \frac{3\,c}{2} b_n, \quad \text{para cada} \quad n \geq N_o. \tag{3.110}$$

Suponhamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente.

Então de (I) em (3.110) e do item 1. do critério da comparação para séries numéricas estendido (isto é, do item 1. do Corolário (3.5.1)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{2}\,b_n\right)$ será convergente.

Como $c > 0$, isto implicará que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ será convergente.

Por outro lado, se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\,c}{2}\,b_n\right)$ será convergente.

Logo de (II) em (3.110) do item 1. do critério da comparação para séries numéricas estendido (isto é, do item 1. do Corolário (3.5.1)) segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente, completando a demonstração do item 1 .

De 2.:

Suponhamos que

$$c = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0\,. \tag{3.111}$$

Logo, dado

$$\varepsilon \doteq 1\,,$$

podemos encpontrar $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se}\quad n \geq N_o\,,\quad \text{teremos}\quad \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \varepsilon = 1\,,$$

$$\text{ou seja,}\quad -1 < \frac{a_n}{b_n} < 1\,,$$

$$\text{e como } b_n > 0,\text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ teremos,}\quad 0 \leq a_n < b_n\,,\quad \text{para cada}\quad n \geq N_o. \tag{3.112}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, do item 1. do critério da comparação para séries numéricas estendido (isto é, do item 1. do Corolário (3.5.1)), segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente, completando a demonstração do item 2. .

De 3.:

Suponhamos que

$$c = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty\,. \tag{3.113}$$

Logo, dado

$$K \doteq 1\,,$$

podemos encontrr $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se}\quad n \geq N_o\quad \text{teremos}\quad \frac{a_n}{b_n} > K = 1\,,$$

$$\text{ou seja,}\quad a_n > b_n \geq 0\,,\quad \text{para cada}\quad n \geq N_o\,. \tag{3.114}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente então, do item 2. do critério da comparação para séries numéricas estendido (isto é, do item 2. do Corolário (3.5.1)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente, completando a demonstração do item 3 .

□

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 3.5.4 *Estudar a convergência das séries numéricas abaixo:*

$$\textbf{1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n\,2^n} \tag{3.115}$$

$$\textbf{2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.116}$$

$$\textbf{3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} \tag{3.117}$$

Resolução:

1.:

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n\,2^n}$ é convergente.

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, definido-se

$$a_n \doteq \frac{3n+5}{n\,2^n} \tag{3.118}$$

que são não-negativos e

$$b_n \doteq \frac{1}{2^n}, \tag{3.119}$$

teremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{(3.118) \text{ e } (3.119)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+5}{n\,2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{n} \overset{\text{Exercício}}{=} 3 \in (0, \infty).$$

Notemos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \overset{(3.119)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

é convergente, pois é uma série geométrica de razão $c \doteq \frac{1}{2} < 1$ (veja o Exemplo (3.3.5), com $c \doteq \frac{1}{3}$).

Logo, do item 1. do critério da comparação para séries numéricas, por limites (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.3)), segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n+5}{n\,2^n}$$

também será convergente.

2.:

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ é divergente.

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$a_n \doteq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{e} \quad b_n \doteq \frac{1}{n}, \tag{3.120}$$

que são ambos não-negativos.

Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{(3.120)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{1^o.\ \text{limite fundamental}}{=} 1 \in (0\,,\infty)\,.$$

Como a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente (é a série harmônica, veja o Exemplo (3.3.6)) segue, do item 1. do critério da comparação para séries numéricas, por limites (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.3)), que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{(3.120)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

é divergente.

3.:

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ é convergente.

Notemos que se tentarmos aplicar, diretamente, o item 1. do critério da comparação para séries numéricas, por limites item i. (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.3)) não dará certo.

Observemos que se, para cada $n \in \mathbb{N}$, considerarmos

$$a_n \doteq \frac{n^3}{n!} \quad \text{e} \quad b_n \doteq \frac{1}{n!}, \tag{3.121}$$

que são não-negativos, então

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} &\overset{(3.121)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \lim_{n \to \infty} n^3 \\ &= \infty . \end{aligned}$$

Logo **<u>não</u>** podemos aplicar nenhum dos itens do critério da comparação para séries numéricas, por limites (ou seja, qualquer um dos itens do Teorema (3.5.3)), nesta situação.

Para resolver esse problema, agiremos da seguinte forma:

Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^3}{n!} &\overset{m \doteq n-3}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+3)^3}{(m+3)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{(n+3)!} . \end{aligned} \tag{3.122}$$

Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, definirmos

$$a_n \doteq \frac{(n+3)^3}{(n+3)!} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n!}, \tag{3.123}$$

que são não-negativos, então teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} &\overset{(3.124)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+3)^3}{(n+3)!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+3)^3}{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} 1 \in (0\,,\infty) . \end{aligned}$$

Como a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

é convergente (veja o Exemplo (3.3.9)) segue, do item 1. do critério da comparação para séries numéricas, por limites (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.3)), que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{(n+3)!}$$

também será convergente, completando a resolução.

Portanto, da Proposição (3.4.2), segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$$

também será convergente, completando a resulução.

□

Outro critério muito útil é dado pelo:

Teorema 3.5.4 *(critério da razão para séries numéricas)*

Consideremos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *onde*

$$0 < a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.124}$$

1. *Se existir*

$$r \in (0\,,1)\,, \qquad \textit{tal que} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.125}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

2. *Se existir*

$$r \in [1\,,\infty)\,, \qquad \textit{tal que} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.126}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

Demonstração:

De 1.:

Suponhamos que exista

$$r \in (0\,,1)\,,$$

tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Logo deveremos ter

$$a_{n+1} \leq r\,a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.127}$$

Afirmamos que isto implicará que

$$a_{n+1} \leq r^n a_1, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.128}$$

A prova de (3.128) será por indução sobre $\underline{n}$.

Para isto, notemos que:

(i) Vale para $n = 1$, segue de (3.127) que

$$a_2 \leq r\, a_1,$$

ou seja, vale (3.128) par $n = 1$.

(ii) Suponhamos que (3.128) vale para $n = k \geq 2$, isto é, que

$$a_{k+1} \leq r^k a_1 \tag{3.129}$$

e mostremos que isto implicará que (3.128) valerá para $k = n + 1$.

Para isto, observemos que,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &\overset{(3.127)}{\leq} r\, a_{k+1} \\ &\overset{\text{hipótese de indução, isot é, (3.129)}}{\leq} r\left(r^k a_1\right) \\ &= r^{k+1} a_1, \end{aligned}$$

ou seja, (3.128) valerá para $k = n + 1$, finalizando a prova por indução.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$b_n \doteq r^n a_1. \tag{3.130}$$

Notemos que a serie numérica

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &\overset{(3.130)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_1 \\ &= a_1 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \end{aligned}$$

é uma série numérica convergente, pois é um múltiplo de uma série geométrica de razão $r \in (0, 1)$, logo será convergente (veja o o Exemplo (3.3.5), com $c \doteq r \in (0, 1)$).

De (3.129) e (3.130), segue que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo, do item 1. do critério da comparação para séries numéricas (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.2)) segue que a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

<u>**De 2. :**</u>

Se existir $r \in [1, \infty)$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

então

$$a_{n+1} \geq r\, a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.131}$$

De modo semelhante à demosntração do item 1., pode-se mostrar que

$$a_{n+1} \geq r^n\, a_1\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definido-se

$$b_n \doteq r^n\, a_1\,, \tag{3.132}$$

temos que a serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \overset{(3.131)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, a_1$$
$$= a_1 \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

é divergente, pois é um múltiplo, não nulo, da série geométrica de razão $r \in [1\,,\infty)$ (veja o Exemplo (3.3.5), com $c \doteq r \in [1\,,\infty)$), logo será divergente.

De (3.131) e (3.132), segue que

$$0 \leq b_n \leq a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.133}$$

Logo, do item 2. do critério da comparação para séries numéricas (ou seja, do item 2. do Teorema (3.5.2)), segue que a serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.5.3 *O Teorema (3.5.4) acima, permanece válido se trocarmos a hipótese*

$$\text{"}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\ \text{"}$$

por

$$\text{"}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\ \text{"}$$

no item i., ou a hipótese

$$\text{"}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\ \text{"}$$

por

$$\text{"}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\ \text{"}$$

no item ii., mais precisamente:

Corolário 3.5.2 *(critério da razão para séries numéricas estendido)*

Consideremos $N_o \in \mathbb{N}$ *e a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, de modo que*

$$0 < a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,. \tag{3.134}$$

1. Se existir

$$r \in (0\,,1)\,, \quad \textit{tal que} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,, \tag{3.135}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

2. Se existir

$$r \in [1\,,\infty)\,, \quad \textit{tal que} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,, \tag{3.136}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração:

A demonstração é semelhante a do critério da razão e será deixada como exercício para o leitor.

□

Como consequência do critério da razão temos o:

Teorema 3.5.5 *(critério da razão par séries numéricas, por limites)*

Consideremos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, onde*

$$0 < a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.137}$$

e

$$l \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,. \tag{3.138}$$

1. Se

$$l \in [0\,,1)\,, \tag{3.139}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

2. Se

$$l \in (1\,,\infty) \tag{3.140}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

3. *Se*

$$l = 1\,,$$

nada podemos afirmar.

Demonstração:

De 1 .:

Como , por hipótese,

$$l \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\,, \tag{3.141}$$

dado

$$\varepsilon \doteq \frac{1-l}{2} > 0\,, \tag{3.142}$$

podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que, para $n \geq N_o$, teremos:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon \overset{(2.139)}{=} \frac{1-l}{2}\,,\\
\text{ou, equivalentemente,}\quad & -\frac{1-l}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \overset{(I)}{<} \frac{1-l}{2}\,,\\
\text{implicando que:}\quad & 0 \overset{a_n \geq 0}{\leq} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{por (I)}}{<} \frac{1-l}{2} + l\\
&= \frac{1}{2} + \frac{l}{2} = \frac{1+l}{2} \doteq r \overset{l\overset{(2.139)}{<}1}{<} 1\,.
\end{aligned} \tag{3.143}$$

Logo, do item 1. do critério da razão para séries numéricas estendido (isto é, do item 1. do Corolário (3.5.2)), segue que a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, completando a demonstração do item 1. .

De 2. :

Como, por hipótese,

$$l \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\,, \tag{3.144}$$

dado

$$\varepsilon \doteq \frac{l-1}{2} > 0\,, \tag{3.145}$$

podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N_o$, segue que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon \overset{(3.145)}{=} \frac{l-1}{2}\,,\\
\text{ou, equivalentemente,}\quad & \underbrace{-\frac{l-1}{2}}_{\frac{1-l}{2}} \overset{(II)}{<} \frac{a_{n+1}}{a_n} - l < \frac{l-1}{2}\,,\\
\text{implicando que:}\quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{por (II)}}{>} l + \frac{1-l}{2}\\
&= \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \doteq r \overset{l\overset{(3.144)}{>}1}{>} 1\,.
\end{aligned} \tag{3.146}$$

Logo, do item 2. do critério da razão para séries numéricas estendido (isto é, do item 2. do Corolário (3.5.2)), segue que a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, completando a demonstração do item 2. .

<u>De iii.:</u>

Exibiremos dois exemplos onde

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

e no primeiro exemplo a série numérica converge e no segundo exemplo a serie numérica diverge.

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\doteq a_n}$ é convergente (veja o Exemplo (3.3.8)).

Notemos que

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} 1\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\doteq b_n}$ é divergente (veja o Exemplo (3.3.6)).

Observemos que, neste caso:

$$\begin{aligned} l_2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} 1\,. \end{aligned}$$

Esses dois exemplos mostram que se

$$l_1 = l_2 = 1\,,$$

nada podemos afirmar, ou seja, a série numérica poderá ser convergente ou divergente, completando a verificação do item 3. e do resultado.

□

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 3.5.5 *Analise a convergência da série numérica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{{x_o}^n}{n!}, \qquad \textit{para cada } x_o \in [0, \infty) \textit{ fixado} . \tag{3.147}$$

Resolução:

Para cada $x_o \in [0\,, \infty)$ fixado e cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{{x_o}^n}{n!} . \tag{3.148}$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(3.148)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{{x_o}^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{{x_o}^n}{n!}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_o}{n+1}$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} 0 \doteq l < 1 .$$

Então, do item 1. critério da razão para séries numéricas, por limites (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.5)), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{{x_o}^n}{n!}$ é convergente, para cada $x_o \in [0\,, \infty)$ fixado.

□

Exemplo 3.5.6 *Analise a convergência da série numérica abaixo:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \tag{3.149}$$

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n\,2^n} . \tag{3.150}$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(3.150)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n\,2^n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\,(n+1)}$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2} \doteq l < 1.$$

Então, do item 1. critério da razão para séries numéricas, por limites (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.5)), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ é convergente.

□

Exemplo 3.5.7 *Analise a convergência da série numérica abaixo:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}. \tag{3.151}$$

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{n^n}{n!}. \tag{3.152}$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(3.152)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} e \doteq l > 1. \end{aligned}$$

Então, do item 2. critério da razão para séries numéricas, por limites (ou seja, do item 2. do Teorema (3.5.5)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ é divergente.

□

Exemplo 3.5.8 *Analise a convergência da série numérica abaixo:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}. \tag{3.153}$$

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{2n+1}. \tag{3.154}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(3.154)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2(n+1)+1}}{\dfrac{1}{2n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} 1, \end{aligned}$$

não podemos aplicar o critério da razão por limites (veja o item 3. do Teorema (3.5.5)).

Porém, se definirmos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n \doteq \frac{1}{n} \tag{3.155}$$

então

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} &\overset{(3.154) \text{ e } (3.155)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2(n+1)} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2} > 0 .
\end{aligned}$$

Como a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente (é a série harmônica, veja o Exemplo (3.3.6)) segue, do item 1. do teste da comparação para séries numéricas, por limites (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.3)), que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

será divergente.

□

Um outro critério importante para o estudo da convergência de séries numéricas é dado pelo:

Teorema 3.5.6 *(critério da raiz para séries numéricas) Consideremos a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, onde*

$$0 \leq a_n , \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} . \tag{3.156}$$

1. *Se existir*

$$r \in [0, 1) \tag{3.157}$$

de modo que

$$\underbrace{(a_n)^{\frac{1}{n}}}_{= \sqrt[n]{a_n}} \leq r , \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} , \tag{3.158}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

2. *Se existir*

$$r \in [1, \infty) \tag{3.159}$$

de modo que

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \geq r , \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} , \tag{3.160}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

Demonstração:

De 1. :

Por hipótese, temos que

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq r\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

onde

$$0 \leq r < 1\,,$$

ou seja,

$$0 \leq a_n \leq r^n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Observemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $r \in [0\,,1)$ (veja Exemplo (3.3.5), com $c \doteq r \in [0\,,1)$).

Logo, do item 1. do critério da comparação para séries numéricas (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.2)), segue que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente, completando a demonstração do item 1. .

De 2. :

Por hipótese, temos que

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \geq r\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

onde $r \in (1\,,\infty)$, ou seja,

$$a_n \geq r^n\,, \quad \text{para cada} \quad \in \mathbb{N}\,.$$

Observemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é divergente $r \in [1\,,\infty)$ (veja Exemplo (3.3.5), com $c \doteq r \in [1\,,\infty)$).

Logo, do item 2. do critério da comparação para séries numéricas (ou seja, do item 2. do Teorema (3.5.2)), segue que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente, completando a demonstração do item 2. e do resultado.

$\square$

Observação 3.5.4 *O Teorema (3.5.6) acima, permanece válido se trocarmos a hipótese*

$$\text{"}\ (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{com} \quad r \in [0\,,1)\ \text{"}$$

por

$$\text{"}\ (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,, \quad \textit{com} \quad r \in [0\,,1)\ \text{"}$$

no item i., ou a hipótese

$$\text{"}\ (a_n)^{\frac{1}{n}} \geq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad \textit{com} \quad r \in [1\,,\infty)\text{"}$$

por

$$\text{" } (a_n)^{\frac{1}{n}} \geq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,, \quad \textit{com} \quad r \in [1\,,\infty) \text{ "}$$

no item ii., ou seja:

Corolário 3.5.3 *(critério da raiz para séries numéricas, estendido)*

Consideremos $N_o \in \mathbb{N}$ *e a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, onde*

$$0 \leq a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,. \tag{3.161}$$

1. *Se existir*

$$r \in [0\,,1) \tag{3.162}$$

de modo que

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,, \tag{3.163}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

2. *Se existir*

$$r \in [1\,,\infty) \tag{3.164}$$

de modo que

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \geq r\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,, \tag{3.165}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

Demonstração:

A demonstração é semelhante a do critério da raiz (ou seja, do Teorema (3.5.6)) e será deixada como exercício para o leitor.

□

Como consequência temos o:

Teorema 3.5.7 *(critério da raiz para séries numéricas, por limites) Consideremos a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, onde*

$$0 \leq a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.166}$$

e definamos

$$l \doteq \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}\,. \tag{3.167}$$

1. *Se*

$$l \in [0\,,1)\,, \tag{3.168}$$

então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

2. *Se*
$$l \in (1\,,\infty)\,, \tag{3.169}$$
então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

3. *Se*
$$l = 1\,, \tag{3.170}$$
nada podemos afirmar.

Demonstração:

De 1. :

Por hipótese, temos que
$$l \doteq \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} < 1\,. \tag{3.171}$$
Logo, dado
$$\varepsilon \doteq \frac{1-l}{2} > 0\,, \tag{3.172}$$
podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N_o$, teremos
$$\begin{aligned}
&\left|(a_n)^{\frac{1}{n}} - l\right| < \varepsilon \overset{(3.172)}{=} \frac{1-l}{2}\,,\\
\text{isto é,}\quad & -\frac{1-l}{2} < (a_n)^{\frac{1}{n}} - l < \frac{1-l}{2}\,,\\
\text{ou, equivalentemente,}\quad & l - \frac{1-l}{2} < (a_n)^{\frac{1}{n}} \overset{(I)}{<} l + \frac{1-l}{2}\,.
\end{aligned}$$
Em particular,
$$\begin{aligned}
0 \leq (a_n)^{\frac{1}{n}} &\overset{\text{por (I)}}{<} l + \frac{1-l}{2}\\
&= \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \doteq r\\
&\overset{l \overset{(3.171)}{<} 1}{<} 1\,,
\end{aligned}$$
para cada $n \geq N_o$.

Logo, do item 1. do critério da raiz para séries numéricass, estendido (ou seja, do item 1. do Corolário (3.5.3)), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente, completando a demonstração do item 1. .

De 2. :

Por hipótese temos que
$$l \doteq \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} > 1\,. \tag{3.173}$$
Logo, dado
$$\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0\,, \tag{3.174}$$

podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N_o$, teremos:

$$\begin{aligned} & \left|(a_n)^{\frac{1}{n}} - l\right| < \varepsilon \overset{(3.174)}{=} \frac{l-1}{2}\,, \\ \text{isto é,} \quad & -\frac{l-1}{2} < (a_n)^{\frac{1}{n}} - l < \frac{l-1}{2}\,, \\ \text{ou, equivalentemente,} \quad & l - \frac{l-1}{2} \overset{(II)}{<} (a_n)^{\frac{1}{n}} < l + \frac{l-1}{2} \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} (a_n)^{\frac{1}{n}} & \overset{\text{por (II)}}{>} l - \frac{l-1}{2} \\ & = \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \doteq r \\ & \overset{l \overset{(3.173)}{>} 1}{>} 1\,, \end{aligned}$$

para cada $n \geq N_o$.

Logo, do item 2. do critério da raiz para séries numéricass, estendido (ou seja, do item 2. do Corolário (3.5.3)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente, completando a demonstração do item 2. .

<u>**De iii.:**</u>

Notemos que se

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = 1\,,$$

nada podemos afirmar com relação a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, como veremos nos dois exemplos a seguir:

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} & = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} \\ & = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} \\ & = \lim_{n \to \infty} \exp\left[\frac{\ln n}{n}\right] . \end{aligned} \tag{3.175}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \\
&\overset{\frac{\infty}{\infty}:\ \text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0\,, \\
\text{logo:}\qquad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\ln n}{n}\right] \\
&\overset{\text{expencial é contínua em } \underline{0}}{=} \exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right] \\
&\overset{(3.176)}{=} e^0 \\
&= 1\,,
\end{aligned} \tag{3.176}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \overset{(3.175)\ \underline{e}\ (3.176)}{=} 1\,. \tag{3.177}$$

Sabemos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\doteq a_n}$ é divergente (é a série harmônica, veja o Exemplo (3.3.6)).

Notemos que, neste caso,

$$\begin{aligned}
l_1 &\doteq \lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right) \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}} \overset{(3.177)}{=} 1\,.
\end{aligned} \tag{3.178}$$

Por outro lado, sabemos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\doteq b_n}$ é convergente (veja o Exemplo (3.3.8)).

Neste caso, teremos:

$$\begin{aligned}
l_2 &\doteq \lim_{n\to\infty}(b_n)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}}\right)^2 \overset{(3.177)}{=} 1\,,
\end{aligned}$$

Esses dois exemplos mostram que se

$$l_1 = l_2 = 1\,,$$

nada podemos afirmar, ou seja, a série numérica poderá ser convergente ou divergente, completando a verificação do item 3. e do resultado.

□

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 3.5.9 *Analizar a convergência da série numérica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,. \tag{3.179}$$

<u>**Resolução:**</u>

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n^n}\,. \tag{3.180}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & a_n \overset{(3.180)}{\geq} 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{e} \qquad & l \doteq \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \\ & \overset{(3.180)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ & = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1\,. \end{aligned}$$

Logo, do critério da raiz no limite item i. (ou seja, do Teorema (3.5.7) item i.), segue que a serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

é convergente.

□

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 3.5.10 *Analizar a convergência da série numérica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}\,. \tag{3.181}$$

<u>**Resolução:**</u>

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n\,2^n}\,. \tag{3.182}$$

$$
\begin{aligned}
& a_n \overset{(3.182)}{\geq} 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \\
\text{e} \qquad & l \doteq \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \\
& \overset{(3.182)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n\,2^n}\right)^{1/n} \\
& = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,n^{\frac{1}{n}}} \\
& \overset{(3.177)}{=} \frac{1}{2} < 1\,.
\end{aligned}
$$

Logo, do item 1. do critério da raiz para séries numéricas, no limite (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.7)), segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$$

será convergente.

□

O último critério para convergência de séries numérica, cujos os termos são **não-negativos**, que exibiremos é o:

Teorema 3.5.8 *(critério da integral ou de Cauchy para séries numéricas)*

Suponhamos que a função $f : [0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *é não-negativa (isto é* $f(x) \geq 0$ *para* $x \in [0\,,\infty)$*), decrescente, contínua em* $[0\,,\infty)$ *e que a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja dada por*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.183}$$

Então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente se, e somente se, a integral imprópria de 1.a espécie* $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ *for convergente converge.*

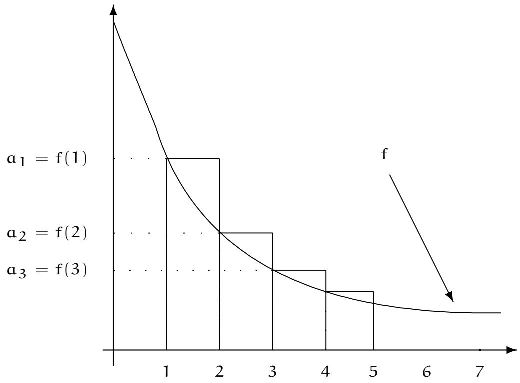
Demonstração:

Notemos que como a função $\underline{f}$ é contínua em $[0\,,\infty)$ segue que ela será Riemann integrável no intervalor $[k\,,k+1]$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Observemos que, (veja a figura abaixo), para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos:

$$a_k \overset{(3.183)}{=} f(k)\,, \quad \text{é a área do retângulo que tem base } [k\,,k+1] \text{ e altura } f(k)\,. \tag{3.184}$$



Por outro lado, como a função $\underline{f}$ é decrescente em $[0\,,\infty)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) \\ &\overset{\text{f é decrescente}}{\leq} f(k) \\ &\overset{(3.183)}{=} a_k \quad \text{para cada} \quad x \in [k\,, k+1]\,. \end{aligned} \tag{3.185}$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, das propriedades da integral de Riemann, de (3.185), segue que

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x)\,dx &\overset{(3.185)}{\leq} f(k)[\underbrace{(k+1)-k}_{=1}] \\ &= f(k) \\ &\overset{(3.184)}{=} a_k\,. \end{aligned} \tag{3.186}$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\overset{0\leq f(x)}{\leq} \int_1^k f(x)\,dx \\ &\overset{k\leq k+1 \text{ e } 0\leq f(x)}{\leq} \int_1^{k+1} f(x)\,dx \\ &\overset{[1\,,k+1]=[1\,,2]\cup[2\,,3]\cup\cdots[k\,,k+1]}{=} \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{k-1}^k f(x)\,dx + \int_k^{k+1} f(x)\,dx \\ &\overset{(3.186)}{\leq} a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_1^k f(x)\,dx \\ &\leq \sum_{j=1}^k a_j \\ &= S_k \; (= \text{ soma parcial de ordem } k \text{ da série } \sum_{n=1}^\infty a_n). \end{aligned} \tag{3.187}$$

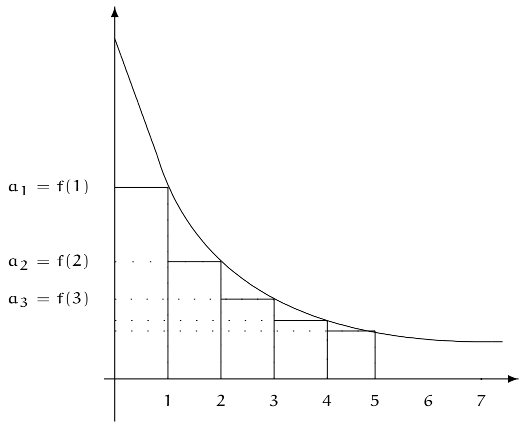
Portanto, como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, segue que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente.

Logo, de (3.187), segue que a integral imprópria de 1.a espécie $\int_1^\infty f(x)\,dx$ será convergente.

Suponhamos que a integral imprópria de 1.a espécie $\int_1^\infty f(x)\,dx$ seja convergente.

Observemos que (veja a figura abaixo), para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$a_k = \text{ área do retângulo de base } [k-1, k] \text{ e altura } f(k)\,. \tag{3.188}$$



Como a função $\underline{f}$ é decrescente em $[0, \infty)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{f \text{ é decrescente}}{\geq} f(k) \\ &\overset{(3.183)}{=} a_k \quad \text{para cada} \quad x \in [k-1, k]\,. \end{aligned} \tag{3.189}$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, das propriedades da integral de Riemann, de (3.189), segue que

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx &\overset{(3.189)}{\geq} f(k)[\underbrace{(k-(k-1))}_{=1}] \\ &= f(k) \\ &\overset{(3.183)}{=} a_k\,. \end{aligned} \tag{3.190}$$

Portanto, para cada $k \in \{2, 3, \cdots\}$, teremos:

$$\begin{aligned} \int_1^k f(x)\,dx &\overset{[1,k]=[1,2]\cup[2,3]\cup\cdots[k-1,k]}{=} \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{k-1}^k f(x)\,dx \\ &\overset{(3.190)}{\geq} a_2 + a_3 + \cdots + a_k\,, \end{aligned} \tag{3.191}$$

ou ainda, para cada $k \in \{2, 3, \cdots\}$, segue que

$$a_1 + \int_1^k f(x)\,dx \overset{(3.191)}{\geq} \sum_{j=1}^{k} a_j \doteq S_k\,, \tag{3.192}$$

ou seja, a soma parcial, de ordem $\underline{k}$, da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Assim, se a integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente, de (3.192), segue que a sequência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associada a a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, será limitada, mais precisamente,

$$\begin{aligned} 0 &\overset{0\leq a_n}{\leq} S_k \\ &\overset{(3.192)}{\leq} a_1 + \int_1^k f(x)\, dx \\ &\overset{0\leq f(x)}{\leq} a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty\,. \end{aligned}$$

Mas como

$$a_n \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

temos que a sequencia numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será monótona (crescente).

Portanto a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada em $\mathbb{R}$.

Do Teorema (3.5.1), segue que ela será convergente em $\mathbb{R}$, isto é, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente em $\mathbb{R}$, completando a demonstração.

□

Observação 3.5.5 *O Teorema (3.5.8) acima permanece válido se trocarmos o intervalo $[0\,,\infty)$, pelo intervalo $[a\,,\infty]$, com $a \geq 1$ fixado, ou seja vale o:*

Corolário 3.5.4 *(critério da integral ou de Cauchy para séries numéricas, estendido)*

Sejam $a \geq 1$ e $N_o \in \mathbb{N}$, tal que $N_o \geq a$.

Suponhamos que a função $f : [a\,,\infty) \to \mathbb{R}$ é não-negativa (isto é $f(x) \geq 0$ para $x \in [a\,,\infty)$) decrescente, contínua em $[a\,,\infty)$ e que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja dada por

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,. \tag{3.193}$$

Então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente se, somente se, a integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\, dt$ for converge.

<u>**Demonstração:**</u>

A demonstração é semelhante a do Teorema (3.5.8) acima e será deixada como exercício para o leitor.

□

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 3.5.11 *Analizar a convergência da série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{3.194}$$

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,. \tag{3.195}$$

Consideremos a função $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1\,,\infty)\,. \tag{3.196}$$

Notemos que

- a função $\underline{f}$, dada por (3.196), é contínua em $[1\,,\infty)$;
- a função $\underline{f}$, dada por (3.196), é não-negativa em $[1\,,\infty)$, pois

$$f(x) \overset{(3.196)}{=} \frac{1}{x} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1\,,\infty)\,;$$

- a função $\underline{f}$, dada por (3.196), é decrescente em $[1\,,\infty)$, pois se $x\,,y \in [1\,,\infty)$ satisfazendo

$$x \leq y\,,$$

$$\text{então:} \qquad f(x) \overset{(3.196)}{=} \frac{1}{x} \overset{1\leq x\leq y}{\leq} \frac{1}{y} \overset{(3.196)}{=} f(y)\,.$$

- para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(n) \overset{(3.196)}{=} \frac{1}{n} \overset{(3.195)}{=} a_n\,. \tag{3.197}$$

Observemos que a integral imprópria de 1.a espécie:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \overset{(3.196)}{=} \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{1}{x}\,dx\right] \overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x)\Big|_{x=1}^{x=b}\right] = \lim_{b\to\infty}[\ln(b) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}] \overset{\text{Exercício Cálculo 1}}{=} \infty\,,$$

isto é, a integral imprópria de 1.a espécie $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é divergente.

Assim, do critério da integral para séries numéricas (ou seja, do Teorema (3.5.8)), segue que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente (caso contrário a integral imprópria deveria ser convergente, o que seria um absurdo).

□

Exemplo 3.5.12 *Analizar a convergência da série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \textit{para cada} \quad p \in \mathbb{R} \textit{ fixado}. \tag{3.198}$$

<u>**Resolução:**</u>

Para $p \in \mathbb{R}$ fixado e para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n^p}. \tag{3.199}$$

Consideremos a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^p}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty). \tag{3.200}$$

Notemos que, se

$$p = 0,$$

a série numérica dada por (3.198), será a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1$$

que é divergente, pois

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{a_n=1}{=} \lim_{n\to\infty} 1$$
$$= 1 \neq 0,$$

e assim do critério da divergência pars séries numéricas (isto é, do Teorema (3.4.2)) segue a afirmação.

Se

$$p < 0,$$

a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \tag{3.201}$$

será divergente, pois $-p > 0$, logo

$$\lim_{n \to \infty} n^{-p} = \infty \neq 0$$

e assim, novamente, do critério da divergência (isto é, do Teorema (3.4.2)) segue a afirmação.

Se

$$p = 1\,,$$

a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

também será divergente (é a série série harmônica, mostramos no item 1., que é divergente).

Consideremos o caso em que

$$p \in (0\,,\infty) \setminus \{1\}\,.$$

Notemos que:

- a função $\underline{f}$, dada por (3.200), é contínua em $[1\,,\infty)$;

- a função $\underline{f}$, dada por (3.200), é não-negativa em $[1\,,\infty)$, pois

$$f(x) \overset{(3.200)}{=} \frac{1}{x^p} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1\,,\infty)\,;$$

- a função $\underline{f}$, dada por (3.200), é decrescente em $[1\,,\infty)$, pois se $x\,,y \in [1\,\infty)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & x \leq y\,, \\ \text{então} \qquad & f(x) \overset{(3.200)}{=} \frac{1}{x^p} \\ & \overset{1 \leq x \leq y}{\leq} \frac{1}{y^p} \\ & \overset{(3.200)}{=} f(y)\,; \end{aligned}$$

- para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} f(n) & \overset{(3.200)}{=} \frac{1}{n^p} \\ & \overset{(3.199)}{=} a_n\,. \end{aligned} \tag{3.202}$$

Observemos que a integral imprópria de 1.a espécie

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \overset{(3.200)}{=} \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx\right]$$
$$\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \lim_{b\to\infty}\left[\left.\frac{1}{(1-p)\,x^{p-1}}\right]\right|_{x=1}^{x=b}\Bigg]$$
$$= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}[b^{1-p}-1]$$
$$= \begin{cases} \text{converge (para } \frac{1}{p-1}), & \text{se } p \in (1\,,\infty) \\ \text{diverge (para } +\infty), & \text{se } \ p \in (0\,,1) \end{cases}.$$

Logo, do critério da integral (ou seja, do Teorema (3.5.8)), segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \quad \text{será:} \quad \begin{cases} \text{convergente,} & \text{se } p \in (1\,,\infty) \\ \text{diverge (para } +\infty), & \text{se } p \in (0\,,1) \end{cases}.$$

Juntando todos os casos tratados teremos:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \quad \text{será:} \quad \begin{cases} \text{convergente,} & \text{se } p \in (1\,,\infty) \\ \text{diverge (para } +\infty), & \text{se } p \in (-\infty\,,1] \end{cases}. \tag{3.203}$$

□

Observação 3.5.6 *Para cada $p \in \mathbb{R}$, a série numérica*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}, \tag{3.204}$$

será denominada **$\underline{p}$-série**.

Logo, o Exemplo (3.5.12) acima, nos diz que uma $\underline{p}$-série é convergente se, e somente se,

$$p \in (1\,,\infty)\,. \tag{3.205}$$

Exemplo 3.5.13 *Analizar a convergência da série numérica*

$$\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\ln^p(n)}, \quad \textit{para cada} \quad p \in [0\,,\infty) \ \textit{fixado}. \tag{3.206}$$

Resolução:

Para $p \in [0\,,\infty)$ fixado e para cada $n \in \{3\,,4\,,5\,,\cdots\}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n\,\ln^p(n)}. \tag{3.207}$$

Consideremos a função $f : [e\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x\,\ln^p(x)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [e\,,\infty)\,. \tag{3.208}$$

Notemos que, se

$$p = 0\,,$$

teremos a série numérica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é, essencialmente a série harmônica (desprezando-se os dois primeiros termos da mesma), portanto será divergente.

Se

$$p = 1\,,$$

teremos temos, por (3.207) e (3.208), que

$$a_n \doteq \frac{1}{n\,\ln(n)}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \{3\,,4\,,5\,,\cdots\}\,. \tag{3.209}$$

$$f(x) \doteq \frac{1}{x\,\ln(x)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \geq e\,. \tag{3.210}$$

Notemos que:

- a função $\underline{f}$, dada por (3.210), é contínua em $[e\,,\infty)$;
- a função $\underline{f}$, dada por (3.210), é não-negativa em $[e\,,\infty)$, pois

$$f(x) \stackrel{(3.210)}{=} \frac{1}{x\,\ln(x)} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [e\,,\infty)\,;$$

- a função $\underline{f}$, dada por (3.210), é decrescente em $[e\,,\infty)$, pois se $x\,,y \in [e\,\infty)$ satisfazendo

$$x \leq y\,,$$

$$\begin{aligned} \text{então:} \quad f(x) &\stackrel{(3.210)}{=} \frac{1}{x\,\ln(x)} \\ &\stackrel{e\leq x\leq y}{\leq} \frac{1}{y\,\ln(y)} \\ &\stackrel{(3.210)}{=} f(y)\,; \end{aligned}$$

- para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} f(n) &\stackrel{(3.210)}{=} \frac{1}{n\,\ln(n)} \\ &\stackrel{(3.209)}{=} a_n\,. \end{aligned} \tag{3.211}$$

Observemos que a integral imprópria de 1.a espécie

$$\int_e^\infty f(x)\,dx \overset{(3.210)}{=} \int_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\int_e^b \frac{1}{x\ln(x)}\,dx\right].$$

$$\text{Mas:} \quad \int_e^b \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \left\{\begin{array}{c} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ x = e \Rightarrow u = 1 \\ x = b \Rightarrow u = \ln(b) \end{array}\right\}$$
$$= \int_1^{\ln(b)} \frac{1}{u}\,du$$
$$\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \ln(u)\Big|_{u=1}^{u=\ln(b)}$$
$$= \ln[\ln(b)].$$

$$\text{Logo,} \quad \int_e^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \ln[\ln(b)]$$
$$\overset{\text{Exercício de Cálculo 1}}{=} \infty.$$

Portanto a integral imprópria $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ é divergente.

Logo, pelo critério da integral para séries numéricas (ou seja, do Teorema (3.5.8)), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\,\ln(n)}$ será divergente.

Consideremos agora o caso em que

$$p \in (0,\infty)\setminus\{1\}.$$

Notemos que:

- a função f, dada por (3.208), é contínua em $[e,\infty)$;
- a função f, dada por (3.208), é não-negativa em $[e,\infty)$, pois

$$f(x) \overset{(3.208)}{=} \frac{1}{x\,\ln^p(x)} > 0, \quad \text{para cada} \quad x \in [e,\infty);$$

- a função f, dada por (3.208), é decrescente em $[e,\infty)$, pois se $x, y \in [e\,\infty)$ satisfazendo

$$x \leq y,$$

$$\text{então:} \quad f(x) \overset{(3.208)}{=} \frac{1}{x\,\ln^p(x)}$$
$$\overset{e\leq x\leq y}{\leq} \frac{1}{y\,\ln^p(y)}$$
$$\overset{(3.208)}{=} f(y);$$

- para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(n) \overset{(3.208)}{=} \frac{1}{n\,\ln^p(n)} \overset{(3.207)}{=} a_n\,. \tag{3.212}$$

Observemos que a integral imprópria de 1.a espécie:

$$\begin{aligned}\int_e^\infty f(x)\,dx &= \int_e^\infty \frac{1}{x\ln^p(x)}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\int_e^b \frac{1}{x\ln^p(x)}\,dx\right].\end{aligned} \tag{3.213}$$

$$\begin{aligned}\text{Mas,}\quad \int_1^b \frac{1}{x\ln^p(x)}\,dx &= \left\{\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ x = e \Rightarrow u = 1 \\ x = b \Rightarrow u = \ln(b) \end{array}\right\} \\ &= \int_1^{\ln(b)} \frac{1}{u^p}\,du \\ &\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left.\frac{1}{(1-p)u^{p-1}}\right|_{u=1}^{u=\ln(b)} \\ &= \frac{1}{(1-p)}\left[(\ln(b))^{1-p} - 1\right].\end{aligned} \tag{3.214}$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_e^\infty f(x)\,dx &\overset{(3.213)}{=} \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln^p(x)}\,dx \\ &\overset{(3.214)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-p)}\left[(\ln(b))^{1-p} - 1\right] \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{cases} \text{converge (para } \frac{1}{p-1}\text{)}, & \text{se } \; p \in (1\,,\infty) \\ \text{diverge (para } \infty\text{)}, & \text{se } \; p \in (0\,,1) \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, do critério da integral (ou seja, do Teorema (3.5.8)), segue que, a série numérica

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\ln^p(n)} \quad \text{será:} \quad \begin{cases} \text{convergente}, & \text{se } \; p \in (1\,,\infty) \\ \text{diverge (para } +\infty\text{)}, & \text{se } \; p \in (0\,,1) \end{cases}.$$

Logo, juntando todos o casos tratados do critério da integral (ou seja, do Teorema (3.5.8)), segue que, a série numérica

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\ln^p(n)} \quad \text{será:} \quad \begin{cases} \text{convergente}, & \text{se } \; p \in (1\,,\infty) \\ \text{diverge (para } +\infty\text{)}, & \text{se } \; p \in (-\infty\,,1] \end{cases}. \tag{3.215}$$

□

3.6 Convergência de Séries Alternadas

Observação 3.6.1

1. *Observemos que os critérios estabelecidos na seção 3.5 anterior, só podem ser aplicados para séries numéricas que tenham somente um* **número finito** *de termos negativos, ou seja, só aplicam-se para séries numéricas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,$$

onde

$$a_n \geq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,.$$

2. *Se a série numérica possui somente um* **número finito** *de termos positivos, podemos aplicar os critérios desevolvidos na seção 3.5 anterior, trocando-se o sinal dos termos da série numérica dada inicialmente, ou seja, em vez de estudarmos a convergência da série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,$$

onde

$$a_n < 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,,$$

poderemos estudar a convergência da série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)\,,$$

e, neste caso, teremos

$$-a_n > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,.$$

Deste modo, a série numérica obtida, ficará com somente um **número finito** *de termos negativos e assim poderemos tentar aplicar os resultados da seção 3.5 a esta nova série numérica.*

3. *Baseado nestas observações, falta um resultado que trate de series numéricas que tenham* **infinitos** *termos positivos e negativos, o que chamaremos de:*

Definição 3.6.1 *Diremos que uma série numérica é um* **série numérica alternada** *se ela puder ser colocada na seguinte forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{3.216}$$

onde

$$a_n \geq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.217}$$

Temos os:

Exemplo 3.6.1 *As séries numéricas abaixo são séries numéricas alternadas:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

   Neste caso,
$$a_n \doteq 1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.218}$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

   Neste caso,
$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.219}$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$

   Neste caso,
$$a_n \doteq \frac{1}{2n-1}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.220}$$

□

Com isto temos o seguinte critério para o estudo da convergência de séries numéricas alternadas:

Teorema 3.6.1 *(critério da série numérica alternada ou de Leibnitz)*
Suponhamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência numérica que satisfaz:*

$$\textbf{i.}\quad a_n \geq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,; \tag{3.221}$$
$$\textbf{ii.}\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{é uma sequência numérica decrescente;} \tag{3.222}$$
$$\textbf{iii.}\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \tag{3.223}$$

Então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *será convergente.*

Além disso, se a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *for denotada por* $\underline{S}$*, então*
$$|S - S_n| \leq a_{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.224}$$

Demonstração:

Denotemos por $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência numérica das somas parciais da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ou seja,
$$S_n \doteq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^{k+1}\,a_k}_{\doteq A_k}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.225}$$

Afirmamos que:

$$S_{2n} \leq S_{2n+2}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.226}$$

De fato pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} &\overset{(3.225)}{=} S_{2n} + A_{2n+1} + A_{2n+2} \\
&= S_{2n} + \overbrace{(-1)^{2n+2}}^{=1} a_{2n+1} + \overbrace{(-1)^{2n+3}}^{=-1} a_{2n+2} \\
&= S_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\substack{a_{2n+1} \overset{(3.222)}{\geq} a_{2n+2} \\ \geq 0}} \\
&\geq S_{2n}.
\end{aligned}$$

Temos também:

$$S_{2n+1} \leq S_{2n-1}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.227}$$

De fato pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, termos:

$$\begin{aligned}
S_{2n+1} &\overset{(3.225)}{=} S_{2n-1} + A_{2n} + A_{2n+1} \\
&= S_{2n-1} + \overbrace{(-1)^{2n+1}}^{=-1} a_{2n} + \overbrace{(-1)^{2n+2}}^{=1} a_{2n+1} \\
&= S_{2n-1} + \underbrace{-a_{2n} + a_{2n+1}}_{\substack{a_{2n} \overset{(3.222)}{\geq} a_{2n+1} \\ \leq 0}} \\
&\leq S_{2n-1}.
\end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$0 \leq S_{2n} \leq a_1, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.228}$$

De fato pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, termos:

$$\begin{aligned}
0 \leq S_{2n} &\overset{(3.225)}{=} \overbrace{(-1)^{1+1}}^{=1} a_1 + \overbrace{(-1)^{2+1}}^{=-1} a_2 + \cdots + \overbrace{(-1)^{(2n-1)+1}}^{=1} a_{2n-1} + \overbrace{(-1)^{(2n)+1}}^{=-1} a_{2n} \\
&= a_1 - a_2 + a_3 + \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \\
&= a_1 + \underbrace{(-a_2 + a_3)}_{\substack{a_3 \overset{(3.222)}{\leq} a_2 \\ \leq 0}} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\substack{a_{2n-1} \overset{(3.222)}{\leq} a_{2n-2} \\ \leq 0}} + \underbrace{(-a_{2n})}_{\leq 0} \\
&\leq a_1.
\end{aligned}$$

Logo, de (3.226) e (3.228), segue que a sequência numérica $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona (decrescente) e limitada em $\mathbb{R}$.

Logo, do Teorema (2.4.1), a sequência numérica $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$.

Seja

$$S \doteq \lim_{n\to\infty} S_{2n}. \tag{3.229}$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &\overset{(3.225)}{=} S_{2n} + A_{2n+1} \\ &= S_{2n} + \overbrace{(-1)^{(2n+1)+1}}^{=1} a_{2n+1} \\ &= S_{2n} + a_{2n+1} \, . \end{aligned} \tag{3.230}$$

Como, de (3.223), temos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \, , \tag{3.231}$$

segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} &\overset{(3.230)}{=} \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \\ &\overset{(3.229) \text{ e } (3.231)}{=} S + 0 = S \, . \end{aligned}$$

Ou seja, a sequência numérica $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ também será convergente para $\underline{S}$.

Com isto podemos mostrar que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para $\underline{S}$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente e sua soma será igual a $\underline{S}$.

Notemos que, de (3.226), seque que a sequência numérica $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \, ,$$

segue que

$$S_{2n} \leq S \, , \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \, . \tag{3.232}$$

Por outro lado, de (3.227), temos que a sequência numérica $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \, ,$$

deveremos ter

$$S \leq S_{2n+1} \, , \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \, . \tag{3.233}$$

Como isto, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$S_{2n} \overset{(3.232)}{\leq} S \overset{(3.233)}{\leq} S_{2n+1} \, . \tag{3.234}$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(3.232)}{\leq} S - S_{2n} \\ &\overset{(3.233)}{\leq} S_{2n+1} - S_{2n} \\ &= A_{2n+1} \\ &= \overbrace{(-1)^{(2n+1)+1}}^{=1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{isto é,} \qquad |S - S_{2n}| \overset{(3.232)}{=} S - S_{2n} \leq a_{2n+1}. \tag{3.235}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(3.233)}{\leq} S_{2n+1} - S \\ &\overset{(3.232)}{\leq} S_{2n+1} - S_{2n+2} \\ &= -A_{2n+2} \\ &= -[\overbrace{(-1)^{(2n+2)+1}}^{=-1} a_{2n+2}] \\ &= a_{2n+2}, \end{aligned}$$

$$\text{isto é,} \quad |S - S_{2n+1}| \overset{(3.233)}{\leq} S_{2n+1} - S \leq a_{2n+2}. \tag{3.236}$$

Portanto, de (3.236) e (3.236), segue que

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 3.6.2 *Verifique se a série numérica abaixo convege ou diverge, justificando sua resposta.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{3.237}$$

Resolução:

Notemos que série numérica (3.237) é uma série alternada, onde

$$a_n \doteq \frac{1}{n}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.238}$$

Observemos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- não negativa, pois

$$a_n \overset{(3.238)}{=} \frac{1}{n} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,;$$

- é decrescente, pois se $n\,, m \in \mathbb{N}$ satisfazem $n \leq m$, segue que

$$a_m \overset{(3.238)}{=} \frac{1}{m} \overset{n \leq m}{\leq} \frac{1}{n} = a_n\,;$$

- além disso, temos:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Logo pelo critério da série alternada (ou seja, do Teorema (3.6.1)) segue que a serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é convergente.

$\square$

Observação 3.6.2 *A série numérica (3.237) acima será denominada* **série harmônica alternada**.

Veremos, mais adiante, que esta série alternada tem soma igual a $\ln(2)$, *ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)\,. \tag{3.239}$$

Podemos também aplicar o critério de Leibnitz (isto é, o Teorema (3.6.1)), ao:

Exemplo 3.6.3 *Verifique se a série numérica abaixo convege ou diverge, justificando sua resposta.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\,n - 1} \tag{3.240}$$

Resolução:

Notemos que série numérica (3.240) é uma série alternada, onde

$$a_n \doteq \frac{1}{2\,n - 1}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.241}$$

Observemos que a sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

- não negativa, pois

$$a_n \overset{(3.241)}{=} \frac{1}{2\,n - 1} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,;$$

- é decrescente, pois se $n\,, m \in \mathbb{N}$ satisfazem $n \leq m$, segue que

$$a_m \overset{(3.241)}{=} \frac{1}{2\,m - 1} \overset{n \leq m}{\leq} \frac{1}{2\,n - 1} = a_n\,;$$

- além dissom, temos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 .$$

Logo, pelo critério da série alternada (ou seja, do Teorema (3.6.1)), segue que a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ é convergente.

□

Observação 3.6.3 *Veremos, mais adiante, que a soma desta série numérica será igual $\frac{\pi}{4}$, ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} . \tag{3.242}$$

Observação 3.6.4

1. *O Teorema (3.6.1) pode ser aplicado a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n , \tag{3.243}$$

mais precisamente: se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não negativa, decrescente e tem limite zero, então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ será convergente.

Para ver isto basta observar que série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = (-1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n .$$

2. *A condição*

$$\text{" } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{decrescente "}$$

necessária para obtermos a conclusão no Teorema (3.6.1), como mostra o seguinte exemplo:

Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^4} + \cdots$$

Observemos que ela é uma série numérica divergente.

De fato, pois a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

é divergente (verifique!) e a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

é convergente (série geométrica de razão $0 \leq c \doteq \frac{1}{2} < 1$*) e temos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n},$$

logo ela será divergente.

Observemos que

$$a_n \geq 0, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{e} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

mas a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** *é decrescente (verifique!).*

Podemos aplicar as ideias desenvolvidas nesta seção, ou seja, o critério de Leibnitz (ou seja, do Teorema (3.6.1)) ao:

Exemplo 3.6.4 *Mostremos que a série numérica*

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n} \tag{3.244}$$

é convergente.

Resolução:

Notemos que a série numérica (3.244) é um série alternada, onde

$$a_n \doteq \frac{\ln(n)}{n}, \quad \text{para cada} \quad n \geq 3. \tag{3.245}$$

Notemos que:

(i) A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não negativa, pois

$$a_n \overset{(3.245)}{=} \frac{\ln n}{n} \geq 0, \quad \text{para cada} \quad n \geq 3 \ (>1);$$

(ii) A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

De fato, pois considerando-se a função $f : [e, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{\ln(x)}{x}, \quad \text{para cada} \quad x \in [e, \infty), \tag{3.246}$$

segue que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[e, \infty)$ e, além disso, das regras de derivação, teremos

$$f'(x) \overset{(3.246)}{=} \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \leq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in [e, \infty).$$

Logo a função $\underline{f}$ é decrescente em $[e, \infty)$ e como

$$f(n) \overset{(3.246)}{=} \frac{\ln(n)}{n} \overset{(3.245)}{=} a_n\,,$$

segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também será decrescente;

(iii) além disso, temos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{(3.245)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} \overset{\text{Obs. (2.4.1) item 2.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{: L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right) = 0\,,$$

$$\text{logo,} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Logo segue, do critério da série alternada (ou seja, do Teorema (3.6.1)), que a serie numérica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}$ é convergente.

□

Como exercício deixaremos o:

Exercício 3.6.1 *Mostre que a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} \tag{3.247}$$

é convergente e determine sua soma, com erro menor ou igual $\underline{0,02}$*, em valor absoluto.*

Resolução:

Notemos que a série numérica (3.247) é um série alternada, onde

$$a_n \doteq \frac{1}{n^2}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.248}$$

Deixaremos, como exercício parfa o leitor, mostrar que a série numerica (3.247) é convergente (use o critério da séria alternada, ou seja, o Teorema (3.6.1)).

Denotemos por $\underline{S}$ a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$, ou seja,

$$S \doteq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$

e por $\underline{S_n}$ a soma parcial de ordem $\underline{n}$ da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$, ou seja, para cada $n \geq 3$, temos que

$$\begin{aligned} S_n &\doteq \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,a_k \\ &\overset{(3.248)}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}\,. \end{aligned} \tag{3.249}$$

Do critério da série alternada (ou seja, de (3.224) do Teorema (3.6.1)) segue que

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, podemos escolher $N_o \in \mathbb{N}$, de mdo que

$$\begin{aligned} a_{N_o+1} &= \frac{1}{{N_o}^2} \\ &\leq 0,02 \\ &= 2\,\frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{50}\,. \end{aligned}$$

Notemos que, se $N_o \doteq 9$ teremos

$$\begin{aligned} a_{9+1} &= a_{10} \\ &\overset{(3.248)}{=} \frac{1}{10^2} \\ &= \frac{1}{1000} \\ &< \frac{1}{50}\,. \end{aligned}$$

Portanto, de (3.224), segue que

$$\begin{aligned} |S_9 - S| &\leq a_{10} \\ &< 0,02\,, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} S_9 &\overset{(3.249)}{=} a_1 - a_2 + a_3 + \cdots - a_9 \\ &\overset{(3.248)}{=} 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{1}{81} \end{aligned}$$

é uma aproximação de $\underline{S}$, com erro menor que $\underline{0,02}$.

□

3.7 Reagrupamento de Séries Numéricas

Definição 3.7.1 *Dada uma série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, diremos que a serie numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é um* **<u>reagrupamento da serie numérica</u>** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, se os termos da 2.a série numérica forem os termos da 1.a série numérica, tomados em outra ordem, isto é, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, temos*

$$b_n = a_{i_n}\,, \tag{3.250}$$

para algum $i_n \in \mathbb{N}$ *e para cada* $m \in \mathbb{N}$*, temos*

$$a_m = b_{j_m}\,, \tag{3.251}$$

para algum $j_m \in \mathbb{N}$*.*

Para ilustrar, temos o:

Exemplo 3.7.1 *A série numérica*

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots$$

é um reagrupamento da da série harmômica alternada, isto é, da série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\,. \tag{3.252}$$

Neste caso, temos que:

$$b_1 = a_1\,, \quad b_2 = a_3\,, \quad b_3 = a_5\,, \cdots\,.$$

Para reagrupamento de séries numéricas, cujos termos são não-negativos, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.7.1 *Suponhamos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *seja convergente e*

$$a_n \geq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.253}$$

Então qualquer reagrupamento, que denotaremos por $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, da série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

Além disso, se a soma da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é igual a* $\underline{S}$*, então a soma do reagrupamento* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *também será igual a* $\underline{S}$*, isto é,*

$$\textit{se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S\,, \quad \textit{então} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S\,. \tag{3.254}$$

Demonstração:

Sejam $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as sequências numéricas das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$S_n \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i\,, \tag{3.255}$$

$$T_n \doteq \sum_{k=1}^{n} b_k\,. \tag{3.256}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é um reagrupamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, segue que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $i_1, i_2 \cdots \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} b_k &= a_{i_k}\,, \\ \text{ou seja,}\quad T_n &\overset{(3.256)}{=} \sum_{i=k}^{n} b_k \\ &= \sum_{i=k}^{n} a_{i_k} \\ &= a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}\,. \end{aligned} \tag{3.257}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, segue que sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Logo, da Proposição (2.3.2), segue que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada, isto é, podemos encontrar $M \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n &\overset{(3.255)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &\overset{a_n \geq 0}{=} |S_n| \leq M\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{3.258}$$

Como

$$a_n \overset{(3.253)}{\geq} 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

segue que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será crescente.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} T_n &\overset{(3.256)}{=} b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &\overset{(3.257)}{=} a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} \\ &\overset{k \doteq \max\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \text{ e } a_j \geq 0}{\leq} a_1 + a_2 + \cdots + a_k \\ &\overset{(3.255)}{=} S_i \overset{(3.258)}{\leq} M\,, \end{aligned} \tag{3.259}$$

ou seja, a sequência numérica $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Observemos que ela também é crescente

$$b_n \overset{\text{existe } i_n \in \mathbb{N}}{=} a_{i_n} \overset{(3.253)}{\geq} 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Logo, do Teorema (2.4.1), segue que a sequência numérica $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Denotemos por T a soma da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (3.259), temos que

$$T_n \leq S_k \overset{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é crescente}}{\leq} S\,,$$

para

$$k \doteq \max\{i_1\,, i_2\,, \cdots, i_n\}\,,$$

que implicará em

$$T \leq S\,. \tag{3.260}$$

De modo análogo, considerando-se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como um reagrupamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, segue que

$$0 \leq S \leq T\,, \tag{3.261}$$

e assim, (3.260) e (3.261), implicarão que

$$T = S\,,$$

ou seja, a soma das séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são iguais, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.7.1 *A condição*

$$"\ a_n \geq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\ "$$

no Teorema (3.7.1) é **necessária** *para a validade do resultado, como mostra o exemplo a seguir:*

Considere a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots\,, \tag{3.262}$$

que é convergente, com soma igual a $S > 0$ *(que mostraremos, mais adiante, que* $S = \ln(2)$*), ou seja,*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots . \end{aligned} \tag{3.263}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} - 0 + \frac{1}{8} + \cdots . \end{aligned} \tag{3.264}$$

Somando-se as séries numéricas (3.263) *e* (3.264)*, obteremos:*

$$\frac{3}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \cdots ,$$

que é um reagrupamento da série harmônica alternada (3.262)*, e cuja soma (que é* $\frac{3}{2} S$*) é uma valor diferente de* $\underline{S}$*, ou seja, um reagrupamento de uma série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$*, que converge, mas que o valor de sua soma é diferente !*

Ao final deste capítulo apresentaremos um resultado que mostrará que para séries numéricas do "tipo alternada", podemos ter reagrupamentos convergindo para qualquer número real, ou até mesmo divergindo para $+\infty$ *ou* $-\infty$ *(veja o Teorema* (3.9.1)*).*

3.8 Séries Absolutamente Convergentes

Começaremos pela

Definição 3.8.1 *Diremos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* <u>absolutamente convergente</u> *se a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{3.265}$$

for convergente.

Para ilustrar, consideremos o:

Exemplo 3.8.1 *Para cada* $c \in (-1\,,1)$ *fixado, mostre que série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n \tag{3.266}$$

é absolutamente convergente:

Resolução:

A série numérica (3.266) é uma série geométrica de ração $\underline{c}$.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$|c^n| = |c|^n \,. \tag{3.267}$$

Como $|c| \in [0\,,1)$, temos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c^n| \overset{(3.267)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |c|^n$$

será convergente (veja o Exemplo (3.3.5)).

Portanto, da Definição (3.8.1), segue que a série numérica (3.266) é absolutamente convergente.

□

Temos também o:

Exemplo 3.8.2 *Verifique se a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \tag{3.268}$$

é absolutamente convergente:

Resolução:

Notemos que a série numérica (3.268) é a série harmônica alternada.

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \,.$$

Como a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente (é a série harmônica, veja o Exemplo (3.34)), segue, da Definição (3.8.1), que a série numérica (3.268) não é absolutamente convergente, ou ainda, a série harmônica alternada não é absolutamente convergente.

□

Para séries numéricas absolutamente convergentes, temos o :

Teorema 3.8.1 *Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente, então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, isto é, se a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

é convergente, então a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

também será convergente.

Demonstração:

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} & -|a_n| \leq a_n \leq |a_n|\,, \\ \text{logo} \quad & 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n|\,. \end{aligned} \tag{3.269}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (2\,|a_n|)$ também será convergente.

Logo, do item 1. do critério da comparação para séries numéricas (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.2)), segue que série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ será convergente.

Mas

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

Como as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ são convergentes, das propriedade básica de subtração de séries numéricas (veja a Proposição (3.3.1)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será (pois é diferença de duas convergentes), completando a demonstração.

□

Observação 3.8.1 *A recíproca do Teorema* (3.8.1) *acima é falsa, isto é, existem séries numéricas que são convergentes mas* **não** *são absolutamente convergentes.*

Para ver isto, notemos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

é convergente (pois é a série harmônica alternada, veja o Exemplo (3.6.2)*) mas não é absolutamente convergente.*

De fato, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que é a série harmônica que sabemos ser divergente (veja o Exemplo (3.34)*).*

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 3.8.3 *Estudar a convergência da série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}. \tag{3.270}$$

Resolução:

Notemos que,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

e está série numérica à direita é convergente (é uma $\underline{p}$-série, com $p > 1$, veja o Exemplo (3.5.12), ou ainda, (3.203)).

Então, da Definição (3.8.1), segue que a série numérica (3.270) é absolutamente convergente.

Logo, do Teorema (3.8.1), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ também será convergente.

□

Temos também o:

Exemplo 3.8.4 *Estudar a convergência da série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n)}{n!} \tag{3.271}$$

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n!}. \tag{3.272}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |a_n| \\ &\overset{(3.272)}{=} \left|\frac{\operatorname{sen}(n)}{n!}\right| \\ &\leq \frac{1}{n!}. \end{aligned} \tag{3.273}$$

Mas as série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ é convergente (veja o Exemplo (3.5.5), ou ainda, (3.147), com $x = 1$).

Logo do item 1. do critério da comparação para séries numéricas (ou seja, do item 1. do Teorema (3.5.2)) segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(n)}{n!}\right|$ será convergente, ou seja, da Definição (3.8.1), temos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n)}{n!}$ é absolutamente convergente.

Além disso, do Teorema (3.8.1), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n)}{n!}$ é convergente.

□

3.9 Séries Condicionalmente Convergentes

Definição 3.9.1 *Diremos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* <u>**condicionalmente convergente**</u> *se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for convergente, mas não for absolutamente convergente, isto é, se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série numérica convergente, mas a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *é uma série numérica divergente.*

Para ilustrar temos o:

Exemplo 3.9.1 *Mostre que a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \tag{3.274}$$

é condicionalmente convergente.

<u>**Resolução:**</u>

A série numérica (3.274) é a série harmônica alternada que é uma série numérica condicionalmente convergente, pois ela converge, mas não converge absolutamente, isto é, a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

é convergente (veja o Exemplo (3.6.2)), mas a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente (veja o Exemplo (3.34)).

□

Temos também o:

Exemplo 3.9.2 *A série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}, \tag{3.275}$$

é condicionalmente convergente ?

<u>**Resolução:**</u>

A série numérica (3.275) <u>**não**</u> é uma série numérica condicionalmente convergente, pois ela converge absolutamente (veja o Exemplo (3.8.3)).

□

Para finalizar exibiremos um resultado sobre reagrupamento de séries numéricas condicionalmente convergentes, a saber:

Teorema 3.9.1 *Suponhamos que série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é condicionalmente convergente.*

Então dado

$$-\infty < L < \infty, \tag{3.276}$$

podemos encontrar um reagrupamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *que é convergente e cuja soma é igual a* $\underline{L}$.

Além disso, se

$$L = \infty \quad ou \quad L = -\infty, \text{ respectivamente}$$

podemos encontrar reagrupamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *que diverge para* $L = +\infty$, *ou* $L = -\infty$, *respectivamente.*

Demonstração:

Daremos, a seguir, uma ideia da demonstração para o caso em que

$$0 < L < \infty.$$

Os outros casos são semelhantes e suas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor.

Como ela é condicionalmente convergente temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Consideremos

$$A \doteq \{n \in \mathbb{N};\, a_n \geq 0\} = \{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$$

e

$$B \doteq \{n \in \mathbb{N};\, a_n < 0\} = \{m_1, m_2, m_3, \cdots\},$$

onde

$$n_i < n_j \quad \text{e} \quad m_i < m_j, \quad \text{se} \quad i < j.$$

Afirmamos que $\underline{A}$ e $\underline{B}$ são infinitos.

De fato, se um dos dois fosse finito, por exemplo o conjunto $\underline{B}$ fosse finito, teríamos somente um número finito de termos negativos (ou, positivos, se o conjunto $\underline{A}$ fosse finito), o que contraria a hipótese da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ser uma série alternada.

Logo podemos produzir um reagrupamento, $\sum_{n=1}^{\infty} b_m$, da serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da seguinte forma:

$$b_1 \doteq a_{n_1},$$

$$b_2 = \begin{cases} a_{n_2}, & \text{se } b_1 < L \\ a_{m_1}, & \text{se } b_1 \geq L \end{cases},$$

$$b_3 = \begin{cases} a_{n_3}, & \text{se} \quad b_1 + b_2 < L \\ a_{m_2}, & \text{se} \quad b_1 + b_2 \geq L \end{cases},$$

$$b_4 = \begin{cases} a_{n_4}, & \text{se} \quad b_1 + b_2 + b_3 < L \\ a_{m_3}, & \text{se} \quad b_1 + b_2 + b_3 \geq L \end{cases},$$

e assim por diante.

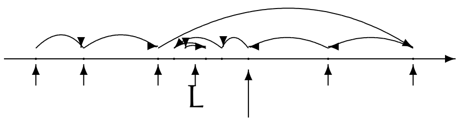
Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

pois a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente (critério da divergência, ou seja, o Teorema (3.4.2)) podemos mostrar que que a sequência numérica das somas parciais da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_m$ será convergente para $\underline{L}$.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



□

3.10 Exercícios

Capítulo 4

Sequência de Funções

O objetivo deste capítulo é introduzir alguns conceitos de convergência de sequências de funções, suas propriedades e aplicações.

4.1 Definições

Observação 4.1.1 *Seja $\underline{A}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio.*

Denotaremos por $\mathcal{F}(A\,;\mathbb{R})$ o conjunto formado por todas as funções $f : A \to \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{F}(A\,;\mathbb{R}) \doteq \{f\,;\, f : A \to \mathbb{R} \text{ é uma função}\}. \tag{4.1}$$

Comecemos pela

Definição 4.1.1 *A aplicação que, a cada natural $\underline{n}$, fizermos corresponder uma função $f_n : A \to \mathbb{R}$, isto é,*

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A\,;\mathbb{R}) \\ n \mapsto \;\; f_n \end{array},$$

será dita **sequência de funções** *definidas no conjunto $\underline{A}$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : A \to \mathbb{R}$ será dita **termo da sequência de funções** *ou ainda* **$\underline{n}$-ésimo termos da sequência de funções** .

Notação 4.1.1 *A sequência de funções acima será indicada por:*

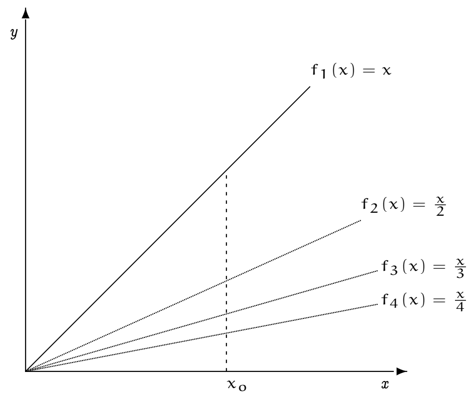
$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \quad \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad (f_n) \quad \text{ou} \quad \{f_n\}. \tag{4.2}$$

Consideremos os

Exemplo 4.1.1 *Seja $A \doteq [0, \infty)$ e consideremos a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde, apra cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a função $f_n : A \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x}{n}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.3}$$

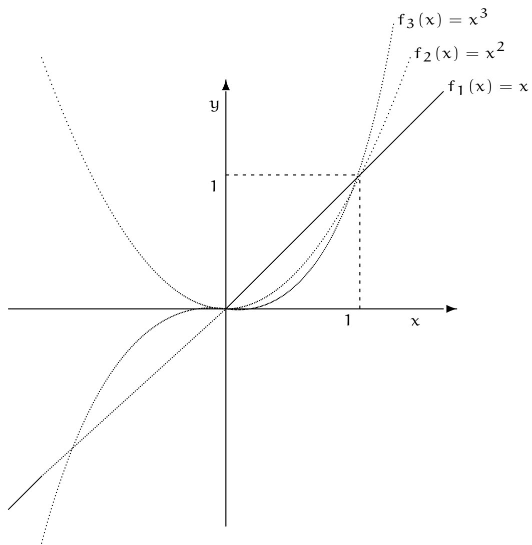
Os gráficos dos quatro primeiros termos da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, estão representados, geometricamente, na figura abaixo.



Exemplo 4.1.2 *Seja* $A \doteq \mathbb{R}$ *e consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Os gráficos dos três primeiros termos da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, estão representados, geometricamente, na figura abaixo.*



4.2 Convergência Pontual de Sequências de Funções

Observação 4.2.1 *Dada uma sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, temos que a função* $f_n : A \to \mathbb{R}$*, fixando-se* $x_o \in A$ *obtemos uma sequência numérica* $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ *que pode ou não ser uma sequência numérica convergente.*

Baseado nisto temos a seguinte definição:

Definição 4.2.1 *Dada a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *como acima e* $x_o \in A$.

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge em** $\underline{x_o}$, *se a sequência numérica* $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente, isto é, se existe*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_o)\,.$$

Se para cada $x \in A$, *a sequência numérica* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente para* $\underline{f(x)}$, *onde* $f : A \to \mathbb{R}$ *é uma função, então diremos que a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge pontualmente (ou ponto a ponto)** *para a função* $\underline{f}$, *no conjunto* $\underline{A}$, *isto é, se*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,. \tag{4.5}$$

Neste caso escreveremos

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{em} \quad A \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n = f\,, \quad \textit{pontualmente no conjunto } A. \tag{4.6}$$

Observação 4.2.2

1. *Observemos que a função* $f : A \to \mathbb{R}$ *está univocamente determinada, isto é, é de fato uma função.*

2. *Da Definição de convergência de sequências numérica (isto é, da Definição* (2.3.1)*) temos:*

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{em} \quad A$$

se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, *para cada* $x \in A$, *existe* $N_o \in \mathbb{N}$, *como*

$$N_o = N_o(\varepsilon\,, x)\,, \tag{4.7}$$

de modo que para

$$n \geq N_o\,, \qquad \textit{teremos} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{4.8}$$

3. *Este tipo de convergência de sequência de funções é chamada de* **convergência pontual** *ou* **convergência ponto a ponto**.

Para ilustrar temos os:

Exemplo 4.2.1 *Estudar a convergência pontual das sequintes sequências de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*:*

1. $A \doteq \mathbb{R}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *temos* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*
$$f_n(x) \doteq \frac{x}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$
2. $A \doteq [0\,,1]$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *temos* $f_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, *dada por*
$$f_n(x) \doteq x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{4.10}$$
3. $A \doteq \mathbb{R}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *temos* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*
$$f_n(x) \doteq \frac{x^2 + n\,x}{n} = \frac{x^2}{n} + x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.11}$$
4. $A \doteq \mathbb{R}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *temos* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*
$$f_n(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(n\,x + n)}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.12}$$

Resolução:

1.

Notemos que, para cada $x_o \in \mathbb{R}$ fixado, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_o) \overset{(4.9)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{x_o}{n} = 0 .$$

Logo, definido-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

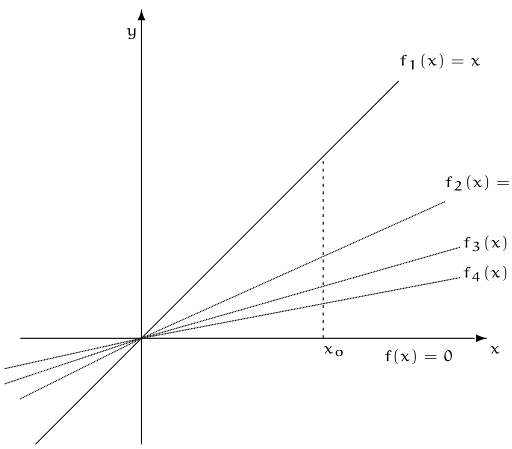
$$f(x) \doteq 0 , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} , \tag{4.13}$$

segue que

$$f_n \xrightarrow{p} f , \quad \text{em} \quad A = \mathbb{R} \tag{4.14}$$

isto é, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para $\underline{f}$, no conjunto $\underline{A}$.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



2.

Notemos que, para cada $x_o \in \mathbb{R}$ fixado, temos que

(i). Se $x_o = 1$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) \overset{(4.10)}{=} \lim_{n\to\infty} 1^n = 1 .$$

(ii). Se $x_o \in [0, 1)$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_o) \overset{(4.10)}{=} \lim_{n\to\infty} {x_o}^n \overset{x_o\in[0,1)}{=} 0 .$$

Logo, definido-se a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

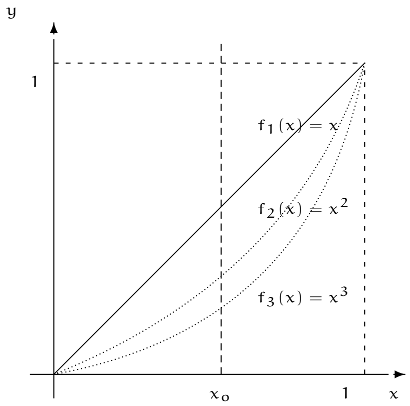
$$f(x) \doteq \begin{cases} 0 & , \ \text{para} \ \ x \in [0, 1) \\ 1 & , \ \text{para} \ \ x = 1 \end{cases} , \tag{4.15}$$

segue, dos itens (i). e (ii). acima, que

$$f_n \xrightarrow{p} f \text{ em } A = [0,1] \tag{4.16}$$

isto é, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $\underline{f}$, no conjunto em $\underline{A}$.

A figura abaixo ilustra a situação acima:



3.

Notemos que, para cada $x_o \in \mathbb{R}$ fixado, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_o) \overset{(4.11)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{{x_o}^2}{n} + x_o = x_o\,.$$

Logo, definindo-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

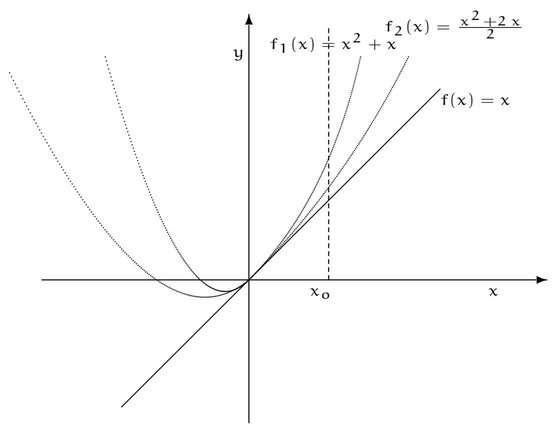
$$f(x) \doteq x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.17}$$

segue que

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \text{em} \quad A = \mathbb{R} \tag{4.18}$$

a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge pontualmente para a função $\underline{f}$, no conjunto em $\underline{A}$

A figura abaixo ilustra a situação acima:



4.

Notemos que, para cada $x_o \in \mathbb{R}$ fixado, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_o) \overset{(4.12)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\,x_o+n)}{n} \overset{|\operatorname{sen}(n\,x_o+n)|\leq 1 \text{ e } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}{=} 0\,.$$

Logo, definido-se a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

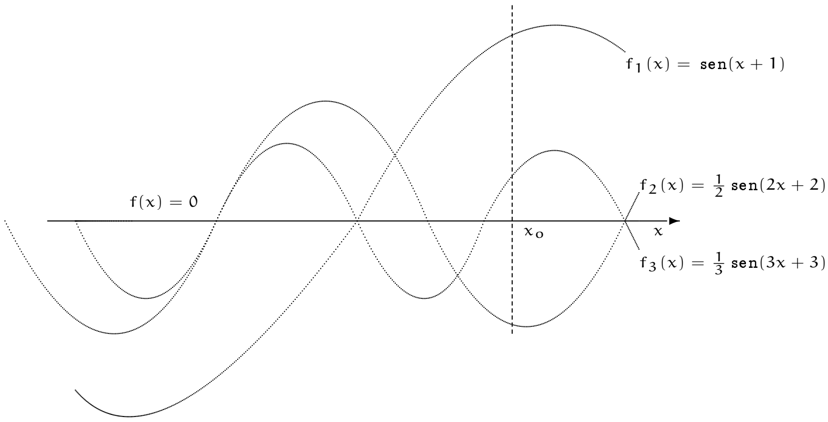
$$f(x) \doteq 0\,,\quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\,, \tag{4.19}$$

segue que

$$f_n \xrightarrow{p} f\,,\quad \text{em} \quad A=\mathbb{R} \tag{4.20}$$

a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge pontualmente para a função $\underline{f}$, no conjunto em $\underline{A}$.

A figura abaixo ilustra a situação acima:



□

Observação 4.2.3 *Na Definição da convergência pontual (isto é, na Definição (4.2.1)), podemos observar que, dado $\varepsilon > 0$ e $x_o \in A$, o número natural $\underline{N_o}$ a ser encontrar depende, em geral, de*

$$\underline{\varepsilon} \quad \textit{e do ponto} \quad \underline{x_o}\,. \tag{4.21}$$

Será que não podemos eliminar a dependência do N_o em relação ao ponto $\underline{x_o}$?
A resposta em geral é __não__, como mostra o Exemplo (4.3.1) abaixo.

4.3 Convergência Uniforme de Sequências de Funções

Quando pudermos encontrar um número natural $\underline{N_o}$ que independente do ponto $\underline{x_o}$ na Definição (4.2.1), teremos a:

Definição 4.3.1 *Diremos que uma sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *definidas em* $A \subseteq \mathbb{R}$ *(isto é,* $f_n : A \to \mathbb{R}$*)* **converge uniformente, no conjunto** $\underline{A}$ *para uma função* $f : A \to \mathbb{R}$, *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar*

$$N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \tag{4.22}$$

de modo

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in A. \tag{4.23}$$

Neste caso escreveremos

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em} \quad A. \tag{4.24}$$

Observação 4.3.1

1. *Notemos que escrever*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in A$$

é equivalente a escrever

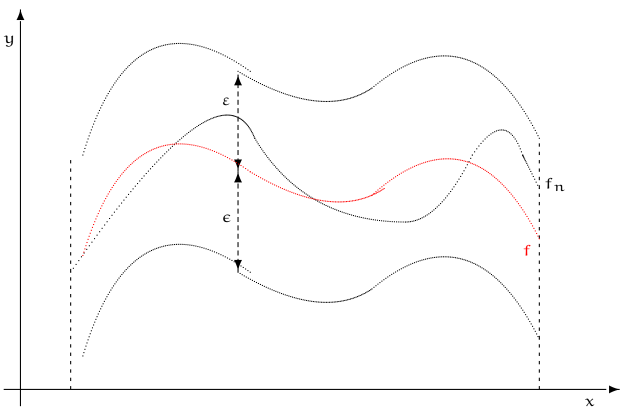
$$-\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in A$$

ou ainda,

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in A.$$

Assim, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaz a condição* (4.23) *se, e somente se, seu gráfico está contido no " tubinho", de raio* $\underline{\varepsilon}$, *em torno do gráfico da função* $\underline{f}$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Logo, do ponto de vista acima,

$$f_n \to f, \quad \text{uniformemente no conjunto} \quad \underline{A}$$

se dado $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar um* $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *de modo que, para todo* $n \geq N_o$, *a representação geométrica do gráfico das funções* $\underline{f_n}$, *estarão contidas no "tubinho"de raio* ε *em torno da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *definido acima.*

2. *Segue imediatamente da Definições* (4.2.1) *e* (4.3.1), *que a convergência uniforme de uma sequência de funções em um conjunto, implicará na convergência pontual dessa sequência de funções no mesmo conjunto, isto é, se uma sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente em* $\underline{A}$, *para uma função* $\underline{f}$, *então a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente para a função* $\underline{f}$, *no conjunto* $\underline{A}$, *ou ainda,*
$$\text{se} \quad f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{em } A\,, \quad \text{então} \quad f_n \xrightarrow{p} f \quad \text{em } A\,. \tag{4.25}$$
A recíproca é **falsa**, *isto é, existem sequências de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que convergem pontualmente para uma função* $\underline{f}$, *em um conjunto* $\underline{A}$, *mas a convergência sequências de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** *será uniforme, como mostram os Exemplos* (4.3.1), (4.3.3) *e* (4.3.1), *que exibiremos a seguir.*

Exemplo 4.3.1 *Mostre que a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde para cada* $n \in \mathbb{N}$, *temos qua a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*
$$f_n(x) \doteq \frac{x}{n}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.26}$$
converge pontualmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*
$$f(x) \doteq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.27}$$
mas **NÃO** *converge uniformemente em* $\mathbb{R}$.

Resolução:

Notemos que, do Exemplo (4.2.1) item 1. (veja (4.9)) temos que
$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}\,.$$
isto é, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

A convergência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **NÃO** é uniforme em $\mathbb{R}$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que a
$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}\,.$$
Então, dado
$$\varepsilon = 1\,,$$
deveria existir um $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de que se
$$n \geq N_o\,, \quad \text{deveríamos ter} \quad \Big|\underbrace{f_n(x)}_{\overset{(4.27)}{=}\frac{x}{n}} - 0\Big| < 1\,, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Em particular, deveríamos ter

$$\left|\frac{x}{N_o}\right| < 1\,, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ou, equivalentemente

$$|x| < N_o, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

o que é um absurdo, pois escolhendo $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$x \geq N_o\,,$$

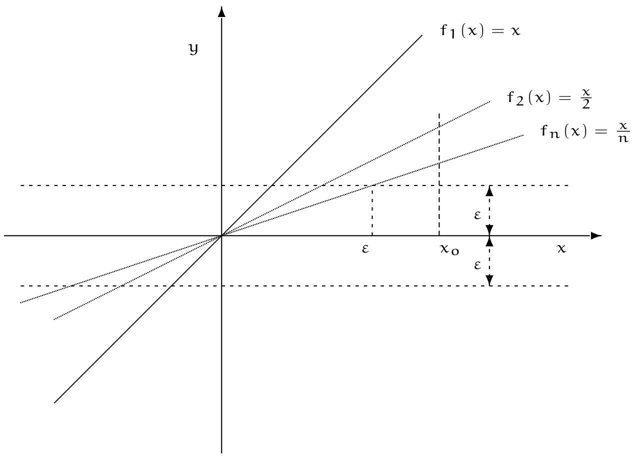
a desigualdade acima será falsa !

Portanto **não** existe $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = 1, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $\underline{f}$, em $\mathbb{R}$, mas **não** converge uniforme para a função $\underline{f}$, em $\mathbb{R}$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Observação 4.3.2 *Observe que se no Exemplo (4.3.1) acima, considerarmos*

$$A \doteq [a\,,b]\,,$$

então a convergência da sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será uniforme em* $A = [a\,,b]$, *como mostra o exemplo a seguir, no caso de*

$$a \doteq 0 \quad e \quad b \doteq 10\,.$$

Exemplo 4.3.2 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $A \doteq [0\,,10]$ *e para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f_n : A \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,10]\,. \tag{4.28}$$

Mostre que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $f : [0\,,10] \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,10]\,. \tag{4.29}$$

<u>**Resolução:**</u>

Observe que, como vimos no Exemplo (4.3.1)

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \text{ em } \; A = [0\,,10]\,.$$

Analisemos se a convergência é uniforme.

Notemos que, dado $\varepsilon > 0$, se consideraros $N_o \in \mathbb{N}$ de modo que

$$N_o > \frac{10}{\varepsilon}\,, \tag{4.30}$$

então, para

$$n \geq N_o \tag{4.31}$$

teremos:

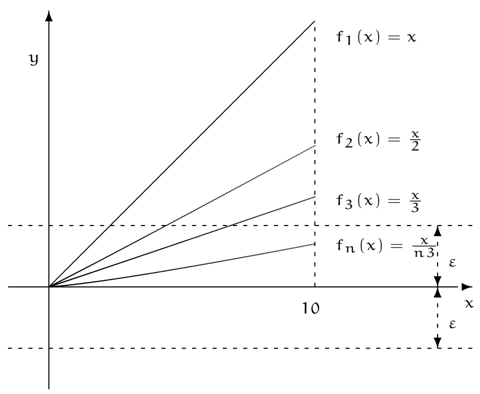
$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\overset{(4.28)\text{ e }(4.29)}{=} \left|\frac{x}{n} - 0\right| \\ &\leq \frac{10}{n} \\ &\overset{(4.31)}{\leq} \frac{10}{N_o} \overset{(4.30)}{\leq} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$, mostrando que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em } A = [0\,,10]$$

isto é, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função <u>f</u>, no conjunto <u>A</u>.

A figura abaixo ilustra a situaçao acima.



$\square$

Observação 4.3.3 *No Exemplo (4.3.2) acima, poderíamos desenvolver o mesmo raciocínio, considerando o intervalo $A = [a\,,b]$.*

Deixaremos a resoluções deste caso como exercício para o leitor.

Exemplo 4.3.3 *Consideremos a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : A \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$f_n(x) \doteq x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.32}$$

Mostre que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $\underline{f}$, no conjunto $A \doteq [0\,,1]$, onde a função $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0 & , \ \textit{para } x \in [0\,,1) \\ 1 & , \ \textit{para } x = 1 \end{cases}. \tag{4.33}$$

*mas a convergência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **NÃO** converge uniformemente para a função $\underline{f}$, no conjunto $A \doteq [0\,,1]$.*

Resolução:

Como vimos no Exemplo (4.2.1) item 2. (veja (4.10)), que

$$f_n \overset{p}{\to} f\,, \quad \text{em} \quad A = [0\,,1]\,,$$

porém a convergência **NÃO** será uniforme em $[0\,,1]$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que a convergência seja uniforme em $A = [0\,,1]$, isto é,

$$f_n \overset{u}{\to} f\,, \quad \text{em} \quad A = [0\,,1]\,.$$

Consideremos

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\,. \tag{4.34}$$

Então, deveria existir $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_o\,, \qquad \text{deveríamos ter} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{3}\,, \qquad \text{para todo} \quad x \in A = [0\,,1]\,. \tag{4.35}$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_o \in [0\,,1)$, de modo que

$$x_o \in (\,\underbrace{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}_{\overset{(4.34)}{=}\frac{1}{3^{\frac{1}{n}}}}\,,1)\,, \tag{4.36}$$

pois

$$\frac{1}{3^{\frac{1}{n}}} < 1\,.$$

Assim, para

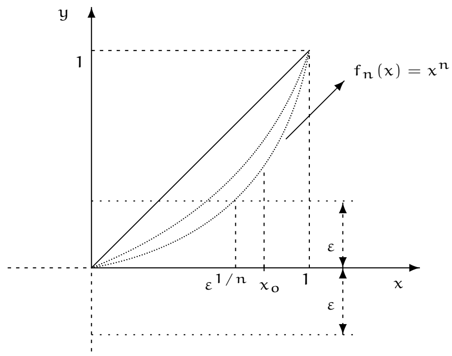
$$x_o \in \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{n}}}\,,1\right)\,, \tag{4.37}$$

teremos

$$\begin{aligned}
|f_n(x_o) - f(x_o)| &\overset{(4.32)}{=} |{x_o}^n - 0| \\
&\overset{x_o \geq 0}{=} {x_o}^n \overset{(4.37)}{>} \left(\frac{1}{3^n}\right)^n \\
&= \frac{1}{3} \overset{(4.34)}{=} \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Portanto, a convergência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** poderá ser uniforme, no conjunto em $A = [0\,,1]$.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Mais adiante veremos novamente, usando outro procedimento, que esta convergência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, do Exemplo (4.3.3) acima, não poderá ser uniforme em $[0\,,1]$.

□

Deixaremos como exercício para o leitor o:

Exercício 4.3.1 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x^2 + n\,x}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.38}$$

e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) \doteq x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

No Exemplo (4.2.1) item 3. (veja (4.11)) vimos que

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}\,,$$

onde função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

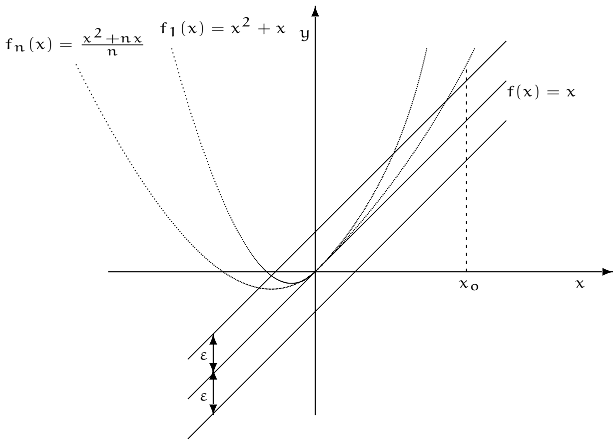
$$f(x) \doteq x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.39}$$

Mostre que a convergência sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** *é uniformemente em* $\mathbb{R}$.

Resolução:

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Temos também o: □

Exercício 4.3.2 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{1}{n}\,\text{sen}(n\,x + n)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.40}$$

Mostre que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \textit{em} \quad A \doteq \mathbb{R}\,, \tag{4.41}$$

isto é, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$, *no conjunto* $A \doteq \mathbb{R}$, *onde a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$f(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.42}$$

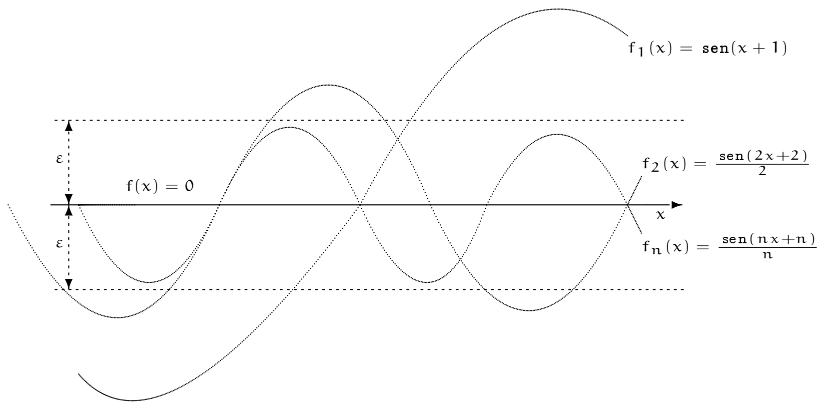
Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação do fato acima.

Sugestão: para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\left|\frac{1}{n}\,\text{sen}(n\,x + n)\right| \leq \frac{1}{n}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



□

Temos também o:

Exercício 4.3.3 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é dada pela representação geométrica do seu gráfico, como na figura abaixo e a função* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0 & , \text{ para } x \in (0, \infty) \\ 1 & , \text{ para } x = 0 \end{cases} , \quad \text{para cada} \quad x \in [0, \infty) . \tag{4.43}$$

Mostre que

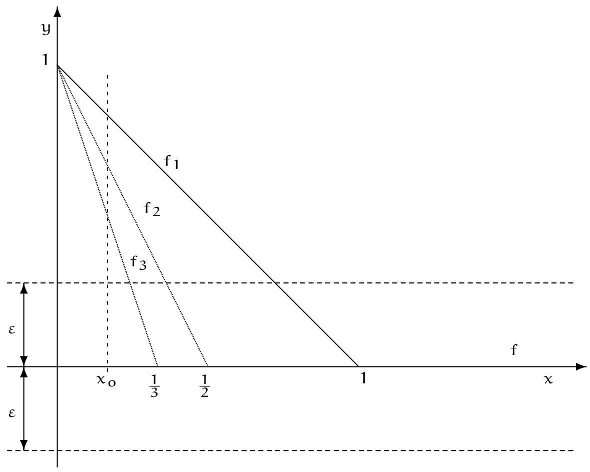
$$f_n \xrightarrow{p} f , \quad \text{em} \quad A \doteq [0, \infty) , \tag{4.44}$$

mas a convergência **não** *é uniforme em* $A = [0, \infty)$, *ou seja, a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente para a função* $\underline{f}$, *em* $A = [0, \infty)$, *mas* **não** *é uniformemente em* $A = [0, \infty)$.

Resolução:

Deixaremos a verificação deste fato a cargo do leitor.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



□

Podemos tratar do:

Exercício 4.3.4 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por:*

$$f_n(x) \doteq \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}|x| & , \text{ para } x \in (-n, n) \\ 0 & , \text{ para } x \in (-\infty, n] \cup [n, \infty) \end{cases} , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.45}$$

e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq 1 , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} . \tag{4.46}$$

Mostre que

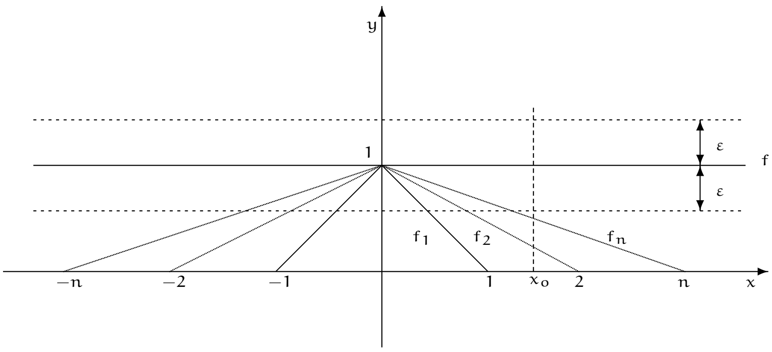
$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad em \quad A \doteq \mathbb{R}\,, \tag{4.47}$$

mas a convergência **não** *é uniforme em* $A = \mathbb{R}$, *ou seja, a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente para a função* $\underline{f}$, *em* $A = \mathbb{R}$, *mas* **não** *é uniformemente em* $A = \mathbb{R}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Para finalizar temos o:

□

Exemplo 4.3.4 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f_n : (0\,,1] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{1}{n\,x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0\,,1] \tag{4.48}$$

e a função $f : (0\,,1] \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$f(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,. \tag{4.49}$$

Mostre que

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \ \textit{em}\ A \doteq [0\,,1)\,, \tag{4.50}$$

mas a convergência **não** *é uniforme em* $A = [0\,,1)$, *ou seja, a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente para a função* $\underline{f}$, *em* $A = [0\,,1)$, *mas* **não** *é uniformemente em* $A = [0\,,1)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação da convergência pontual, ou seja, (4.50).

Suponhamos, por absurdo, que a convergência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fosse uniforme em $A = [0\,,1)$.

Deste dado, dado

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{2} > 0\,, \tag{4.51}$$

deveríamos poder encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

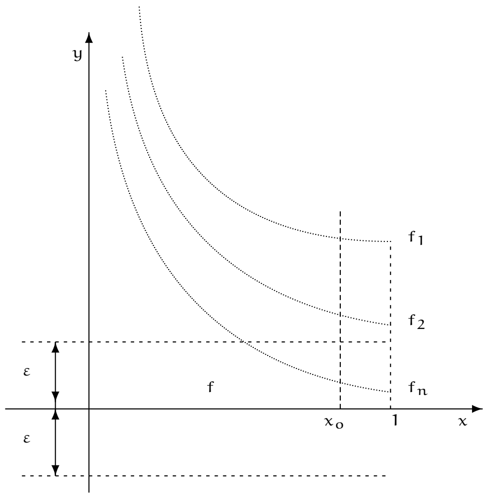
$$
\begin{aligned}
\text{se} \quad & n \geq N_o\,,\\
\text{deveríamos ter:} \quad & |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \overset{(4.51)}{=} \frac{1}{2}\,, \quad \text{para todo} \quad x \in A = (0\,,1]\,,\\
\text{isto é (de (4.48) e (4.49)),} \quad & \left|\frac{1}{n\,x} - 0\right| < \frac{1}{2}\,, \quad \text{para todo} \quad x \in A = (0\,,1]\,,\\
\text{em particular, vale para } n = N_o\text{:} \quad & \left|\frac{1}{N_o\,x}\right| < \frac{1}{2}\,, \quad \text{para todo } x \in A = (0\,,1]\,,\\
\text{como } x > 0 \text{ e } N_o \in \mathbb{N}\text{, é o mesmo que:} \quad & 0 < \frac{1}{x} < \frac{N_o}{2}\,, \quad \text{para todo} \quad x \in A = (0\,,1]\,, \quad (4.52)
\end{aligned}
$$

o que é um absurdo, pois

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty\,.$$

Logo não existe tal $N_o \in \mathbb{N}$, isto é, a convergência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ser uniforme em $A = (0\,,1]$.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



□

4.4 Sequências de Funções de Cauchy

Em analogia com sequências numéricas temos a noção de sequências de Cauchy para sequências de funções, a saber:

Definição 4.4.1 *Diremos que uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma* **<u>sequência de Cauhy</u>** *em $A \subseteq \mathbb{R}$, se dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar*

$$N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,, \tag{4.53}$$

de modo que

$$\textit{se} \quad n\,, m \geq N_o\,, \qquad \textit{teremos} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,, \qquad \textit{para todo} \quad x \in A\,. \tag{4.54}$$

Temos o:

Exemplo 4.4.1 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.55}$$

Mostre que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de funções de Cauchy, em* $\mathbb{R}$.

Resolução:

Notemos que, dado $\varepsilon > 0$, se considerarmos $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$N_o > \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.56}$$

para

$$n\,, m \geq N_o\,, \tag{4.57}$$

segue que

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\overset{(4.55)}{=} \left|\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n} - \frac{\operatorname{sen}(m\,x)}{m}\right| \\
&\leq \underbrace{\left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right|}_{=\frac{|\operatorname{sen}(n\,x)|}{n} \overset{|\operatorname{sen}(n\,x)|\leq 1}{\leq} \frac{1}{n}} + \underbrace{\left|\frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}\right|}_{=\frac{|\operatorname{sen}(m\,x)|}{m} \overset{|\operatorname{sen}(m\,x)|\leq 1}{\leq} \frac{1}{m}} \\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\
&\overset{(4.57)}{\leq} \frac{1}{N_o} + \frac{1}{N_o} \\
&\overset{(4.56)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição (4.4.1), que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções de Cauchy em $\mathbb{R}$.

□

Um resultado importante que relaciona a noção de convergência uniforme de uma sequência de funções, em um conjunto, com a noção de sequência de funções ser uma sequência de funções Caunhy, no mesmo conjunto, é dado pelo seguinte:

Teorema 4.4.1 *(Critério de Cauchy para a convergência uniforme de uma sequência de funções) Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente no conjunto* $\underline{A}$ *se, e somente se, a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for uma sequência de Cauchy no conjunto* $\underline{A}$.

Demonstração:

Suponhamos que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad A\,.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo

$$\text{se} \quad n \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad x \in A\,. \tag{4.58}$$

Logo para

$$n\,, m \geq N_o\,, \tag{4.59}$$

segue que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |[f_n(x) - f(x)] + [f(x) - f_m(x)]| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ &\overset{(4.59)\text{ e }(4.58)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{4.60}$$

para todo $x \in A$, mostrando que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no conjunto $\underline{A}$.

Por outro lado, se sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no conjunto $\underline{A}$, então para cada $x \in A$, a sequência numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Logo, do Teorema (2.7.2), a sequência numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$, isto é, para cada $x \in A$, $f_n(x) \to f(x)$, ou seja,

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \text{em} \quad A\,. \tag{4.61}$$

Precisamos mostrar que a convergência acima (que é pontual) é uniforme no conjunto $\underline{A}$.

Como a sequência de funções $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia de Cauchy no conjunto $\underline{A}$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontra $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n, m \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in A\,. \tag{4.62}$$

Passando-se o limite em (4.62), quando $m \to \infty$, obteremos

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in A,$$

ou seja,

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \text{ em } \ A\,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 4.4.2 *Mostre que a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *do Exemplo* (4.4.1)*, converge uniformemente para a função* $\underline{f}$*, onde a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.63}$$

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{(4.55)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n} \overset{|\operatorname{sen}(n\,x)|\leq 1 \text{ e } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}{=} 0$$

ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

Como vimos no Exemplo (4.4.1), a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções de Cauchy, em $\mathbb{R}$.

Logo, do Teorema (4.4.1) segue que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

□

4.5 Propriedades da Convergência Uniforme de Sequências de Funções

A seguir daremos algumas aplicações importantes da convergência uniforme de sequências de funções.

Começaremos observando que, no Exemplo (4.4.2) acima (e o Exemplo (4.4.1)), temos que

$$f_n \overset{u}{\to} f\,, \quad \text{em } A\,,$$

as funções $\underline{f_n}$ são contínuas em $\mathbb{R}$ (veja (4.55)) e a função $\underline{f}$, também é contínua em $\mathbb{R}$ (veja (4.63)).

Isto ocorre em geral, como afirma o resultado a seguir:

Teorema 4.5.1 *Suponhamos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja uma sequência de funções onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, temos que a função* $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua no conjunto* $\underline{A}$ *e que a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* $\underline{f}$*, no conjunto* $\underline{A}$*.*

Então a função $\underline{f}$ *será contínua no conjunto* $\underline{A}$*.*

Isto é, para cada $x_o \in A$*, temos*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o) \tag{4.64}$$

ou ainda:

$$\lim_{x\to x_o}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to x_o} f_n(x)\right]\,, \quad \textit{para cada} \quad x_o \in A\,. \tag{4.65}$$

Demonstração:

Precisamos mostrar que a função $\underline{f}$ é contínua para cada $x_o \in A$.

Faremos a demonstração quando

$$x_o \in \overset{\circ}{A}\ .$$

Para o caso do ponto x_o pertencer à fronteira do conjunto $\underline{A}$, fazemos algumas adaptações do processo abaixo para mostrar a conclusão.

Deixaremos os detalhes deste caso como exercício para o leitor.

Dado $\varepsilon > 0$, do fato que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad A\,,$$

segue que podemos encontrar

$$N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,,$$

de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o\,, \tag{4.66}$$

$$\text{teremos} \quad |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo} \quad y \in A\,,$$

$$\text{em particular,} \quad |f_{N_o}(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo} \quad y \in A\,. \tag{4.67}$$

Como, por hipótese, a função $\underline{f_{N_o}}$ é contínua em $\underline{x_o}$, podemos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$\text{se} \quad |x - x_o| < \delta\,, \quad \text{segue que} \quad |f_{N_o}(x) - f_{N_o}(x_o)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{4.68}$$

Assim, se

$$|x - x_o| < \delta\,, \tag{4.69}$$

teremos:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_o)| &= |f(x) - f_{N_o}(x) + f_{N_o}(x) - f_{N_o}(x_o) + f_{N_o}(x_o) - f(x_o)| \\
&\overset{\text{des. triagular}}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_{N_o}(x)|}_{\overset{(4.66)\text{ e }(4.67)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{N_o}(x) - f_{N_o}(x_o)|}_{\overset{(4.69)\text{ e }(4.68)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{N_o}(x_o) - f(x_o)|}_{\overset{(4.66)\text{ e }(4.67)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o),$$

isto é, a função $\underline{f}$ é contínua em $x_o \in A$.

A identidade (4.64) pode ser obtida da seguinte maneira: se $x_o \in A$, teremos:

$$\lim_{x \to x_o} \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right] \overset{f_n \overset{u}{\to} f}{=} \lim_{x \to x_o} f(x)$$

$$\overset{f \text{ é contínua em } \underline{x_o}}{=} f(x_o)$$

$$\overset{f_n \overset{u}{\to} f}{=} \lim_{n \to \infty} f_n(x_o)$$

$$\overset{f_n \text{ é contínua em } \underline{x_o}}{=} \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to x_o} f_n(x) \right],$$

obtendo a identidade (4.64) e completando a demonstração do resultado.

□

Uma outra aplicação importante da convergência uniforme de sequência de funções é dado pelo:

Teorema 4.5.2 *Consideremos a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n : [a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$ seja contínua em $[a\,,b]$ e que que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\underline{f}$, no conjunto $[a\,,b]$.*

Então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\,, \tag{4.70}$$

ou seja,

$$\int_a^b \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right] dx = \lim_{n \to \infty} \left[\int_a^b f_n(x)\, dx \right]. \tag{4.71}$$

Demonstração:

Como sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\underline{f}$, no conjunto $[a\,,b]$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é contínuas em $[a\,,b]$ segue, do Teorema (4.5.1) acima, que a função $\underline{f}$ será contínua em $[a\,,b]$.

Logo, por um resultado do Cálculo 1, segue que a função $\underline{f}$ será integrável em $[a\,,b]$.

Como

$$f_n \overset{u}{\to} f\,, \quad \text{em} \quad [a\,,b]\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar$N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}\,, \quad \text{para todo} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{4.72}$$

Logo, para

$$n \geq N_o\,, \tag{4.73}$$

teremos:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right|$$
$$\overset{\text{propriedades da integral de Riemann}}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$
$$\overset{(4.73)\text{ e }(4.72)}{\leq} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon\,,$$

isto é, a sequência numérica $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\int_a^b f(x)\,dx$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right] = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

isto é, vale (4.70).

A identidade (4.71) pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]\,dx \overset{f_n \overset{u}{\to} f}{=} \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\overset{(4.70)}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]\,,$$

obtendo a identidade (4.71) e completando a demonstração do resultado.

□

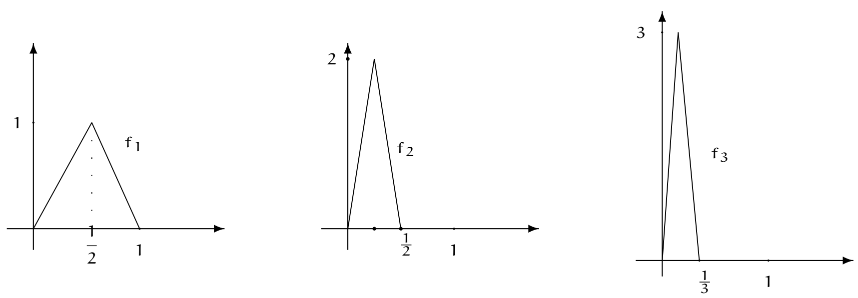
Observação 4.5.1

1. *O Teorema (4.5.2) acima nos dá* <u>**condições suficientes**</u>*, para podermos trocar um limite em* <u>n</u>*, com uma integral definida (que é o que diz a identidade (4.71)).*

2. *Podemos provar um resultado análogo ao acima substituindo-se a hipótese de continuidade dos termos da sequência de funções, por integrabilidade e limitação uniforme das mesmas.*

3. *A conclusão do resultado pode* <u>**não**</u> *ser verdadeira se retirarmos a hipótese da convergência ser uniforme da sequência de funções, como mostra o exemplo a seguir:*

   Consideremos a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ é dada por sua representação geométrica, como na figura abaixo.



Observemos que

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad em \quad [0\,,1]\,,$$

onde a função $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0,1]\,, \tag{4.74}$$

mas **não** *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$*, no conjunto* $[0\,,1]$*.*

De fato, pois

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0\,, \tag{4.75}$$

mas, para cada $n \in \mathbb{N}$*, temos que*

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\,, \tag{4.76}$$

pois a área da região delimitada pelo gráfico das funções, não-negativa, $\underline{f_n}$ *será igual a* $\frac{1}{2}$ *(veja as figuras acima).*

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \overset{(4.76)}{=} \frac{1}{2} \neq 0 \overset{(4.75)}{=} \int_0^1 f(x)\,dx\,,$$

mostrando, pelo Teorema (4.5.2), que a sequência de funções $(f_n)_{N\in\mathbb{N}}$ *não poderá convergir uniformente para a função* $\underline{f}$*, no conjunto* $[0\,,1]$*.*

Observação 4.5.2

Tendo em vista os Teoremas (4.5.1) e (4.5.2) exibidos acima, podemos pensar se algo semelhante poderá ocorrer para a diferenciação de sequências de funções.

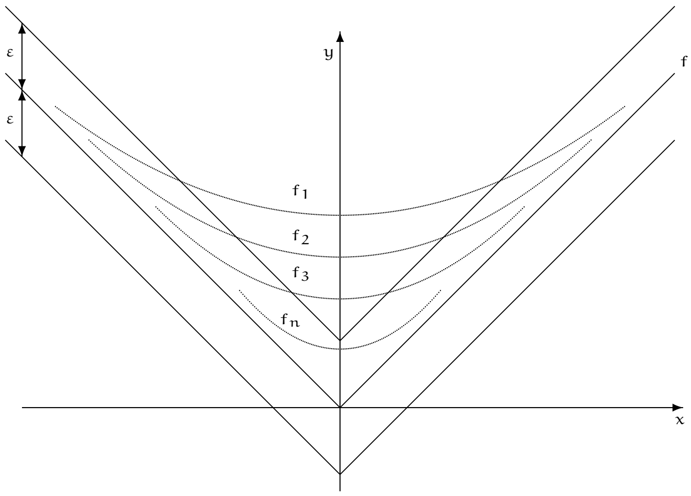
Isto é: se uma uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* $f : (a\,,b) \to \mathbb{R}$*, em* $(a\,,b)$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, a função* $f_n : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $x_o \in (a\,,b)$ *implcará que a função* $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\underline{x_o}$ *e valerá a identidade*

$$f\,' = \lim_{n\to\infty} f_n{}' \;?$$

Infelizmente isto **não** *é verdade em geral, como mostram os exemplos abaixo.*

Exemplo 4.5.1 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, cujas representações geométricas dos gráficos dos seus termos são dadas pelos seus gráficos abaixo, definidas em* $\mathbb{R}$ *e a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq |x|\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$



Mostre que

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad em \quad \mathbb{R},$$

par cada $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *é diferenciáveis em* $x = 0$, *mas a função* $\underline{f}$ **não** *é diferenciável em* $x = 0$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a função $\underline{f_n}$ é diferenciável em $x = 0$ (a representação geométrica do gráfico de $\underline{f_n}$ não tem "bicos"), mas a função $\underline{f}$ **não** é diferenciável em $x = 0$ (visto no Cálculo 1).

□

Exemplo 4.5.2 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(n^2 x\right), \quad para\ cada \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.77}$$

e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) \doteq 0, \quad para\ cada \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.78}$$

Mostre que

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad em \quad \mathbb{R},$$

par cada $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *é diferenciáveis em* $\mathbb{R}$, *a função* $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *mas* **não** *vale a identidade*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad para\ cada \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>**Resolução:**</u>

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}\,.$$

Notemos também que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f\,'(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.79}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ temos

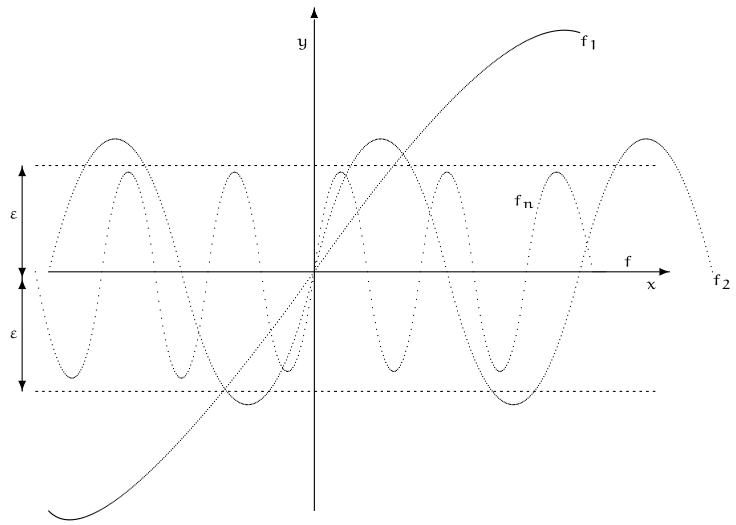
$$f_n{}'(x) \overset{(4.77)}{=} n\cos(n^2\,x)$$

e assim, o limite

$$\lim_{n\to\infty} f_n{}'(x) = \lim_{n\to\infty} n\cos(n^2\,x)$$

nem sempre existirá, por exemplo, ele não existe se $x = 0$.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



□

Para resolver este problema temos o:

Teorema 4.5.3 *Suponhamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de funções continuamente diferenciáveis em $[a\,,b]$ tal que, para algum $x_o \in [a, b]$, a sequência numérica $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Se a sequência de funções $(f_n{}')$ converge uniformemente para alguma função $\underline{g}$, em $[a, b]$, então a sequência de funções (f_n) será uniformemente convegente para uma função $\underline{f}$, em $[a\,,b]$, onde a função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ será continuamente diferenciável em $[a\,,b]$ e

$$f\,'(x) = g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{4.80}$$

isto é:

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n\right]'(x) = \lim_{n\to\infty} [f_n{}'(x)]\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{4.81}$$

Demonstração:

Como

$$f_n{}' \xrightarrow{u} g\,, \quad \text{em} \quad [a,b]$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é contínua em $[a\,,b]$ segue, do Teorema (4.5.1), temos que a função $\underline{g}$ será contínua em $[a\,,b]$.

Como a sequência numérica $(f_n(x_o))$ converge para algum número real, que denotaremos por $c \in \mathbb{R}$ então, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f_n(x_o) - c| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.82}$$

Definamos a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq c + \int_{x_o}^{x} g(t)\,dt\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]. \tag{4.83}$$

Como a função $\underline{g}$ é contínua em $[a\,,b]$, segue (do Cálculo 1) que ela será uma função integrável em $[a\,,b]$, ou ainda, para cada $x \in [a\,,b]$, temos que existe a integral definida $\displaystyle\int_{x_o}^{x} g(t)$, ou seja, a função $\underline{f}$ está bem definida.

Do Teorema Fundamental do Cálculo (visto no Cálculo 1), segue que a função $\underline{f}$ será continuamente diferenciável em $[a\,,b]$ e, além disso,

$$f\,'(x) = g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a,b], \tag{4.84}$$

pois a função $\underline{g}$ é contínua em $[a\,,b]$.

Mostremos que

$$f_n \to f\,, \quad \text{uniformemente em} \quad [a\,,b]\,.$$

Para isto, notemos que , por hipótese,

$$f_n{}' \to g\,, \quad \text{uniformemente em} \quad [a\,,b]\,,$$

logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar

$$N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,,$$

de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_2\,, \quad \text{segue que} \quad |f_n{}'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,, \quad \text{para todo} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{4.85}$$

Logo, se

$$n \geq \max(N_1\,,N_2)\,, \tag{4.86}$$

segue que:

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\overset{(4.83)}{=} \left| f_n(x) - \left[c + \int_{x_o}^{x} g(t)\,dt \right] \right| \\
&\overset{\text{Teor. Fund. do Cálculo}}{=} \left| \left[f_n(x_o) + \int_{x_o}^{x} f_n{}'(t)\,dt \right] - c - \int_{x_o}^{x} g(t)\,dt \right| \\
&= \left| [f_n(x_o) - c] + \left[\int_{x_o}^{x} f_n{}'(t)\,dt - \int_{x_o}^{x} g(t)\,dt \right] \right| \\
&\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |f_n(x_o) - c| + \left| \int_{x_o}^{x} f_n{}'(t)\,dt - \int_{x_o}^{x} g(t)\,dt \right| \\
&\leq |f_n(x_o) - c| + \int_a^b |f_n{}'(t) - g(t)|\,dt \\
&\overset{n \geq N, N_2 \text{ logo, valerá (4.82) e (4.85)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}(b-a) = \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

mostrando que

$$f_n \to f\,, \quad \text{uniformemente em} \quad [a\,,b]$$

completando a demonstaração.

□

Observação 4.5.3 *Podemos provar um resultado análogo ao Teorema (4.5.3), trocando-se a hipótese da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser continuamente diferenciável em $[a\,,b]$, para ser diferenciáveis em $[a\,,b]$ e de modo que as derivadas sejam integráveis em $[a\,,b]$.*

Deixaremos a elaboração desta situação como exercício para o leitor.

Para finalizar o capítulo temos o:

Exemplo 4.5.3 *Consideremos a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^2}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,2\pi]\,. \tag{4.87}$$

Mostre que

$$f_n \to f\,, \quad \textit{uniformemente em} \quad [0\,,2\,\pi]\,, \tag{4.88}$$

onde a função $f : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável em $[0\,,2\,\pi]$ e

$$f(x) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,2\,\pi]\,.$$

Resolução:

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é continuamente diferenciável em $[0\,,2\,\pi]$ (na verdade ela pertence a $C^\infty([0\,,2\,\pi]\,;\mathbb{R})$).

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$,, temos que

$$f_n{}'(x) \overset{(4.87)}{=} \frac{\cos(n\,x)}{n}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, 2\,\pi]\,. \tag{4.89}$$

Se definirmos a função $g : [0\,, 2\,\pi] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) \doteq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,, 2\,\pi]\,, \tag{4.90}$$

utilizando o critério de Cauchy par sequências de funções (isto é, o Teorema (4.4.1)), podemos mostrar que

$$f_n{}' \xrightarrow{u} g\,, \quad \text{em} \quad [0\,, 2\,\pi]\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Como

$$f_n(0) \overset{(4.87)}{=} \frac{\text{sen}(n\,0)}{n^2} = 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

temos que a sequência numérica $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente (para zero).

Logo o Teorema (4.5.3) acima, segue que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad [0\,, 2\,\pi]\,,$$

e, além disso segue que

$$f'(x) = g(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,, 2\,\pi]\,,$$

assim a função $\underline{f}$ será constante em $[0\,, 2\,\pi]$.

Mas

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) \overset{(4.87)}{=} 0\,,$$

portanto $f(x) = 0$, para todo $x \in [0\,, 2\,\pi]$, completando a resolução.

$\square$

4.6 Exercícios

Capítulo 5

Séries de Funções

5.1 Séries de Funções

Começaremos introduzindo a:

Definição 5.1.1 *Dada uma sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *temos que a função* $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *podemos construir uma outra sequência de funções,* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $S_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$\begin{aligned} S_n(x) &\doteq f_1(x) + \cdots + f_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tal sequência de funções é denominada <u>**série de funções associada à sequência de funções** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u> *e indicada por* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *ou, por simplicade,* $\sum_{n} f_n$.

Observação 5.1.1

1. *Observemos que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *pode ser olhada como uma soma infinita de funções, isto é,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$$

2. *A sequência de funções* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(que é a serie de funções) também será denomindada de* <u>**sequência (de funções) das somas parciais**</u> *associada à série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

   Cada termo dessa sequência de funções (ou da série de funções) a saber, $\underline{S_n}$, *será dito* <u>**soma parcial de ordem** $\underline{n}$ **da série de funções** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.</u>

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *será dita* <u>**termo da serie de funções** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$</u> .

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 5.1.1 *Seja a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde para cada* $n \in \mathbb{N}$ *a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq x^n , \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \tag{5.2}$$

Encontre a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que série de funções, isto é, a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, terá como termos, as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
S_1(x) &\overset{(5.1)}{=} f_1(x) \\
&\overset{(5.2)}{=} x\,, \\
S_2(x) &\overset{(5.1)}{=} f_1(x) + f_2(x) \\
&\overset{(5.2)}{=} x + x^2\,, \\
S_3(x) &\overset{(5.1)}{=} f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \\
&\overset{(5.2)}{=} x + x^2 + x^3\,, \\
&\ \vdots \\
S_n(x) &\overset{(5.2)}{=} f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) \\
&\overset{(5.2)}{=} x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\,, \\
&\ \vdots\,,
\end{aligned}$$

para cada $x \in (-1\,,1)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= x + x^2 + x^3 + \cdots\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

□

Exemplo 5.1.2 *Seja a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.4}$$

Encontre a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Resolução:

Notemos que série de funções, isto é, a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, terá como termos, as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
S_1(x) &\overset{(5.1)}{=} f_1(x)\\
&\overset{(5.4)}{=} x\,,\\
S_2(x) &\overset{(5.1)}{=} f_1(x)+f_2(x)\\
&\overset{(5.4)}{=} x+\frac{x}{2}\,,\\
S_3(x) &\overset{(5.1)}{=} f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)\\
&\overset{(5.4)}{=} x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\,,\\
&\ \ \vdots,\\
S_n(x) &\overset{(5.1)}{=} f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)\\
&\overset{(5.4)}{=} x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\cdots+\frac{x}{n}\,,\\
&\ \ \vdots,
\end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}\\
&= x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\cdots\\
&= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\,. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.1.3 *Seja a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, *a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x^n}{n!}\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\,. \qquad (5.6)$$

Encontre a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Resolução:

Então a série de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ terá como termos:

$$
\begin{aligned}
S_o(x) &\overset{(5.1)}{=} f_o(x) \\
&\overset{(5.6)}{=}= 1\,, \\
S_1(x) &\overset{(5.1)}{=} f_o(x) + f_1(x) \\
&\overset{(5.6)}{=} 1 + x\,, \\
S_2(x) &\overset{(5.1)}{=} f_o(x) + f_1(x) + f_2(x) \\
&\overset{(5.6)}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,, \\
S_3(x) &\overset{(5.1)}{=} f_o(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \\
&\overset{(5.6)}{=} x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,, \\
&\vdots, \\
S_n(x) &\overset{(5.1)}{=} f_o(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) \\
&\overset{(5.6)}{=}= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,, \\
&\vdots,
\end{aligned}
$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

$\square$

Observação 5.1.2 *Para cada* $x_o \in A$ *a série* $(S_n(x_o))$ *será uma série numérica.*

Logo podemos verificar se esta série numérica é convergente ou não, como veremos na próxima seção.

5.2 Convergência Pontual de Séries de Funções

Lembremos que podemos estudar a convergência de uma sequências de funções de, pelo menos, dois modos diferentes, a saber:

convergência pontual e/ou convergência uniforme.

Como uma série de funções é uma sequência de funções "especial", podemos estudar sua convergência também desses dois sentidos.

Mais especificamente, temos:

Definição 5.2.1 *Considere a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *a função* $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge pontualmente para a função f, em A**, *se a sequência de funções* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente para* f *no conjunto* A, *isto é, se para cada* $x \in A$ *a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge para* $f(x)$, *em* $\mathbb{R}$.

Neste caso diremos que

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A \tag{5.8}$$

é a **soma da serie de funções** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *e denotaremos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \doteq f\,, \quad \textit{em} \quad A\,. \tag{5.9}$$

Observação 5.2.1 *Como no caso de séries numéricas, o símbolo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,,$$

denotará duas coisas diferentes, a saber: a série de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *isto é, a sequência das somas parciais associada à mesma e a função que é a sua soma, ou seja, o limite da sequência das somas parciais, caso exista.*

Consideremos os seguitnes exemplos:

Exemplo 5.2.1 *Seja a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\{0\}\cup\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, *a função* $f_n : [0\,,1) \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1)\,. \tag{5.10}$$

Mostre que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge pontualmente para a função* $f : [0\,,1) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{1-x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1)\,. \tag{5.11}$$

Resolução:

Notemos que, para cada $x_o \in [0\,,1)$ fixado, a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} {x_o}^n$$

é uma série geométrica de razão $x_o \in [0\,,1)$, portanto convergente (veja o Exemplo (3.3.5)).

Além disso, sabemos que, neste caso (veja o Exemplo (3.3.5))

$$\sum_{n=0}^{\infty} {x_o}^n = \frac{1}{1-x_o}, \quad \text{para cada} \quad x_o \in [0,1),$$

ou seja, a soma da série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ será a função

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1).$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1),$$

onde a convergência da séries de funções acima será pontual em $[0,1)$.

□

Observação 5.2.2 *A série de funções do Exemplo* (5.2.1) *acima* **não** *é pontualmente convergente em* $x = 1$.

De fato, pois a série geométrica não é convergente, se a razão for igual a $\underline{1}$ *(veja o Exemplo* (3.3.5)*).*

Exemplo 5.2.2 *Seja a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x}{n}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

Mostre que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *não converge pontualmente em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resolução:

Notemos que, se $x_o \neq 0$, temos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_o}{n}$$

não será convergente pois:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_o}{n} = x_o \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

e sabemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (série harmônica, veja o Exemplo (3.3.6)).

Logo a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$ só converge em $x = 0$.

□

Exemplo 5.2.3 *Consideremos a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x^n}{n!}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Mostre que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *é convergente pontualmente em* $\mathbb{R}$.

<u>**Resolução:**</u>

De fato, se $x_o \in [0, \infty)$ então definindo-se

$$a_n \doteq \frac{{x_o}^n}{n!}, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \tag{5.14}$$

teremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{(5.14)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{{x_o}^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{{x_o}^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_o}{n+1} = 0 < 1.$$

Logo, do critério da razão, por limites, para séries numéricas cujos termos são não-negativos (veja o item 1. do Teorema (3.5.5)), segue que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{x_o}^n}{n!}$$

será convergente, para cada $x_o \in [0, \infty)$.

Se $x_o \in \mathbb{R}$, a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{x_o}^n}{n!}$$

será absolutamente convergente.

De fato, pois

$$\left| \frac{{x_o}^n}{n!} \right| = \frac{|x_o|^n}{n!}, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Como $|x_o| \in [0, \infty)$, segue, da 1.a parte, que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_o|^n}{n!}$$

será convergente.

Mas se uma série numérica é absolutamente convergente ela será convergente (critério da convergência absoluta de séries numéricas, veja o Teorema (3.8.1)).

Portanto a série de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge pontualmente em $\mathbb{R}$.

□

Observação 5.2.3 *Veremos mais adiante que a soma dessa série de funções será a função* e^x*, isto é,*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.16}$$

em particular, fazendo $x = 1$*, obteremos*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{5.17}$$

5.3 Convergência Uniforme de Séries de Funções

Definição 5.3.1 *Diremos que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente** *para a função* $\underline{f}$*, no conjunto* $\underline{A}$*, se a sequência de funções* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$*, em* $\underline{A}$*.*

Observação 5.3.1 *Logo, das Definições (5.3.1) e (4.3.1), a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente para função a* $\underline{f}$*, no conjunto* $\underline{A}$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$*, de modo que*

$$\textit{se} \quad n \geq N_o, \quad \textit{deveremos ter} \quad |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad x \in A, \tag{5.18}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$*, a função* $S_n : A \to \mathbb{R}$*, é a soma parcial de ordem* $\underline{n}$ *associada à série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *(veja a (5.1))*

Antes de exibirmos mais alguns exemplos de convergência de séries de funções e daremos alguns resultados que serão úteis em várias situações.

O primeiro deles é consequência imediata dos resultados vistos sobre convergência uniforme de sequências de funções, a saber:

Corolário 5.3.1 *Suponhamos que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$*, onde para cada* $n \in \mathbb{N}$*, temos que* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$*, seja uniformemente convergente para a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, em* $[a, b]$*, isto é,* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *onde a convergência da séries de funções é uniforme em* $[a, b]$ *.*

1. *Se, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, a função* $\underline{f_n}$ *for contínua em* $[a, b]$*, então a função* $\underline{f}$ *será contínua em* $[a, b]$*, isto é,*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o), \tag{5.19}$$

ou ainda,

$$\lim_{x \to x_o} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \to x_o} f_n(x) \right]. \tag{5.20}$$

2. *Se, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *for contínuas em* $[a\,,b]$, *então*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \tag{5.21}$$

isto é,

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b f_n(t)\,dt\right], \tag{5.22}$$

ou ainda, a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, *pode ser integrada termo a termo em* $[a\,b]$.

3. *Se, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *é continuamente diferenciáveis em* $[a\,,b]$, *para algum* $x_o \in [a,b]$, *a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ *converge em* $\mathbb{R}$, *a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'$ *converge uniformemente para uma função* $g : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, *em* $[a\,,b]$, *então a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente para uma função* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, *em* $[a\,,b]$, *onde a função* $\underline{f}$ *será continuamente diferenciável em* $[a\,,b]$ *e*

$$f\,'(x) = g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{5.23}$$

isto é,

$$f\,'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x) \tag{5.24}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d\,f_n}{dx}(x)\right], \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{5.25}$$

ou seja, a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, *pode ser derivada termo a termo, e* $[a\,,b]$.

<u>Demonstração:</u>

<u>De 1.:</u>

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é contínua em $[a\,,b]$, temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $S_n : [a,\,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} S_n(x) &\doteq f_1(x) + \cdots + f_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \end{aligned}$$

também será uma função contínua em $[a\,,b]$ (pois é uma soma finita de funções contínuas).

Mas, por hipótese,, a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em $[a\,,b]$.

Logo, do Teorema (4.5.1), segue que a função $\underline{f}$ será contínua em $[a\,,b]$.

De 2.:

Da Definição (5.3.1), dizer que a série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$, em $[a\,,b]$, é o mesmo que dizer que a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$, em $[a\,,b]$.

Então segue, do Teorema (4.5.2), que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt \\
&= \int_a^b \lim_{k\to\infty} S_k(t)\,dt \\
&= \int_a^b \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\,dt \\
&\overset{\text{Teor (4.5.2)}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\,dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(t)\,dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (5.22).

De 3.:

Lembremos que, da Definição (5.2.1), dizer que a série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge em $x_o \in [a\,,b]$, é o mesmo que dizer que a sequência numérica $(S_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{R}$.

Além disso, por hipótese, temos que a série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {f_n}'$ converge uniformemente para a função $\underline{g}$, em $[a\,,b]$, ou seja, (da Definição (5.3.1)) temos que a sequência de funções $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{g}$, em $[aa,\,,b]$, pois

$$\begin{aligned}
{S_n}'(x) &= \frac{d\,S_n}{dx}(x) \\
&\overset{(5.1)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right] \\
&\overset{\text{soma finita}}{=} \sum_{k=1}^{n} {f_k}'(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,.
\end{aligned}$$

Logo, do Teorema (4.5.3), segue que a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função $\underline{f}$, em $[a\,,b]$ e, além disso,

$$f\,'(x) = g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

isto é,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

completando a demonstraçao do resultado.

□

Observação 5.3.2

1. *O Corolário (5.3.1) acima, trata de algumas consequências da convergência uniforme de séries de funções.*

   Sem a presença da convergência uniforme as conclusões do resultado podem **não** *ocorrer.*

2. *No item 2. do Corolário (5.3.1) acima, basta que as funções $\underline{f_n}$ e $\underline{f}$ sejam integráveis e uniformemente limitadas em $[a\,,b]$.*

   No item 3. basta que as funções f_n sejam diferenciáveis em $[a, b]$.

3. *As conclusões do Corolário (5.3.1) permanecem válidas para funções de várias variáveis reais, a valores reias (ou complexos).*

   Deixaremos a elaboração e demonstração deste como exercício para o leitor.

Um resultado extremamente importante, que nos dá condições suficientes para assegurar a convergência uniforme de séries de funções, é o:

Teorema 5.3.1 *(**critério de Weierstrass ou Teste M. de Weierstrass**) Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to R$.*

Suponhamos que exista uma sequência numérica $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$|f_n(x)| \leq M_n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,. \tag{5.26}$$

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ for convergente em $\mathbb{R}$, então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e absolutamente para uma função $f : A \to \mathbb{R}$, em $\underline{A}$.

Demonstração:

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge em $\mathbb{R}$, segue de (5.26) e do critério da comparação para séries numéricas cujos termos são não-negativos (veja o item i. do Teorema (3.5.2)), que para cada $x \in A$, a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

converge em $\mathbb{R}$.

Logo, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será absolutamente convergente para uma função $f : A \to \mathbb{R}$, no conjunto A, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,. \tag{5.27}$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definamos a função $S_N : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$S_N(x) \doteq \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,, \tag{5.28}$$

ou seja, a soma parcial de ordem $\underline{N}$ da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Notemos que, para cada $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &\overset{(5.27) \text{ e } (5.28)}{=} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\ &\overset{\text{"des. triagular"}}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\overset{(5.26)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n\,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, denotando-se sua soma por $\underline{M}$, do item 3. da Observação (3.3.1), teremos que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo se $N \geq N_o$, teremos

$$\left| M - \sum_{n=1}^{N} M_n \right| < \varepsilon\,. \tag{5.30}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left| M - \sum_{n=1}^{N} M_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} M_n - \sum_{n=1}^{N} M_n \right| \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \right| \\ &\overset{M_n \geq 0}{=} \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n\,, \end{aligned} \tag{5.31}$$

logo, de (5.30) e (5.31), segue que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon\,. \tag{5.32}$$

Assim, se $n \geq N_o$, segue que

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &\overset{(5.29)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \\ &\overset{(5.32)}{<} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$, que, pela Observação (5.3.1), é o mesmo que dizer que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$, no conjunto $\underline{A}$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.3.3 *Vale um resulado análogo ao acima para funções de várias variáveis reais, a valores reais (ou complexos).*

Deixaremos a elaboração e sua respectiva demonstração como exercício para o leitor.

A seguir aplicaremos os resultados acima, para estudar a convergência pontual e uniforme de algumas séries de funções.

Exemplo 5.3.1 *Consideremos a série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *onde, para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *a função* $f_n : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x^n}{2^n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.33}$$

Mostre que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente, em* $[-1\,,1]$, *para a função* $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{2}{2-x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-1\,,1]\,. \tag{5.34}$$

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que, para cada $x \in [-1\,,1]$ e $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\overset{(5.33)}{=} \left|\frac{x^n}{2^n}\right| \\ &= \frac{|x^n|}{2^n} \\ &= \frac{|x|^n}{2^n} \\ &\overset{x\in[-1\,,1]\ \text{isto é, } |x|\leq 1}{\leq} \frac{1}{2^n} \doteq M_n\,. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Notemos que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,, \quad \text{converge em } \mathbb{R}\,. \tag{5.36}$$

pois é uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{2} \in [0\,,1)$ (veja o Exemplo (3.3.5)).

Então , de (5.35), (5.36) e do critério de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1), considerando-se $M_n \doteq \dfrac{1}{2^n}$, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), segue que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e absolutamente, em $[-1\,,1]$, para uma função $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$.

Notemos que, neste caso, podemos obter a função $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ explicitamente.

Para isto, observemos que, para cada $x \in [-1\,,1]$, teremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) &\overset{(5.33)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&\overset{\text{série geométrica de razão } \frac{x}{2} \in [0\,,1) \text{ - veja Exemplo (3.3.5)}}{=} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \\
&= \frac{2}{2-x},
\end{aligned}$$

isto é, a soma da série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ será a função $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \frac{2}{2-x}, \quad \text{para cada} \quad x \in [-1\,,1]\,.$$

□

Observação 5.3.4

1. *Notemos que, no Exemplo (5.3.1) acima, mesmo que* **não** *conhecessemos a função soma da série* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, *poderíamos concluir que ela será uma função contínua em* $[-1\,,1]$.

   Para ver isto, basta notarmos que, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *é contínua em* $[-1\,,1]$ *(veja (5.33)) e a convergência da série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *é uniforme em* $[-1\,,1]$.

   Logo segue, do item 1. do Corolário (5.3.1), que a função $f \doteq \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *será contínua em* $[-1\,,1]$.

2. *Na verdade, no Exemplo (5.3.1) acima, mostraremos que a série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge para* $\underline{f}$, *pontualmente em* $x \in (-2\,,2)$, *e a convergência será uniforme em qualquer intervalo*

$$[a\,,b] \subseteq (-2\,,2)\,,$$

como veremos mais adiante.

Exemplo 5.3.2 *Seja* $a > 0$ *fixado e consideremos a série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *onde, para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *a função* $f_n : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x^n}{n!}, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-a, a]. \tag{5.37}$$

Mostre que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente, em* $[-a, a]$, *para uma função* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$.

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que, para cada $x \in [-a, a]$ e $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\overset{(5.37)}{=} \left|\frac{x^n}{n!}\right| \\ &= \frac{|x^n|}{n!} \\ &= \frac{|x|^n}{n!} \\ &\overset{x\in[-a,a]\text{, ou seja, } |x|\leq a)}{\leq} \frac{a^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Do Exemplo (5.2.3) (com $x = a$), segue que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \text{converge em } \mathbb{R}. \tag{5.39}$$

Então , de (5.38), (5.39) e do critério de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1), considerando-se $M_n \doteq \frac{a^n}{n!}$, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), segue que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e absolutamente, em $[-a, a]$, para uma função $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$.

□

Observação 5.3.5

1. *Notemos que, no Exemplo* (5.3.2) *acima, para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *é contínua em* $[-a, a]$ *(veja* (5.37)*) e a convergência da série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *é uniforme em* $[-a, a]$.

   Logo, do item 1. do Corolário (5.3.1), *segue que a função* $f \doteq \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *será contínua em* $[-a, a]$.

2. *Mostraremos que, no Exemplo (5.3.2) acima, a série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge, pontualmente em* $\mathbb{R}$*, para a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq e^x \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e, além disso,m a convergência será uniforme em qualquer intervalo

$$[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}\,,$$

como veremos mais adiante.

Exemplo 5.3.3 *Consideremos a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{3^n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.40}$$

Mostre que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente, em* $\mathbb{R}$*, para uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que é contínua em* $\mathbb{R}$*.*

Resolução:

Observemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\overset{(5.40)}{=} \left|\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{3^n}\right| \\ &= \frac{|\operatorname{sen}(n\,x)|}{3^n} \\ &\overset{|\operatorname{sen}(n\,x)|\le 1\,,\ \text{para } x\in\mathbb{R}}{\le} \frac{1}{3^n}\,. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Notemos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\,, \quad \text{converge em } \mathbb{R}\,. \tag{5.42}$$

pois é uma série geométrica de razão $\frac{1}{3} \in [0\,,1)$ (veja o Exemplo (3.3.5)).

Então , de (5.41), (5.42) e do critério de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1), considerando-se $M_n \doteq \frac{1}{3^n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), segue que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e absolutamente, em $\mathbb{R}$, para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é contínua em $\mathbb{R}$ (veja (5.40)) e a convergência da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniforme em $\mathbb{R}$.

Logo, do item 1. do Corolário (5.3.1), segue que a função $\underline{f}$ será contínua em $\mathbb{R}$.

□

Exemplo 5.3.4 *Consideremos a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^3}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.43}$$

Mostrar que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *pode ser derivada, termo a termo, em* $\mathbb{R}$*.*
Encontre uma expressão para $f\,'(x)$*, para cada* $x \in \mathbb{R}$*, onde*

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.44}$$

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ converge para $\underline{0}$, pois

$$f_n(0) \overset{(5.43)}{=} \frac{\operatorname{sen}(n\,0)}{n^3} = 0, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ (veja (5.43)) e, além disso, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} f_n{}'(x) &\overset{(5.43)}{=} \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^3}\right] \\ &\overset{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{\cos(n\,x)\,n}{n^3} \\ &= \frac{\cos(nx)}{n^2}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Por outro lado, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |f_n{}'(x)| &\overset{(5.45)}{=} \left|-\frac{\cos(n\,x)}{n^2}\right| \\ &= \frac{|\cos(n\,x)|}{n^2} \\ &\overset{(|\cos(n\,x)|\leq 1,\ \text{para } x\in\mathbb{R}}{\leq} \frac{1}{n^2}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Observemos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge em } \mathbb{R}, \tag{5.47}$$

pois é uma $\underline{p}$-série, com $p \doteq 2 \in (1\,\infty)$ (veja (3.203)).

Então , de (5.46), (5.47) e do critério de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1), considerando-se $M_n \doteq \frac{1}{n^2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), segue que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n{}'$ converge uniformemente, em $\mathbb{R}$, para uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Portanto, do item 3. do Corolário (5.3.1), segue que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$, em particular,

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.48}$$

e satisfaz

$$f' = g.$$

Isto é, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pode ser derivada termo a termo, em $\mathbb{R}$, ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &\overset{(5.48)}{=} \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n^3}\right) \\ &\overset{(5.25)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(n\,x)}{n^3}\right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\,nx)}{n^2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.3.5 *Calcule, se existir*

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^2} dx. \tag{5.49}$$

<u>**Resolução:**</u>

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a função $f_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_n(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]. \tag{5.50}$$

Afirmamos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformente convergente em $[0\,,1]$.

De fato, pois para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0\,,1]$, temos:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\overset{(5.50)}{=} \left|\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^2}\right| \\ &= \frac{|\operatorname{sen}(n\,x)|}{n^2} \\ &\overset{|\operatorname{sen}(n\,x)|\leq 1,\ \text{para}\ x\in[0\,,1]}{\leq} \frac{1}{n^2} \end{aligned} \tag{5.51}$$

Notemos que, a serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}\,, \tag{5.52}$$

pois é uma $\underline{p}$-série, com $p \doteq 2 \in (1\ \infty)$ (veja (3.203)).

Então , de (5.51), (5.52) e do critério de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1), considerando-se $M_n \doteq \dfrac{1}{n^2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), segue que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente, em $[0\,,1]$, para uma função $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, em particular, teremos

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{5.53}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é contínua em $[0\,,1]$ (veja (5.50)) segue do item 2. do Corolário (5.3.1), segue que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pode ser integrada, termo a termo, em $[0\,,1]$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &\overset{(5.53)}{=} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx \\
&\overset{(5.22)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \\
&\overset{(5.50)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[\frac{\text{sen}(n\,x)}{n^2}\,dx\right] \\
&\overset{\text{Teorema Fund. do Cálculo para cada } n \in \mathbb{N}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-\cos(n\,x)}{n^3}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n)}{n^3},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\,x)}{n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n)}{n^3}\,.$$

□

Exemplo 5.3.6 *Encontre, se existir, a função* $g : (-1\,,1) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) \doteq \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, t^{2\,n} dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \tag{5.54}$$

<u>**Resolução:**</u>

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : (-1\,,1) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_n(x) \doteq (-1)^n\, x^{2\,n}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \tag{5.55}$$

Pode-se mostrar (utilizando-se o teste M. de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1)) que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função $f : [-a\,, a] \to \mathbb{R}$, em $[-a\,, a]$ para todo $a \in [0\,, 1)$ fixado, em particular, teremos

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-a\,, a]\,, \tag{5.56}$$

para cada $a \in [0\,, 1)$ fixado.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, deste fato e do item 2. do Corolário (5.3.1), segue que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pode ser integrada, termo a termo, em qualquer intervalo contido no intervalo $[-a\,, a]$, ou seja, para cada $x \in (-1\,, 1)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,dt &\overset{(5.56)}{=} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt \\
&\overset{(5.22)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt \\
&\overset{(5.55)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^x (-1)^n\, t^{2n}\,dt\right] \\
&\overset{\text{Teorema Fund. do Cálculo para cada } n \in \mathbb{N}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{t=0}^{t=x}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,
\end{aligned}$$

ou ainda, para cada $x \in (-1\,, 1)$, teremos:

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,. \tag{5.57}$$

$\square$

Observação 5.3.6

1. *Observemos que, para cada* $t \in (-1\,, 1)$, *temos que:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-t^2\right)^n \\
&\overset{\textit{série geom. de razão } c \doteq -t^2 \in [0,1) \textit{ - veja } (3.30)}{=} \frac{-t^2}{1+t^2}\,.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Portanto, para cada $t \in (-1\,,1)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-t^2\right)^n \\
&\overset{(3.62)}{=} \frac{-t^2}{1+t^2} + 1 \\
&= \frac{(1+t^2) - t^2}{1+t^2} + 1 \\
&= \frac{1}{1+t^2} \,.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Logo, para cada $x \in (-1\,,1)$ *temos que*

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt &\overset{(5.59)}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\
&\overset{\text{visto no Cálculo 1}}{=} \operatorname{arctg}(x)\,,
\end{aligned} \tag{5.60}$$

isto é, para cada $x \in (-1\,,1)$, *teremos*

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}(x) &\overset{(5.60)}{=} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt \\
&\overset{(5.57)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$f(x) \doteq \operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \tag{5.61}$$

2. *Observemos que a função* $\underline{f}$ *definida* (5.61) *acima, é uma função ímpar, ou seja,*

$$f(-x) = -f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1)$$

e a série de funções em (5.61), *cuja soma é a função* $\underline{f}$, *só possui* **potências ímpares de** $\underline{x}$.

Como veremos, no próximo capítulo, isso ocorre em geral, isto é, se uma função for ímpar (respectivamente, par) e possuir uma representação em série de funções do tipo acima (que será denominada série de potências de $\underline{x}$*), então a série de funções (isto é, de potências de* $\underline{x}$*) só possuirá potências ímpares (respectivamente, pares), ou seja, os coeficientes das potências pares (respectivamente, ímpares) serão iguais a zero.*

3. *Notemos também que se pudermos fazer $x = 1$ em (5.61), obteremos:*

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg}(1) \\
&\overset{(5.61)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1},
\end{aligned}$$

como havíamos afirmado anteriormente (veja a Observação (3.6.3), ou ainda, (3.242)).

Exemplo 5.3.7 *Mostre que*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.62}$$

Resolução:

Para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ definamos a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.63}$$

Com isto, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n será continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$.
Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d f_n}{dx}(x) &\overset{(5.63)}{=} \frac{d}{dx}\left[\frac{x^n}{n!}\right] \\
&\overset{\text{Cálculo 1}}{=} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Fixando-se $a \in [0, \infty)$, para cada $x \in [-a, a]$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
|f_n{}'(x)| &\overset{(5.64)}{=} \left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right| \\
&= \frac{|x^{n-1}|}{(n-1)!} \\
&= \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\overset{x \in [-a, a], \text{ isto é, } |x| \leq a}{\leq} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Notemos que (veja o Exemplo (5.3.2), com $n = n - 1$) a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{converge em } \mathbb{R}. \tag{5.66}$$

Portanto, de (5.65), (5.66) e do teste M. de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1)), segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} {f_n}'$$

é uniformemente convergente em $[-a\,,a]$, para cada $a \in [0\,,\infty)$.

Como a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) \overset{(5.63)}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!}$$

converge (com soma igual a $\underline{1}$) segue, do item 3. do Corolário (5.3.1), que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformente, em $[-a\,,a]$, para uma função $f : [-a\,,a] \to \mathbb{R}$, ou seja

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-a\,,a]\,. \tag{5.67}$$

e poderá ser derivada, termo a termo, em $[-a\,,a]$, para cada $a \in [0\,,\infty)$, isto é, para $x \in [-a\,,a]$, temos que

$$\begin{aligned}
f\,'(x) &\overset{(5.67)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right] \\
&\overset{(5.25)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\,f_n}{dx}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{x^n}{n!}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\overset{m \doteq n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \\
&\overset{(5.63)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) \\
&\overset{(5.67)}{=} f(x)\,,
\end{aligned} \tag{5.68}$$

ou seja, a função $\underline{f}$, dada por

$$f(x) \doteq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-a\,,a]\,, \tag{5.69}$$

deve satisfazer a seguinte equação diferencial ordinária:

$$f\,'(x) = f(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in [-a\,,a]\,, \tag{5.70}$$

para cada $a \in [0\,,\infty)$.

Do Cálculo I, sabemos que uma função que satisfaz (5.70), deverá ser a função

$$f(x) \doteq c\, e^x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{5.71}$$

para algum $c \in \mathbb{R}$.
Notemos que

$$\begin{aligned}
c &\overset{(5.71)\ \text{com}\ x=0}{=} f(0) \\
&\overset{(5.70)\ \text{com}\ x=0}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1\,, \\
\text{logo, deveremos ter} \quad & c = 1\,, \\
\text{portanto, de (5.71), teremos:} \quad & f(x) = e^x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ou seja:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 5.3.7 *Em particular, fazendo* $x = 1$ *em* (5.62)*, obtemos*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

como havíamos afirmado anteriormente (veja a Observação (5.2.3) *, ou ainda,* (5.17)*).*

Tópicos adicionais, bem como outros exemplos e resultados podem ser encontrados na bibliografia mencionada no fim destas notas.

5.4 Exercícios

Até aqui para a 1.a Prova

Capítulo 6

Séries de Potências

Neste capítulo estudaremos uma classe especial de séries de funções, denominadas séries de potências.

As perguntas que serão respondidas aqui estarão relacionadas com os seguintes tópicos:

1. Quando podemos aproximar uma função "bem comportada" (por exemplo de classe C^∞) por um polinômio em algum intervalo $[a, b]$?

2. Como obter esse polinômio (seus coeficientes)?

Como veremos, a noção de "estar próximo de" estará intimamente ligada a noção de convergência de sequência (mais expecificamente, séries) de funções, tratada no capítulo anterior.

Começaremos com a introdução do objeto principal do estudo desse capítulo, a saber:

6.1 Definições

Definição 6.1.1 *Um série de funções do tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{6.1}$$

onde

$$a_n \in \mathbb{R}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0, 1, 2, \cdots\},$$

será denominada **série de potências de $\underline{x}$ (ou centrada em $x = 0$)** .

Mas geralmente, uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_o + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \cdots \tag{6.2}$$

onde

$$a_n \in \mathbb{R}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0, 1, 2, \cdots\},$$

será denominada **série de potênciasde $(x - c)$ (ou centrada em $x = c$)** .

Os números reais

$$a_n \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\,,1\,,2\,,\cdots\}\,,$$

serão ditos **coeficientes da série de potência**.

Observação 6.1.1 *Uma série de potências centrada em* $x = 0$*, respectivamente em* $x = c$*, é um caso particular de série de funções.*

De fato, basta considerar a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, a função* $f_n : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ *é dadas por*

$$f_n(x) \doteq a_n\, x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a\,,b)\,, \tag{6.3}$$

respectivamente

$$f_n(x) \doteq a_n\,(x-c)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a\,,b)\,. \tag{6.4}$$

A seguir exibiremos alguns exemplos de séries de potências:

Exemplo 6.1.1 *A série de funções*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.5}$$

é uma série de potências de $\underline{x}$ *(ou centrada em* $x = 0$*).*

Resolução:

De fato, a série de funções (6.5) pode ser colocada na forma (6.1), bastando, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definirmos o n-ésimo coeficiente da mesma, ou seja,

$$a_n \doteq \frac{1}{n!} \tag{6.6}$$

e assim

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \\ &\overset{(6.6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 6.1.2 *A série de funções*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.7}$$

é uma série de potências de $(x-1)$ *(ou centrada em* $x = 1$*).*

Resolução:

De fato, a série de funções (6.7) pode ser colocada na forma (6.1), bastando, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definirmos o n-ésimo coeficiente da mesma, ou seja,

$$a_{2n+1} \doteq 0 \quad \text{e} \quad a_{2n} \doteq \frac{1}{n+1}\,. \tag{6.8}$$

e assim

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}\,(x-1)^{2n} \\ &\overset{(6.8)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-1)^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

□

Exemplo 6.1.3 *A série de funções*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\,x)}{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.9}$$

não *é uma série de potências.*

Resolução:

A série de funções (6.9) não pode ser colocada na forma (6.1) ou (6.2).

Logo não será uma série de potências.

□

6.2 Convergência Pontual de Séries de Potências

A seguir passaremos a estudar a convergência das séries de potências.

Observação 6.2.1 *Observemos que uma série de potências de $\underline{x}$, isto é,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\,,$$

sempre converge (com soma igual a $\underline{a_o}$) quando $x = 0$.

De fato, pois

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n &= a_o + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \cdots \\ &= a_o\,.\end{aligned}$$

De modo análogo, uma série de potências de $(x-c)$, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n\,,$$

sempre converge (com soma igual a $\underline{a_o}$) quando $x = c$.

De fato, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (c-c)^n = a_o + a_1 (c-c) + a_2 (c-c)^2 + \cdots$$
$$= a_o\,.$$

Começaremos estudando as séries de potências de $\underline{x}$ (isto é, centradas em $x = 0$), ou seja, a série de funções (6.1).

Mais tarde trataremos do caso das séries de potências de $(x - c)$ (isto é centradas em $x = c$), ou seja, a série de funções (6.2).

Um primeiro resultado importante é o:

Teorema 6.2.1 *Sejam*

$$x_o\,,\ \ x_1 \neq 0 \tag{6.10}$$

e consideremos a séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,. \tag{6.11}$$

1. *Se a série numérica*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_o}^n \tag{6.12}$$
for convergente, então a série de potências (6.11) será absolutamente convergente para
$$x \in (-|x_o|\,, |x_o|)\,, \quad \textit{isto é, para} \quad |x| < |x_o|\,. \tag{6.13}$$

2. *Se a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_1}^n$ *for divergente, então a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *será divergente para*
$$(-\infty\,, |x_1|) \cup (|x_1|\,, \infty)\,, \quad \textit{isto é, para} \quad |x| > |x_1|\,. \tag{6.14}$$

Demonstração:

De 1.:

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_o}^n$ é convergente e $x_o \neq 0$.

Logo, do critério da divergência (veja o Teorema (3.4.2)) segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n\, {x_o}^n = 0\,.$$

Assim a sequência numérica $(a_n\, {x_o}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada, ou seja existe $M \in \mathbb{R}$, tal que

$$|a_n\, {x_o}^n| \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,. \tag{6.15}$$

Notemos que fixado

$$x \in (-|x_o|\,,|x_o|) \tag{6.16}$$

então, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} |a_n\, x^n| &\overset{x_o \neq 0}{=} |a_n\, {x_o}^n| \left|\frac{x^n}{{x_o}^n}\right| \\ &\leq M \left|\frac{x}{x_o}\right|^n \\ &= M\, r^n\,, \end{aligned} \tag{6.17}$$

onde

$$r \doteq \left|\frac{x}{x_o}\right| < 1\,, \tag{6.18}$$

pois

$$\begin{aligned} & x \in (-|x_o|\,,|x_o|)\,, \\ \text{logo} \quad & |x| < |x_o|\,, \\ \text{implicando que:} \quad & \underbrace{\frac{|x|}{|x_o|}}_{=|\frac{x}{x_o}|} < 1\,. \end{aligned}$$

Como $r \in [0\,,1)$, segue que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\, r^n = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad \text{converge em } \mathbb{R}\,,$$

pois é uma série geométrica de razão $r \in [0\,,1)$ (veja o Exemplo (3.3.5)).

Logo, do critério da comparação para séries numérica cujos termos são não-negativos (isto é, o item 1. do Teorema (3.5.2)) segue que para cada $x \in (-|x_o|\,,|x_o|)$, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n|$ será convergente.

Portanto a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ será absolutamente convergente para cada

$$x \in (-|x_o|\,,|x_o|)\,,$$

como queríamos demonstrar.

De 2.:

Sabemos que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_1}^n$$

é divergente.

Suponhamos, por absurdo, que exista

$$x_2 \in (-\infty\,,|x_1|) \cup (|x_1|\,,\infty)$$

de modo que série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, {x_2}^n$$

seja convergente.

Então do item 1. provado acima, segue que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$$

será convergente em $(-|x_2|\,,|x_2|)$, o que é um absurdo, pois como $x_2 \in (-\infty\,,|x_1|) \cup (|x_1|\,,\infty)$ segue que

$$x_1(-|x_2|\,,|x_2|)\,,$$

isto é a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, {x_1}^n$ seria convergente, o que contraira a hipótese que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, {x_1}^n$ é divergente.

Portanto a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$ será divergente em

$$(-\infty\,,|x_1|) \cup (|x_1|\,,\infty)\,,$$

completando a demonstração do resultado.

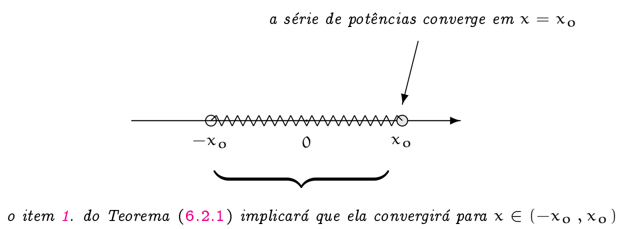
$\square$

Observação 6.2.2

1. *Para o caso que*

$$x_o > 0\,,$$

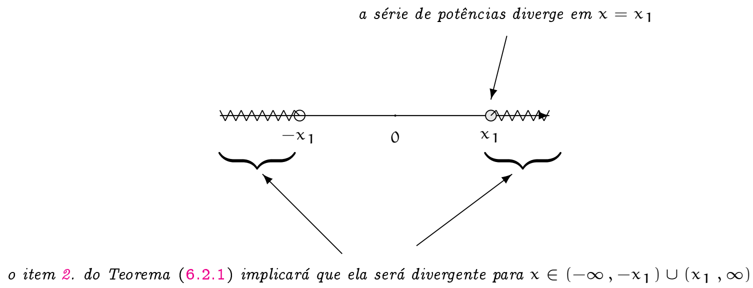
a figura abaixo ilustra a situação do item 1. do Teorema (6.2.1):



2. *Para o caso que*

$$x_1 > 0\,,$$

a figura abaixo ilustra a situação do item 2. do Teorema (6.2.1):



3. *O item 1. do Teorema (6.2.1) acima, nos diz que se uma série de potências converge num ponto (diferente de zero) então ela convergirá, pontualmente, em todo ponto do intervalo simétrico em relação a origem, aberto e de amplitutide igual ao valor absoluto do ponto onde ela converge.*

   Isso é uma propriedade intrínseca das séries de potências.

4. *Séries de funções em geral* **não** *vale a propriedade acima, como por exemplo, a série de funções (que* **não** *é uma série de potências)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\,x)$$

   só converge nos pontos

$$x = k\pi\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Aplique as ideias acima aos:

Exemplo 6.2.1 *Aplique o Teorema (6.2.1) acima, para estudar a convergência da série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,x^n \tag{6.19}$$

no intervalo $(-1\,,1)$.

Resolução:

Notemos que a série de potências (6.19) é convergente em

$$x_o = 1\,. \tag{6.20}$$

De fato, pois a série numérica

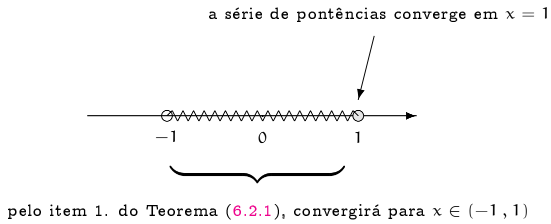
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,{x_o}^n \overset{(6.20)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

é convergente (veja o Exemplo (6.1.1) com $x = 1$).

Logo, do item 1. do Teorema (6.2.1) acima, segue que a série de potências (6.19) será absolutamente convergente para

$$x \in (-|x_o|\,, |x_o|) \overset{(6.20)}{=} (-1\,, 1)\,.$$

A figura abaixo ilustra a situação acima:



$\square$

Exemplo 6.2.2 *Aplique o Teorema (6.2.1) acima, para estudar a convergência da série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \tag{6.21}$$

no intervalo $(-a\,,a)$*, para cada* $a \in [0\,,1)$.

Resolução:

Notemos que para cada

$$a \in [0\,,1)\,, \tag{6.22}$$

a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ é convergente em $x_o = a$.

De fato pois,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n {x_o}^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)\, {x_o}^2\right]^n . \tag{6.23}$$

para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, temos que:

$$\left|(-1)\, {x_o}^2\right| = {x_o}^2 = \underbrace{a^2}_{\doteq r} \overset{(6.22)}{<} 1\,.$$

Mas série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão (veja o Exemplo (3.3.5))

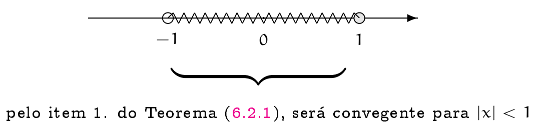
$$r = a^2 \overset{(6.22)}{\in} [0\,,1)\,.$$

Logo, do Teorema da comparação para séries numéricas cujos termos são não-negativos (isto é, do item i. do Teorema (3.5.2)) segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_o^{2n}$ será convergente.

Logo, do item 1. do Teorema (6.2.1) acima, segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ será absolutamente convergente para cada

$$x \in (-|x_o|\,,|x_o|) = (-a\,,a)\,, \quad \text{para todo } a \in [0\,,1), \text{ ou seja, para } \quad x \in (-1\,,1).$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



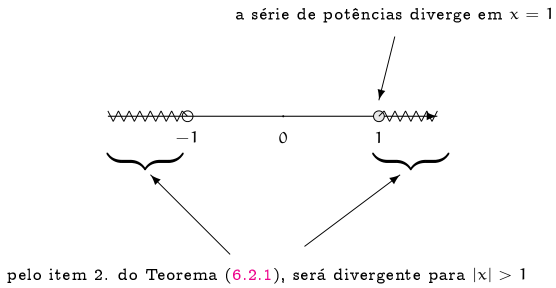
Por outro lado, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ é divergente em $x_1 = 1$.

De fato, pois a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ é divergente, pelo critério da divergência (veja o Teorema (3.4.2)).

Logo, o item 2. do Teorema (6.2.1), implicará que a série de potências (6.21) será divergente em

$$(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, \infty) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \quad \text{isto é, para} \quad |x| > 1\,.$$

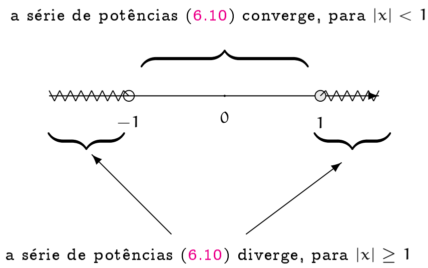
A figura abaixo ilustra a situação acima.



Para finalizar, notemos que a série de potências (6.21) é divergente em $x_1 = -1$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto, do ponto de vista da convergência/divergência, para a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, teremos a seguinte situação, ilustrada na figura abaixo:



□

Em geral temos a seguinte situação:

Teorema 6.2.2 *Dada a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.24}$$

uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:

1. *a série de potências (6.24) só converge em* $x = 0$*;*

2. *a série de potências (6.24) converge absolutamente em* $\mathbb{R}$*;*

3. *existe* $R > 0$*, de modo que a série de potências (6.24) é absolutamente*

$$\textit{convergente em} \quad (-R\,,R) \quad e \quad \textit{divergente em} \quad (-\infty\,,-R) \cup (R\,,\infty)\,, \tag{6.25}$$

ou ainda,

$$\textit{convergente para} \quad |x| < R \quad e \quad \textit{divergente para} \quad |x| > R\,. \tag{6.26}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Notemos que se o item 1. ocorrer, os itens 2. e 3. não ocorrerão.

Vamos supor que o item 1. não ocorre, ou seja existe $x_o \neq 0$ tal que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_o}^n$$

seja convergente.

Logo do item 1. do Teorema (6.2.1), segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ será convergirá absolutamente para

$$|x| < |x_o| \doteq r_o\,.$$

Denotemos por <u>S</u>, o subconjunto dos números reais, formado por todos os $r > 0$ que têm a propriedade acima, isto é, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ converge absolutamente em

$$|x| < r\,.$$

Observemos que o conjunto <u>S</u> é não vazio, pois

$$r_o \in S\,.$$

Se o conjunto <u>S</u> não for limitado então o item 3. ocorrerá, ou seja a série de potências (6.24) será convergente em $\mathbb{R}$.

Se o conjunto <u>S</u> for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, afirmamos que o item 2. ocorrerá.

De fato, so conjunto <u>S</u> for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, como ele é não vazio, então existe

$$R \doteq \sup S \in (0\,,\infty)\,.$$

Afirmamos que $R \in (0\,,\infty)$ satisfaz o item 3. .

De fato, seja

$$r \in S\,, \quad \text{tal que} \quad r \in (0\,,R)$$

e

$$x_o \in \mathbb{R}\,, \quad \text{tal que} \quad |x_o| < r\,.$$

Como

$$r \in S \quad \text{e} \quad |x_o| < r\,,$$

temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_o}^n$ será convergente.

Logo, do item 1. do Teorema (6.2.1), segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ será absolutamente convergente para $|x| < r$.

Como consequência teremos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ será absolutamente convergente para $|x| < R$.

Afirmamos que se

$$x_1 \in (-\infty\,, R) \cup (R\,, \infty) \quad \text{ou seja,} \quad |x_1| > R\,,$$

a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_1}^n$ será divergente.

De fato, suponhamos, por absurdo, que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_1}^n$ seja convergente.

Então, pelo item 1. do Teorema (6.2.1), teremos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ deverá ser convente para

$$x \in (-|x_1|\,, |x_1|)\,, \qquad \text{ou seja,} \quad |x_1| \in S\,,$$

o que é um absurdo pois

$$|x_1| > R = \sup S\,.$$

Portanto a série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ será diverge em

$$(-\infty\,, R) \cup (R\,, \infty)\,,$$

mostrando que $R \in (0\,, \infty)$ satisfaz o item 2., completando a demonstração do resultado

□

Observação 6.2.3

1. *O Teorema (6.2.2) acima nos diz que uma, e somente uma, das possibilidades abaixo, para uma série de potências*

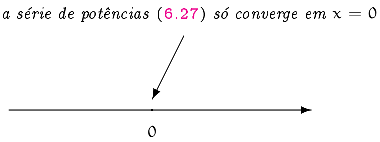
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \tag{6.27}$$

poderá ocorrer:

1.1 ou

$$R = 0\,; \tag{6.28}$$

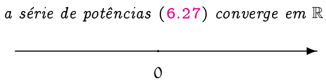
A figura abaixo ilustra essa situação:



1.2 ou

$$R = \infty ; \tag{6.29}$$

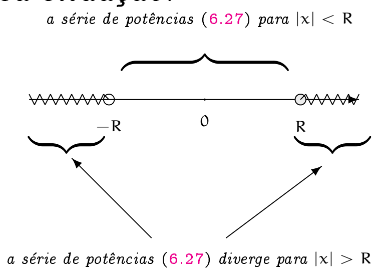
A figura abaixo ilustra essa situação:



1.3 ou

$$R \in (\, , \infty) \, . \tag{6.30}$$

A figura abaixo ilustra essa situação:



Neste último caso, podem ocorrer todo tipo de situação em relação a convergência da série de potências (6.27) nos pontos

$$x = -R \quad \text{e} \quad x = R \, ,$$

como veremos em exemplos a seguir.

2. O número real

$$R \in (0 \, , \infty) \, , \tag{6.31}$$

obtido no item 3. do Teorema (6.2.2) acima, terá uma importância muito grande no estudo das séries de potências, como veremos mais adiante.

Baseado nos fatos acima, podemos introduzir a seguinte:

Definição 6.2.1 *Definiremos* **raio de convergência da série de potências** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$ *como sendo* $R \in [0 \, , \infty]$*, obtido no Teorema (6.2.2) acima*

O conjunto formado por todos os $x \in \mathbb{R}$*, onde a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$ *é convergente será dito* **intervalo de convergência da série de potências** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$.

Observação 6.2.4

1. *Do Teorema* (6.2.2) *acima, segue que que toda série de potências tem um (único) raio de convergência e portanto um (único) intervalo de convergência.*

2. *O raio de convergência de uma série de potências pode ser igual a*

$$0\,, \quad \textit{isto é}, \quad R = 0$$

e portanto o intervalo de convergência da série de potências será

$$I = \{0\}\,,$$

ou seja, o conjunto formado por um ponto, que na verdade **não** *é um intervalo, como mostra o Exemplo* (6.2.3) *a seguir.*

3. *O raio de convergência associado a uma série de potências pode ser infinito, ou seja,*

$$R = \infty\,,$$

e assim o intervalo de convergência será

$$I = \mathbb{R}\,,$$

como mostra o Exemplo (6.2.4) *a seguir.*

4. *Se*

$$R \in (0\,, \infty)\,,$$

a priori, nenhuma conclusão podemos tirar sobre o comportamento da série de potência nos pontos

$$x = -R \quad e \quad x = R\,.$$

Podemos ter situações, como veremos, que a série de potências converge em um dos pontos e diverge no outro, ou diverge nos dois ou ainda converge nos dois.

Um desses casos é mostrado no Exemplo (6.2.5) *a seguir*

A seguir consideraremos alguns exemplos onde aplicaremos as ideias desenvolvidas acima.

Exemplo 6.2.3 *Consideremos a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n\,. \tag{6.32}$$

Mostre que

$$R = 0 \quad e \quad I = \{0\}\,. \tag{6.33}$$

Resolução:

Observemos que, para todo $x_o > 0$ fixado, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ é divergente.

De fato, para cada $x_o > 0$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (n^n {x_o}^n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} (n\, x_o) \\ &\overset{x_o>0}{=} \infty > 1\,. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Logo, do critério da raiz, por limites, para séries numérica cujos termos são não-negativos (isto é, o item 2. do Teorema (3.5.7)) segue quea série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n {x_o}^n$$

é divergente.

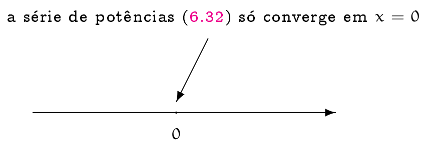
Assim, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ só converge quando $x = 0$, isto é,

$$R = 0$$

e assim, o intervalo de convergência da série de potências é

$$I = \{0\}\,.$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Exemplo 6.2.4 *Consideremos a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \tag{6.35}$$

Mostremos que

$$R = \infty \quad e \quad I = \mathbb{R}\,. \tag{6.36}$$

Resolução:

Observemos que para cada $x_o > 0$ fixado, temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{x_o}^n}{n!}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

De fato, pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{{x_o}^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{{x_o}^{n}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_o}{n+1}$$
$$= 0 < 1,$$

Logo, do critério da razão, por limites, para séries numérica cujos termos são não-negativos (isto é, o item 1. do Teorema (3.5.5)), segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{x_o}^{n}}{n!}$ é convergente para cada $x_o \in (0\,,\infty)$.

Assim, segue do item 1. do Teorema (6.2.1), segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$ converge em $\mathbb{R}$, isto é,

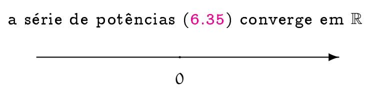
$$R = \infty\,,$$

e o intervalo de convergência da série de potências é

$$I = \mathbb{R}\,,$$

completando a resolução.

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Exemplo 6.2.5 *Consideremos a série de potências*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n\,. \tag{6.37}$$

Mostre que

$$R = 1 \quad e \quad I = (-1\,,1]\,. \tag{6.38}$$

Resolução:

Observemos que a série de potências (6.37), converge em

$$x_o = 1\,,$$

pois a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente (é a série harmônica alternada - veja o Exemplo (3.6.2)).

Logo, do item 1. do Teorema (6.2.1), segue que a série de potências converge em

$$(-1\,,1)\,.$$

Por outro lado, a série de potências (6.37), diverge em

$$x_1 = -1\,,$$

pois ela será igula a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é divergente (é a série harmônica - veja o Exemplo (2.7.2)).

Logo, do item 2. do Teorema (6.2.1), segue que a série de potências diverge em

$$(-\infty\,, -1) \cup (1\,, \infty)\,.$$

Com isto temos que o raio de convergência da série de potências (6.37) será

$$R = 1\,,$$

e o intervalo de convergência é

$$I = (-1, -1]\,,$$

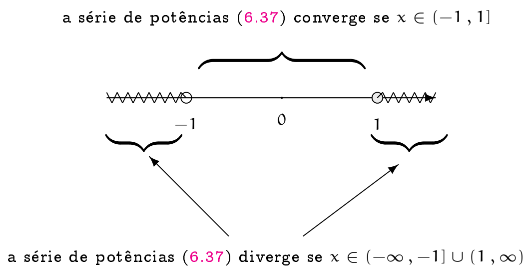
em particular, a série de potência converge (6.37) em

$$x = R = 1$$

e diverge em

$$x = -R = -1\,.$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Exemplo 6.2.6 *Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências abaixo.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \tag{6.39}$$

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que, se $x_o > 0$, temos que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, {x_o}^n$$

será divergente pois, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definido-se

$$A_n \doteq n!\, {x_o}^n \overset{x_o>0}{>} 0\,, \tag{6.40}$$

teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} &\overset{(6.40)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, {x_o}^{n+1}}{n!\, {x_o}^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1)\, x_o \\ &\overset{x_o>0}{=} \infty > 1\,. \end{aligned}$$

Logo, do critério da razão, por limites, para séries numérica cujos termos são não-negativos (isto é, o item 2. do Teorema (3.5.5)), segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, {x_o}^n$ é divergente, para cada $x_o > 0$.

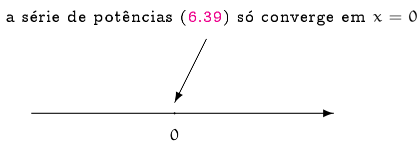
Portanto, do item 2. Teorema (6.2.1), segue que a série de potência só converge em $x = 0$, isto é, o raio de convergência é

$$R = 0$$

e o intervalo de convergência é

$$I = \{0\}\,.$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Exemplo 6.2.7 *Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências abaixo.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\, x^n\,. \tag{6.41}$$

Resolução:

Notemos que, se $x_o > 0$, temos que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\, {x_o}^n$$

será convergente pois, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definido-se

$$A_n \doteq \frac{n}{n!}\, {x_o}^n \overset{x_o>0}{>} 0\,, \tag{6.42}$$

teremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} \overset{(6.42)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+1}{(n+1)!}\, {x_o}^{n+1}}{\dfrac{n}{n!}\, {x_o}^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_o}{n} = 0 < 1\,.$$

Logo, do critério da razão segue que para todo $x_o > 0$ a serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\, {x_o}^n$ é convergente.

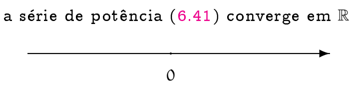
Portanto, do item 1. do Teorema (6.2.1), segue que a série de potência (6.41) converge em $\mathbb{R}$, isto é, o raio de convergência é

$$R = \infty$$

e o intervalo de convergência é

$$I = \mathbb{R}\,.$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Exemplo 6.2.8 *Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências abaixo.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, x^n \tag{6.43}$$

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que, se $x_o > 0$, temos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, {x_o}^n$$

será convergente pois, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definido-se

$$A_n \doteq \frac{1}{n^2}\, {x_o}^n \overset{x_o>0}{>} 0\,, \tag{6.44}$$

teremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} \overset{(6.44)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}\, x_o^{n+1}}{\dfrac{1}{n^2}\, x_o^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{(n+1)^2}\, x_o \right]$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} x_o\,.$$

Logo, para

$$x_o \in [0\,,1)\,,$$

do critério da razão, por limites, para séries numérica cujos termos são não-negativos (isto é, os itens 1. e 2. do Teorema (3.5.5)), segue que a serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, {x_o}^n$ será convergente e para

$$x_o \in (1\,,\infty)$$

será divergente.

Portanto, dos itens 1. e 2. do Teorema (6.2.1), segue que a série de potência (6.43) será convergente em

$$(-1\,,1)$$

e diverge em

$$(-\infty\,,-1) \cup (1\,,\infty)$$

isto é, o raio de convergência será

$$R = 1\,. \tag{6.45}$$

Para encontrarmos o intervalo de convergência, precisaremos estudar o que ocorrre com a série de potências (6.43) para $x = -1$ e para $x = 1$.

Notemos que em

$$x = -1$$

a série de potências (6.43) será a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,,$$

que é convergente pelo critério da série alternada (veja o Teorema (3.6.1)).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Observemos em

$$x = 1$$

a série de potências (6.43) será a série numérica

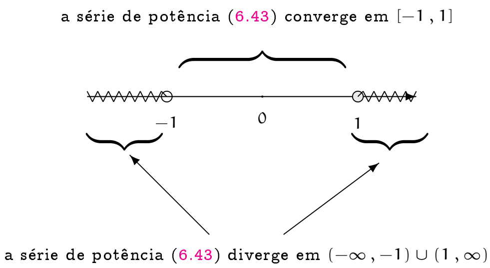
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

que é convergente, pois é uma $\underline{p}$-série, com $p = 2 \in (1\,,\infty)$ (veja o (3.203)).

Portanto o intervalo de convergência da série de potências (6.43) será

$$I = [-1\,,1]\,. \tag{6.46}$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

A seguir daremos um processo mais simples para encontrar o raio de convergência de uma série de potências dada, a saber:

Teorema 6.2.3 *Dada uma série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \tag{6.47}$$

consideremos

$$\rho \doteq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| , \tag{6.48}$$

quando existir.

Então:

1. *se*

$$\rho = 0 , \tag{6.49}$$

segue que o raio de convergência da série de potências (6.47) será

$$R = \infty . \tag{6.50}$$

2. *se*

$$\rho = \infty , \tag{6.51}$$

segue que o raio de convergência da série de potências (6.47) será

$$R = 0 . \tag{6.52}$$

3. *se*

$$\rho \in (0 , \infty) , \tag{6.53}$$

segue que o raio de convergência da série de potências (6.47) será

$$R = \frac{1}{\rho} . \tag{6.54}$$

Demonstração:

Fixemos $x_o \neq 0$ e apliquemos o critério da razão, por limites (isto é, os itens 1. e 2. do Teorema (3.5.5)) para a serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n {x_o}^n| .$$

Para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definamos

$$A_n \doteq |a_n\, x_o{}^n| \geq 0\,. \tag{6.55}$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} &\overset{(6.55)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}\, x_o{}^{n+1}|}{|a_n\, x_o{}^n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\, x_o\right| \\ &= |x_o| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\ &\overset{(6.48)}{=} |x_o|\,\rho\,. \end{aligned} \tag{6.56}$$

Logo, do critério da razão, por limites para séries numéricas cujos termos são não-negativos (isto é, os itens 1. e 2.do Teorema (3.5.5)), segue que se

$$\rho\,|x_o| < 1\,,$$

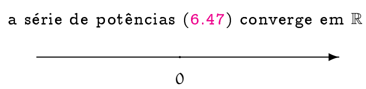
a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x_o{}^n|$ será convergente, e se

$$\rho\,|x_o| > 1\,,$$

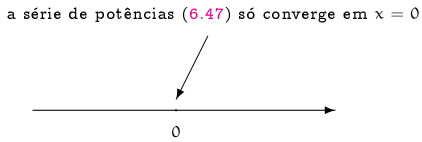
a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x_o{}^n|$ será divergente.

Baseado nisso temos:

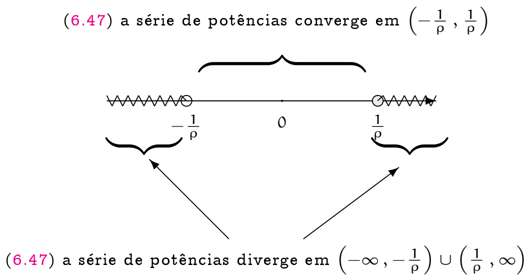
1. Se
$$\rho = 0\,, \qquad \text{teremos} \quad \rho|x_o| = 0 < 1\,.$$
Logo a série de potências (6.47) será convergente em $\mathbb{R}$, isto é, o raio de convergência da série de potências (6.47) será
$$R = \infty\,.$$
A figura abaixo ilustra a situação acima.



2. Se
$$\rho = \infty\,, \qquad \text{então para } x_o \neq 0, \text{ teremos} \quad \rho\,|x_o| = \infty > 1\,.$$
Logo a série de potências (6.47) será divergente, exceto quando $x_o = 0$, isto é, o raio de convergência da série de potências (6.47) será
$$R = 0\,.$$
A figura abaixo ilustra a situação acima.



3. Se
$$\rho \in (0\,,\infty)\,,\qquad \text{como} \qquad \rho\,|x_o| < 1$$
ou seja,
$$|x_o| < \frac{1}{\rho}\,,$$
a série de potências (6.47) será convergente e para
$$\rho\,|x_o| > 1\,,$$
ou seja,
$$|x_o| > \frac{1}{\rho}\,,$$
a série de potências (6.47) será divergente, isto é, o raio de convergência da série de potências é (6.47) será
$$R = \frac{1}{\rho}\,.$$
A figura abaixo ilustra a situação acima.



$\square$

Aplicaremos o resultado acima para os seguintes exemplos:

Exemplo 6.2.9 *Encontrar o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potência abaixo:*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,x^n\,. \tag{6.57}$$

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defininamos
$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,. \tag{6.58}$$

Com isto teremos:

$$\rho \overset{(6.48)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \overset{(6.58)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \overset{\text{Exercício}}{=} 1\,. \tag{6.59}$$

Logo, do item 1. do Teorema (6.2.3) acima, segue que o raio de convergência da série de potências (6.57) será

$$R = \frac{1}{\rho} \overset{(6.48)}{=} 1\,. \tag{6.60}$$

Portanto, do item 3. do Teorema (6.2.2), podemos garantir que a série de potências (6.57) convergente em $(-1\,,1)$ e divergente em $(-\infty\,,-1)\cup(1\,,\infty)$.

Para completar o estudo dessa série de potências (6.57), precisamos analizar o que ocorre nos pontos

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1\,.$$

Notemos que, em

$$x = 1\,,$$

a série de potências (6.57) será a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é divergente (pois é a série harmônica - veja o Exemplo (3.3.6)).

Por outro lado, em

$$x = -1\,,$$

a série de potências (6.57) será a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que é convergente (é a série harmônica alternada - veja o Exemplo (3.6.2)).

Portanto o intervalo de convergência da série de potências (6.57) é

$$I = [-1\,,1)\,. \tag{6.61}$$

□

Exemplo 6.2.10 *Encontrar o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potência abaixo:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, x^n\,. \tag{6.62}$$

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defininamos

$$a_n \doteq \frac{1}{n^2}\,. \tag{6.63}$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
\rho &\overset{(6.48)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\
&\overset{(6.63)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{1}{(n+1)^2}\right|}{\left|\dfrac{1}{n^2}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \overset{\text{Exercício}}{=} 1 \,.
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Logo, do item 3. do do Teorema (6.2.3) acima, segue que o raio de convergência da série de potências (6.62) será

$$R = \frac{1}{\rho} \overset{(6.48)}{=} 1 \,.$$

Portanto, do item 3. do Teorema (6.2.2), podemos garantir que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ converge e $(-1\,,1)$ e diverge em $(-\infty\,,-1) \cup (1\,,\infty)$.

Para completar o estudo dessa série de potências (6.62), precisamos analizar o que ocorre nos pontos

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1 \,.$$

Notemos que em

$$x = 1 \,,$$

a série de potências (6.62) será a série numérica será série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que é convergente, pois é uma $\underline{p}$-série, com $p = 2 \in (1\,,\infty)$ (veja (3.203)).

Por outro lado, em

$$x = -1 \,,$$

a série de potências (6.62) será a série numérica será série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ que também é convergente (veja o Exemplo (3.8.3)).

Portanto o intervalo de convergência da série de potências (6.62) será

$$I = [-1, 1] \,.$$

□

Observação 6.2.5 *Os Teoremas (6.2.1), (6.2.2) e (6.2.3) acima podem ser adaptados para séries de potências em $(x - c)$, isto é, centradas em $x = c$, ou seja, à serie de potências do tipo:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - c)^n \,. \tag{6.65}$$

Para ver isto basta observar que definindo-se:

$$y \doteq x - c \tag{6.66}$$

a série de potências (6.65) acima, tornar-se-á a seguinte série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, y^n \,. \tag{6.67}$$

Para esta última, podemos aplicar os Teoremas (6.2.1), (6.2.2) e (6.2.3) e depois voltarmos com a mudança de variáveis que fizemos (6.66), ou seja,

$$x = y + c \,, \tag{6.68}$$

para obter todas as informações que queremos sobre a série de potências (6.65).

Para ilustrar, suponhamos que a série de potências (6.67) tenha raio de convergência $\underline{R}$ *e seu intervalo de convergência seja*

$$[-R \,, R) \,,$$

isto é, a série de potências (6.67) converge se, e somente se,

$$y \in [-R \,, R) \,. \tag{6.69}$$

Logo, considerando-se (6.66), segue que a série de potências (6.65) converge se, e somente se,

$$x - c \overset{(6.66)}{=} y \in [-R \,, R) \,, \quad \textit{ou seja,} \quad x \in [c - R \,, c + R) \,. \tag{6.70}$$

Logo o intervalo

$$I \doteq [c - R \,, c + R)$$

será o intervalo de convergência da série de potências (6.65), ou seja, da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (x - c)^n$.

Baseado nas considerações acima, podemos introduzir a:

Definição 6.2.2 *Definimos*

$$R \in [0 \,, \infty] \,,$$

obtido na Observação (6.2.5) acima, como sendo o **raio de convergência da série de potências** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (x - c)^n$.

O maior subconjunto de $\mathbb{R}$ *onde a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - c)^n$ *é convergente será denominado* **intervalo de convergência da série de potências** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - c)^n$.

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 6.2.11 *Encontrar o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}. \tag{6.71}$$

Resolução:

Definamos

$$y \doteq x - 2. \tag{6.72}$$

Logo a série de potências (6.71) tornar-se-á a seguinte série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y^n. \tag{6.73}$$

A série de potências (6.73) foi estudada no Exemplo (6.2.8), e vimos que seu raio de convergência é igual a (veja (6.45))

$$R = 1$$

e seu intervalo de convergência é (veja (6.46))

$$I_o \doteq [-1, 1]. \tag{6.74}$$

Então, da Observação (6.2.5) acima, segue que o raio de convergência da série de potências (6.71) será igual a

$$R = 1$$

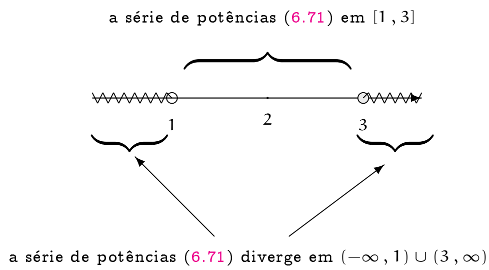
Notemos que, de (6.74), a série de potências (6.71) será convergente, se, e somente se

$$x - 2 \in [-1, 1], \quad \text{isto é,} \quad x \in = [1, 3].$$

Portanto o intervalo de convergência da série de potências (6.71), ou seja, da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$, será:

$$I_1 \doteq [1, 3].$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Exemplo 6.2.12 *Encontrar o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n} . \tag{6.75}$$

Resolução:

Definamos

$$y \doteq x+5 . \tag{6.76}$$

Com isto teremos que série de potências (6.75) acima tornar-se-á a seguinte série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} . \tag{6.77}$$

Observemos que a série de potências (6.77) foi estudada no Exemplo (6.2.9) e, como vimos, seu raio de convergência será igual a (veja (6.60))

$$R = 1$$

e seu intervalo de convergência será (veja (6.61))

$$I_o \doteq [-1\,,1) . \tag{6.78}$$

Então, da Observação (6.2.5) acima, segue que o raio de convergência da série de potências (6.75) será igual a

$$R = 1$$

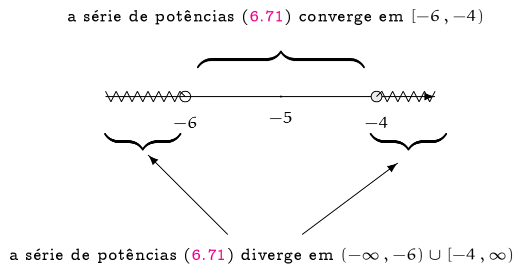
Notemos que, de (6.76), a série de potências (6.75) será convergente, se, e somente se

$$x+5 \overset{(6.76)}{=} y \in [-1\,,1) , \quad \text{isto é,} \quad x \in [-6\,,-4) .$$

Portanto o intervalo de convergência da série de potências (6.75), ou seja, da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n}$, será:

$$I_1 \doteq [-6\,,-4) .$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Exemplo 6.2.13 *Encontrar o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} . \tag{6.79}$$

Resolução:

Definamos

$$y \doteq x - 2 \tag{6.80}$$

Com isto teremos que série de potências (6.79) acima tornar-se-á a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n . \tag{6.81}$$

Observemos que a série de potências (6.81) foi estudada no Exemplo (6.2.4) e, como vimos, seu raio de convergência será igual a (veja (6.36))

$$R = \infty$$

e seu intervalo de convergência será (veja (6.36))

$$I_o \doteq \mathbb{R} . \tag{6.82}$$

Então, da Observação (6.2.5) acima, segue que o raio de convergência da série de potências (6.79) será igual a

$$R = \infty$$

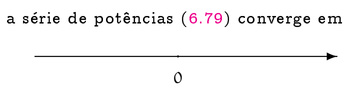
Notemos que, de (6.80), a série de potências (6.75) será convergente, se, e somente se

$$x - 2 \overset{(6.80)}{=} y \in \mathbb{R} , \quad \text{isto é,} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Portanto o intervalo de convergência da série de potências (6.79), ou seja, da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$, será:

$$I_1 \doteq \mathbb{R} .$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



□

Para finalizar esta seção temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 6.2.1 *Estudar a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+3)} x^n . \tag{6.83}$$

Resolução:

Para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq \frac{2^n}{\ln(n+3)}\,. \tag{6.84}$$

Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\
&\overset{(6.84)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{2^{n+1}}{\ln(n+4)}\right|}{\left|\dfrac{2^n}{\ln(n+3)}\right|} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 2\,.
\end{aligned} \tag{6.85}$$

Logo, do item 3. do Teorema (6.2.3), segue que o raio de convergência da série de potências será igual a

$$R \overset{(6.54)}{=} \frac{1}{\rho} \overset{(6.85)}{=} \frac{1}{2}\,.$$

Para finalizar precisaremos estudar a convergência da série de potências (6.83) nos pontos

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{-1}{2}\,.$$

Notemos que, em $x = \dfrac{1}{2}$, a série de potências (6.83) será a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n}{\ln(n+3)} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}. \tag{6.86}$$

Afirmamos que

$$n+3 \geq \ln(n+3)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,.$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Como consequência teremos

$$0 \leq \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{\ln(n+3)}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,.$$

Como a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3}$$

é divergente (é a série harmônica, translada de $\underline{3}$ - veja o Exemplo (3.3.6)) segue, do critério da comparação para séries numéricas, cujos termos são não-negativos (ou seja, o item 1. do Teorema (3.5.2)), que a série numérica (6.86) será divergente, ou seja, a série de potências (6.83) será divergente em $x = \dfrac{1}{2}$.

Notemos que, em $x = -\dfrac{1}{2}$, a série de potências (6.83) será a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n}{\ln(n+3)} \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+3)} \,. \tag{6.87}$$

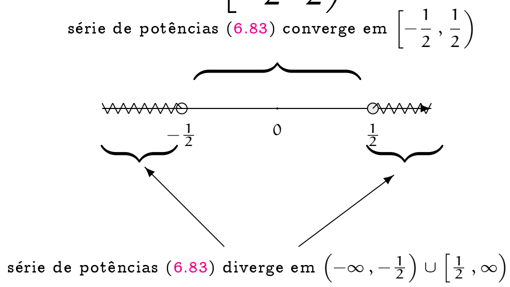
Aplicando o critério da série alternada (veja o Teorema (3.6.1)), pode-se mostrar que a série numérica (6.87) é convergente.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo a série de potências (6.83) será convergente em $x = -\dfrac{1}{2}$.

Logo, das informaçoes obtidas acima, podemos conclui que o intervalo de convergência da série de potências (6.83) será

$$I \doteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) .$$



□

6.3 Convergência Uniforme de Séries de Potências

Começaremos esta seção com a seguinte importante observação:

Observação 6.3.1 *Suponhamos que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \tag{6.88}$$

converge em $x_o \neq 0$.

Com isto podemos afirmar que a série de potências convergirá absolutamente uniformemente em

$$[-a, a] , \quad \textit{para cada} \quad a \in (0, |x_o|) . \tag{6.89}$$

De fato, se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, {x_o}^n$ *é convergente em* $\mathbb{R}$ *então, do critério da divergência (isto é, do Teorema (3.4.2)) segue que*

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \, {x_o}^n) = 0 .$$

Logo a sequência numérica $(a_n \, {x_o}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *será limitada em* $\mathbb{R}$*, isto é, podemos encontrar* $M \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$|a_n \, {x_o}^n| \leq M , \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N} . \tag{6.90}$$

Logo, para cada

$$\begin{aligned} & a \in (0\,, |x_o|) \quad \textit{fixado,} \\ \textit{isto é,} \quad & 0 < a < |x_o|\,, \\ \textit{ou ainda,} \quad & 0 < \frac{a}{|x_o|} < 1\,, \end{aligned} \tag{6.91}$$

segue que, se

$$x \in [-a\,, a]$$

teremos:

$$\begin{aligned} |a_n\, x^n| &\overset{x_o \neq 0}{=} |a_n\, {x_o}^n| \left|\frac{x^n}{{x_o}^n}\right| \\ &\overset{(6.90)}{\leq} M \left|\frac{a^n}{{x_o}^n}\right| \\ &= M \left|\frac{a}{x_o}\right|^n \\ &= M\, r^n\,, \end{aligned} \tag{6.92}$$

onde

$$r \doteq \left|\frac{a}{x_o}\right| \overset{(6.91)}{<} 1\,. \tag{6.93}$$

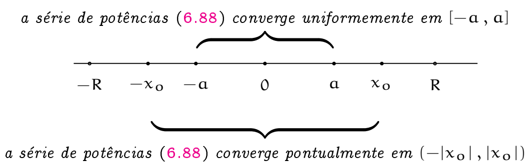
Notemos que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\, r^n = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

é convergente em $\mathbb{R}$ *(é uma série geométrica cuja razão* $\underline{r}$*, de* (6.93)*, satisfaz* $r \in [0\,, 1)$ *- veja o Exemplo* (3.3.5)*)..*

Logo, do teste M. de Weierstrass (isto é, o Teorema (5.3.1)*), segue que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *será absolutamente uniformemente convergente em* $[-a\,, a]$*, para cada* $a \in [0\,, |x_o|)$ *fixado.*

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Em geral temos o:

Teorema 6.3.1 *Consideremos a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \tag{6.94}$$

cujo raio de convergência é $R \in (0, \infty]$.

Então a série de potências (6.94) *será absolutamente uniformemente em qualquer intervalo fechado e limitado contido dentro do intervalo* $(-R, R)$*, isto é, em qualquer intervalo*

$$[a, b] \subseteq (-R, R). \tag{6.95}$$

Demonstração:

Seja

$$[a, b] \subseteq (-R, R).$$

Podemos supor, sem perda de generalidade que

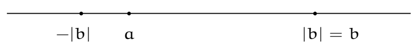
$$|a| < |b|.$$

O caso em isso não ocorre será deixado como exercício para o leitor.

Deste modo, segue que

$$[a, b] \subseteq (-|b|, |b|) . \tag{6.96}$$

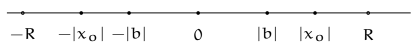
A figura abaixo ilustra a situaçao acima para o caso que $|b| = b > 0$:



Observemos que podemos encontrar

$$x_o \in (0, R), \quad \text{de modo que} \quad -x_o < -|b| < |b| < x_o .$$

A figura abaixo ilustra a situaçao acima



Como $x_o \in (-R, R)$ temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_o}^n$ será convergente.

Logo da Observação (6.3.1) acima, podemos concluir que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergirá absolutamente uniformemente em $[-|b|, |b|)$.

Portanto, de (6.96), a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergirá absolutamente uniformemente em intervalo $[a, b]$, como queríamos demonstrar.

□

Como consequência do Teorema (6.3.1) acima, temos o:

Corolário 6.3.1 *Suponhamos que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \tag{6.97}$$

tenha raio de convergência igual a $R \in (0\,,\infty]$.

Considere a função $f : (-R\,,R) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R\,,R)\,. \tag{6.98}$$

Então a função $\underline{f}$ *será contínua em* $(-R\,,R)$.

<u>**Demonstração:**</u>

Mostremos que a função $\underline{f}$ é contínua em $x_o \in (-R\,,R)$.

Para isto consideremos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ tal que

$$-R < a \leq x_o < b < R\,,$$

que sempre existem pois

$$-R < x_o < R\,.$$

Do Teorema (6.3.1) acima, sabemos que a série de potências (6.97) converge absolutamente uniformemente em $[a\,,b]$.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq a_n\, x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.99}$$

é contínuas em $\mathbb{R}$, em particular, será contínua no intervalo $[a\,,b]$.

Logo, do item 1. do Corolário (5.3.1), segue que a função $\underline{f}$ será contínua em $[a\,,b]$, em particular em $x_o \in [a\,,b] \subseteq (-R\,,R)$.

Portanto, a função $\underline{f}$ será contínua em $(-R\,,R)$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 6.3.2 *Todas as séries de potências estudadas nas seções anteriores, convergem absolutamente uniformemente em cada intervalo fechado e limitado* $[a\,,b]$*, que está contido no interior dos intervalos de convergência das respectivas séries de potências.*

Logo suas funções somas definem funções contínuas, nos respectivos interiores dos intervalos de convergência das séries de potências.

6.4 Integração Séries de Potências

Para integrar uma série de potências temos o seguinte resultado:

Teorema 6.4.1 *Suponhamos que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \tag{6.100}$$

tenha raio de convergência $R \in (0\,,\infty]$.

Então, para cada $x \in (-R\,,R)$ *fixado, a soma da série de potências* (6.100) *é uma função integrável em* $[0\,,x]$, *se* $x \in (0\,,\infty)$, *ou em* $[x\,,0]$, *se* $x \in (-\infty\,,0)$, *e a integral da mesma pode ser obtida integrando-se a série de potências* (6.100), *termo a termo, no intervalo* $[0\,,x]$, *se* $x \in (0\,,\infty)$, *ou em* $[x\,,0]$, *se* $x \in (-\infty\,,0)$, *ou seja,*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}\\ &= a_o\, x + \frac{a_1}{2}\, x^2 + \frac{a_2}{3}\, x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} \cdots\,,\end{aligned} \tag{6.101}$$

ou ainda,

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\int_0^x t^n\, dt\right], \tag{6.102}$$

ou seja,

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}\,. \tag{6.103}$$

Demonstração:

Suponhamos que $x \in (0\,,\infty)$.

A demonstração do caso $x \in (-\infty\,,0)$ é semelhante a que faremos e será deixada como exercício para o leitor.

Para cada $x \in (-R\,,R)$, temos que

$$[0\,,x] \subseteq (-R\,,R)\,.$$

Logo, do Teorema (6.3.1), segue que a série de potências (6.100) será uniformemente convergente em $[0\,,x]$.

Portanto, do item 2. do Corolário (5.3.1), segue que a série de potências (6.100) pode ser integrada, termo a termo, em $[0\,,x]$, ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\right] dt &\overset{(5.22)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^x a_n\, t^n\, dt\right]\\ &\overset{\text{Teor. Fundamental do Cálculo}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+1}\, t^{n+1}\Big|_{t=0}^{t=x}\right].\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}\,,\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

A seguir faremos mais algumas considerações importantes sobre o comportamento de uma série de potênia.:

Observação 6.4.1

1. *Suponhamos que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \tag{6.104}$$

tenha raio de convergência $R \in (0\,,\infty]$ *e* $x \in (-R\,,R)$.

Seja

$$\rho_o \overset{(6.48)}{=} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| , \tag{6.105}$$

obtido pelo Teorema (6.2.3).

Notemos que, também pelo Teorema (6.4.1), a série de potências (6.104), pode ser integrada, termo a termo, no intervalo $[0\,,x]$, *se* $x \in (0\,,\infty)$, *ou em* $[x\,,0]$, *se* $x \in (-\infty\,,0)$.

Além disso, a aplicação do resultado acima produzirá uma nova série de potências de potências, que é a série de potências dada por (6.103), isto é, a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \, x^{n+1} , \tag{6.106}$$

para $x \in (-R\,,R)$.

Neste caso os coeficientes da série de potências (6.106) serão dados por

$$A_n \doteq \frac{a_n}{n+1} , \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N} . \tag{6.107}$$

Encontremos o raio de convergência desta nova série de potências (6.106).

Para isto, basta calcularmos:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &\overset{(6.48)}{\doteq} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| \\
&\overset{(6.107)}{=} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{a_{n+1}}{n+2}}{\dfrac{a_n}{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
&= \underbrace{\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\right]}_{\overset{Exercício}{=}1}\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
&\overset{(6.105)}{=} \rho_o\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, as duas séries de potências (6.104) *e* (6.106) *(a original e a integrada, termo a termo) têm o mesmo raio de convergência, pois*

$$\rho_1 = \rho_o\,. \tag{6.108}$$

2. *De modo semelhante, a série de potências* (6.106)*, ou seja,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1}\,,$$

por ser uma série de potências com raio de convergência $R \in (0\,,\infty]$ *(que é igual ao da série de potências original, isto é,* (6.104)*), para cada* $x \in (-R\,,R)$*, poderá ser integrada, termo a termo, no intervalo* $[0\,,x]$*, se* $x \in (0\,,\infty)$*, ou no intervalo* $[x\,,0]$*, se* $x \in (-\infty\,,0)$*, obtendo-se, deste modo, uma nova série de potência, a saber*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)\,(n+2)}\,x^{n+2}\,,$$

que terá o mesmo raio de convergência $R \in (0\,,\infty]$*, da série original, isto é, da série de potências* (6.104)*.*

Podemos repetir esse processo indefinidamente obtendo-se, em cada passo do processo, uma nova série de potências, que terá o mesmo raio de convergência da série de potências a qual iniciamos o processo, isto é, da série de potências (6.104)*.*

Conclusão: *se* $R \in (0\,,\infty]$ *é o raio de convergência de uma série de potências, para cada* $x \in (-R\,,R)$*, integrando-se a série de potências no* $[0\,,x]$*, se* $x \in (0\,,\infty)$*, ou no intervalo* $[x\,,0]$*, se* $x \in (-\infty\,,0)$*, obteremos uma nova série de potências, cujo raio de convergência será igual a* $\underline{R}$*, ou seja, será o mesmo da série de potências que iniciamos.*

3. *Como veremos, em alguns exemplos a seguir, os intervalos de convergência* **não** *precisarão,* **necessariamente***, serem iguais, isto é, os raios de convergência das séries de potêcias acima consideradas são iguais, mas os respectivos intervalos de convergência* **poderão** *ser diferentes.*

4. *Se denotarmos por* I_o*, o intervalo de convergência da série potências* (6.104) *e por* I_1*, o intervalo de convergência da série potências* (6.106)*, em geral, teremos:*

$$I_o \subseteq I_1\,, \tag{6.109}$$

ou seja, o intervalo de convergência da série de potências obtida da integração de uma série de potências dada pode, eventualmente, "aumentar" .

Veremos, adiante, exemplos onde isto ocorrerá (veja o Exemplo (6.4.1)*).*

3. *Notemos que podemos demonstrar um resultado análogo ao Teorema* (6.4.1)*, trocando-se o intervalo* $[0\,,x]$*, para* $x \in (0\,,\infty)$*, por um intervalo*

$$[b\,,c] \subseteq (-R\,,R)\,,$$

ou seja, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
\int_b^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,dt &\overset{\text{análogo a (6.102)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_b^c a_n\,t^n\,dt\right]\\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n+1}\,t^{n+1}\Big|_{t=b}^{t=c}\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(c^{n+1}-b^{n+1}\right)\\
&\overset{\text{as séries numéricas são convergentes}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\,c^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\,b^{n+1}\,.
\end{aligned} \tag{6.110}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 6.4.1 *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^n\,. \tag{6.111}$$

Encontre os raios de convergência, o intervalo de convergência da série de potências e da série de potências integrada, termo a termos, associada à mesma.

Resolução:

Para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definamos

$$a_n \doteq (-1)^n\,. \tag{6.112}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \rho_o &\overset{(6.48)}{=} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &\overset{(6.112)}{=} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\right| = 1\,, \end{aligned} \tag{6.113}$$

logo, do item 3. Teorema (6.2.3), segue que o raio de convergência da série de potências (6.111) será

$$R_o \doteq \frac{1}{\rho_o} \overset{(6.113)}{=} 1\,. \tag{6.114}$$

Observemos que, para

$$x = 1\,,$$

a série de potências (6.111), tornar-se-á a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

que, pelo critério da divergência (isto é, o Teorema (3.4.2)) é uma série numérica divergente.

De modo semelhante, notemos que, para

$$x = -1\,,$$

a série de potências (6.111), tornar-se-á a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

que, pelo critério da divergência (isto é, o Teorema (3.4.2)) também é uma série numérica divergente.

Portanto intervalo de convergência da série de potências (6.111) será

$$I_o \doteq (-1\,, 1)\,. \tag{6.115}$$

Além disso, a soma da série de potências (6.111), será a função $f : (-1\,, 1) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n = \frac{1}{1+x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1\,, 1)\,. \tag{6.116}$$

Lembremos que, para cada $x \in (-1\,, 1)$ fixado, a série de potências (6.111) tornar-se-á uma série geométrica razão $-x$, com $|x| < 1$, logo convergente e sua soma será dada por (6.114) (veja o Exemplo (3.3.5)).

Notemos agora que, do Teorema (6.4.1) acima, segue que a série de potências (6.111) pode ser integrada, termo a termo, em qualquer intervalo fechado e limitado contido dentro do seu intervalo de convergência, ou seja em $[a\,, b]$ onde $[a\,, b] \subseteq (-1\,, 1)$.

Assim, para cada $x \in (-1\,,1)$ fixado, aplicando-se o argumento acima, ao intervalo $[0\,,x]$, se $x \in (0\,,\infty)$, ou ao intervalo $[x\,,0]$, se $x \in (-\infty\,,0)$, segue que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,dt &\overset{(6.106)}{=} \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^n\,dt\right] \\
&\overset{(6.102)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x (-1)^n t^n\,dt\right] \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}\,t^n\,\Bigg|_{t=0}^{t=x}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1} \\
&\overset{m \doteq n+1}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\,x^m \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n\,.
\end{aligned}
\tag{6.117}
$$

Notemos que a série de potências (6.117) é convergente em $x = 1$.

De fato, pois a série de potências (6.117) em $x = 1$ tornar-se-á a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

que a série harmônica alternada que, como vimos (veja o Exemplo (3.6.2)), é convergente.

Notemos que a série de potências (6.117) é divergente em $x = -1$.

De fato, pois a série de potências (6.117) em $x = -1$ tornar-se-á a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

que a série harmônica que, como vimos (veja o Exemplo (3.3.6)), é divergente.

Logo o raio de convergência da série de potências (6.117) (que a série de potências integrada da série de potências (6.111)) será igual a

$$R_1 \doteq 1 \tag{6.118}$$

e o intervalo de convergência da série (6.117) integrada (que a série de potências integrada da série de potências (6.111)) será igual a

$$I_1 \doteq (-1\,,1]\,. \tag{6.119}$$

Logo, neste exemplo, de (6.114), (6.115), (6.118) e (6.119), segue que

$$R_1 \overset{(6.114)}{=} 1 \overset{(6.118)}{=} R_o \quad \text{e} \quad I_o \overset{(6.115)}{=} (-1\,,1) \subseteq (-1\,,1] \overset{(6.118)}{=} I_1\,, \quad \text{com} \quad I_o \neq I_1 \tag{6.120}$$

□

Observação 6.4.2

1. *Um outro modo de obtermos a expressão da função que nos fornece soma da série de potências* (6.111)*, ou seja,* (6.116)*, é o seguinte:*

   Para cada $x \in (-1\,,1)$ *fixado, temos que :*

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots \\ &= 1 - x\, \underbrace{\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots\right)}_{\overset{(6.116)}{=} f(x)} \\ &= 1 - x\, f(x)\,. \end{aligned}$$

   Logo

$$f(x) = 1 - x\, f(x)\,,$$

$$\textit{portanto:} \qquad f(x) = \frac{1}{1+x}\,, \quad \textit{para cada} \quad |x| < 1\,,$$

   como apresentado em (6.116)*.*

2. *Notemos que, para cada* $x \in (-1\,,1)$*, temos que*

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\, dt &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \\ &\overset{\textit{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[\ln(1+t)\,\Big|_{t=0}^{t=x}\right] \\ &= \ln(1+x)\,, \end{aligned}$$

   logo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \tag{6.121}$$

Fazendo $x = 1$ *na identidade* (6.118) *acima (notemos que a série numérica obtida é convergente em* $\mathbb{R}$*), obteremos*

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,, \tag{6.122}$$

como havíamos afirmado anteriormente (veja a Obsevação (3.6.2)*).*

Temos também o:

Exemplo 6.4.2 *Consideremos a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n . \tag{6.123}$$

Encontre os raios de convergência, o intervalo de convergência da série de potências e da série de potências integrada, termos a termo, associada à mesma.

Resolução:

Notemos que, defindo

$$y \doteq -x^2 , \tag{6.124}$$

a série de potências (6.123) torna-se-á a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n . \tag{6.125}$$

Notemos que, para cada $y \in \mathbb{R}$ fixado, a série de potências (6.125) é uma série geométrica, cuja razão é igual a $\underline{y}$.

Logo, do Exemplo (3.3.5) e o Teorema (3.8.1), segue que ela será convergente se, e somente se,

$$y \in (-1\,,1)\,. \tag{6.126}$$

Além disso, para cada $y \in (-1\,,1)$ fixado, a soma da série numérica (6.125), será (veja (3.30)) dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} . \tag{6.127}$$

Logo, de (6.124) e (6.126), segue que a série de potências (6.123) será convergente se, e somente se,

$$-x^2 \overset{(6.124)}{=} y \in (-1\,,1)\,, \quad \text{ou seja,} \quad x \in (-1\,,1)\,.$$

Portanto, o raio de convergência da série de potências (6.123) será

$$R_o \doteq 1 \tag{6.128}$$

e o intervalo de convergência série de potências (6.123) será

$$I_o \doteq (-1\,,1)\,. \tag{6.129}$$

Além disso, de (6.124) e (6.127), segue que a função soma da série de potências (6.123), será a função $f : (-1\,,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(6.124)\text{ e }(6.127)}{\doteq} \frac{1}{1-(-x^2)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \end{aligned} \tag{6.130}$$

Logo, para cada $x \in (-1\,,1)$ temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots \end{aligned} \tag{6.131}$$

Notemos agora que, do Teorema (6.4.1) acima, segue que a série de potências (6.123) pode ser integrada, termo a termo, em qualquer intervalo fechado e limitado contido dentro do seu intervalo de convergência, ou seja em $[a\,,b]$ onde $[a\,,b] \subseteq (-1\,,1)$.

Assim, para cada $x \in (-1\,,1)$ fixado, aplicando-se o argumento acima, ao intervalo $[0\,,x]$, se $x \in (0\,,\infty)$, ou ao intervalo $[x\,,0]$, se $x \in (-\infty\,,0)$, segue que:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &\overset{(6.12)}{=} \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,dt\right] \\ &\overset{(6.102)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt\right] \\ &\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n+1}\, t^{2n+1}\Big|_{t=0}^{t=x}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}\,. \end{aligned} \tag{6.132}$$

Notemos que o raio de convergência da série de potências (6.132) (isto é, da série de potências integrada da série de potências (6.113)) é

$$R_1 \doteq 1\,. \tag{6.133}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor

Encontremos o intervalo de convergência da série de potências (6.132) (isto é, da série de potências integrada da série de potências (6.113)).

Para isto notemos que se fizermos $x = 1$ na série de potências (6.132), obteremos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \underbrace{(-1)^n}_{=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

que, pelo critério da série alternada (veja o Teorema (3.6.1) ou o Exemplo (3.6.3), fazendo $m \doteq n-1$ naquela), temos que ela será convergente.

Por outro lado, se fizermos $x = -1$ na série de potências (6.132), obteremos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

que, como vimos acima, é convergente.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências (6.132) (isto é, da série de potências integrada, termo a termo, da série de potências (6.113)), será

$$I_1 \doteq [-1\,,1]\,. \tag{6.134}$$

Logo, neste exemplo, de (6.128), (6.133), (6.129) e (6.134), segue que

$$R_1 \overset{(6.133)}{=} 1 \overset{(6.128)}{=} R_o \quad \text{e} \quad I_o \overset{(6.129)}{=} (-1\,,1) \subseteq (-1\,,1] \overset{(6.134)}{=} I_1\,, \quad \text{com} \quad I_o \neq I_1 \tag{6.135}$$

□

Observação 6.4.3 *Notemos que, no Exemplo (6.4.2) acima, para cada $x \in [-1\,,1]$, teremos*

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,dt &\overset{(6.130)}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&\overset{\textit{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[\operatorname{arctg}(x)\,\Big|_{t=0}^{t=x}\right] \\
&= \operatorname{arctg}(x)\,.
\end{aligned}$$

Logo, de (6.132), segue que

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-1\,,1]\,. \tag{6.136}$$

Em particular, se fizermos $x = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg}(1) \\
&\overset{(6.136)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\,,
\end{aligned} \tag{6.137}$$

como afirmamos anteriromente (veja o Exemplo (3.6.3), na verdade (3.242), fazendo $m = n - 1$).

Temos também o seguinte exercício resolvido:

Exercício 6.4.1 *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{6.138}$$

Encontre os raios de convergência, o intervalo de convergência da série de potências e da série de potências integrada, termo a termo, associada à mesma.

Resolução:

Notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, a série de potências (6.138) é uma série geométrica, cuja razão é igual a $\underline{x}$.

Logo, do Exemplo (3.3.5) e o Teorema (3.8.1), segue que ela será convergente se, e somente se,

$$x \in (-1\,,1)\,. \tag{6.139}$$

Além disso, para cada $x \in (-1\,,1)$ fixado, a soma da série numérica (6.138), será (veja (3.30)) dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,. \tag{6.140}$$

Portanto, o raio de convergência da série de potências (6.138) será

$$R_o \doteq 1 \tag{6.141}$$

e o intervalo de convergência série de potências (6.138) será

$$I_o \doteq (-1\,,1)\,. \tag{6.142}$$

A função soma da série de potências (6.138), será a função $f : (-1\,,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{1-x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \tag{6.143}$$

Notemos agora que, do Teorema (6.4.1) acima, segue que a série de potências (6.138) pode ser integrada, termo a termo, em qualquer intervalo fechado e limitado contido dentro do seu intervalo de convergência, ou seja em $[a\,,b]$ onde $[a\,,b] \subseteq (-1\,,1)$.

Assim, para cada $x \in (-1\,,1)$ fixado, aplicando-se o argumento acima, ao intervalo $[0\,,x]$, se $x \in (0\,,\infty)$, ou ao intervalo $[x\,,0]$, se $x \in (-\infty\,,0)$, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,dt &\overset{(6.12)}{=} \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n\,dt\right] \\
&\overset{(6.102)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^x t^n\,dt\right] \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}\,t^{n+1}\Big|_{t=0}^{t=x}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,.
\end{aligned} \tag{6.144}$$

Notemos que o raio de convergência da série de potências (6.144) (isto é, da série de potências integrada da série de potências (6.138)) é

$$R_1 \doteq 1\,. \tag{6.145}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor

Encontremos o intervalo de convergência da série de potências (6.144) (isto é, da série de potências intergrada da série de potências (6.138)).

Para isto notemos que se fizermos $x = 1$ na série de potências (6.144), obteremos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \underbrace{1^n}_{=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

que é uma série divergente (veja o Exemplo (3.5.8)).

Por outro lado, se fizermos $x = -1$ na série de potências (6.132), obteremos a série numérica

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &\overset{m=n+1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\end{aligned}$$

que, pelo critério da série alternada (veja o Teorema (3.6.1) ou o Exemplo (3.6.2)) temos que ela será convergente.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências (6.144) (isto é, da série de potências integrada, termo a termo, da série de potências (6.138)), será

$$I_1 \doteq [-1\,,1)\,. \tag{6.146}$$

Logo, neste exemplo, de (6.141), (6.142), (6.145) e (6.146), segue que

$$R_1 \overset{(6.141)}{=} 1 \overset{(6.145)}{=} R_o \quad \text{e} \quad I_o \overset{(6.142)}{=} (-1\,,1) \subseteq (-1\,,1] \overset{(6.146)}{=} I_1\,, \quad \text{com} \quad I_o \neq I_1 \tag{6.147}$$

□

Observação 6.4.4 *Notemos que, no Exemplo (6.138) acima, para cada $x \in [-1\,,1)$, teremos*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &\overset{(6.130)}{=} \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt \\ &\overset{\textit{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[-\ln(1-x)\Big|_{t=0}^{t=x}\right] \\ &= -\ln(1-x) + \underbrace{\ln(1)}_{=0} \\ &= -\ln(1-x)\,,\end{aligned}$$

de (6.144), segue que $$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-1\,,1)\,. \tag{6.148}$$

Em particular, se fizermos $x = -1$ em (6.148), obteremos

$$\ln(2) \overset{(6.148)\ com\ x=-1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots . \tag{6.149}$$

6.5 Derivação de Séries de Potências

Para derivar séries de potências, termo a termo, temos o seguinte resultado:

Teorema 6.5.1 *Suponhamos que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.150}$$

tenha raio de convergência igual a $R_o \in (0, \infty]$.

Então a função soma da série de potências (6.150), isto é, a função $f : (-R_o, R_o) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R_o, R_o) , \tag{6.151}$$

será uma função diferenciável em $(-R_o, R_o)$ e, além disso, a série de potência (6.150) pode ser derivada, termo a termo, em $(-R_o, R_o)$, isto é,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} , \tag{6.152}$$

ou seja,
$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}[a_n x^n] \tag{6.153}$$

ou ainda,
$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} , \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R_o, R_o) . \tag{6.154}$$

Demonstração:

Seja

$$\rho_o \overset{(6.48)}{=} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| , \tag{6.155}$$

obtido pelo Teorema (6.2.3).

Encontremos o raio de convergência, que denotaremos por $\underline{R'}$, associado à série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} . \tag{6.156}$$

Para isto, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$A_n \doteq n\, a_n \tag{6.157}$$

e calculemos

$$
\begin{aligned}
\rho' &\overset{(6.48)}{\doteq} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| \\
&\overset{(6.157)}{=} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,a_{n+1}}{n\,a_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right] \\
&= \left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}_{\overset{\text{Exercício}}{=}1}\right]\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{(6.155)}{=} \rho_o\,.
\end{aligned}
\tag{6.158}
$$

Como

$$\rho' = \rho_o\,,$$

segue que, do Teorema (6.2.3), que os raios de convergência das série de potências (6.156) e (6.150) são iguais, ou seja,

$$R' = R_o\,.$$

Em particular, a série de potências (6.156) será uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado e limitado, contido no intervalo $(-R_o\,,R_o)$, isto é, em $[a\,,b] \subseteq (-R_o\,,R_o)$.

Logo, do item 3. do Teorema (5.3.1), segue que a função soma da série de potências (6.150) (isto é, a função f dada por (6.151)) será uma função diferenciável em $(-R_o\,,R_o)$ e, além disso, a a série de potências (6.150) poderá ser derivada, termo a termo, no intervalo $(-R_o\,,R_o)$, ou seja, para $x \in (-R_o\,,R_o)$, teremos:

$$
\begin{aligned}
f\,'(x) &\overset{(6.150)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d}{dx}\left(a_n\,x^n\right)\right] \\
&\overset{\text{Cálculo 1}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\,,
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 6.5.1

1. *O Teorema (6.5.1) acima nos diz que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n \tag{6.159}$$

pode ser derivada, termo a termo, no intervalo $(-R_o, R_o)$.

Além disso, sua derivada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \tag{6.160}$$

também será uma série de potências, cujo raio de convergência é igual ao da série de potências original, isto é, será igual ao da série de potências (6.159).

Vale observar que os respecivos intervalos de convergência podem, em geral, ser diferentes, como será tratado no item 1. da Observação (6.5.2)*, que virá a seguir*

2. *Notemos também que* (6.160) *é uma série de potências.*

   Logo podemos aplicar Teorema (6.5.1) *acima a ela própria.*

   Com isto a função $\underline{f}$*, dada por* (6.151)*, será duas vezes diferenciável em* $(-R_o\,,R_o)$ *e, além disso, podemos derivar a série de potêncais* (6.160)*, termo a termo, em* $(-R_o\,,R_o)$*, e assim obter uma nova série de potências, ou ainda,*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\,[f'(x)] \\ &\overset{(6.160)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\right] \\ &\overset{(6.153)}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[n\, a_n\, x^{n-1}\right] \\ &\overset{\textit{Exercício}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,. \end{aligned} \tag{6.161}$$

   Notemos que, pelo Teorema (6.5.1) *acima, a série de potências* (6.161) *terá o raio de convergência da série de potências* (6.160) *que, por sua vez, tem o mesmo raio de convergência da da série de potências inical, isto é, da série de potêncais* (6.159).

   Podemos repetir o processo indefinidamente e assim obter a seguinte consequência do Teorema (6.5.1) *acima:*

Corolário 6.5.1 *Suponhamos que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \tag{6.162}$$

tenha raio de convergência igual a $R \in (0\,,\infty]$.

Então a função soma da série de potências (6.162)*, isto é, a função* $f:(-R\,,R) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R\,,R)\,, \tag{6.163}$$

pertencerá $C^{\infty}((-R, R); \mathbb{R})$.

Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, *a série de potência* (6.162), *pode ser derivada* $\underline{k}$*-vezes, termo a termo em* $(-R, R)$, *isto é, para* $x \in (-R, R)$ *teremos:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)\,a_n\,x^{n-k}\,. \tag{6.164}$$

Demonstração:

Consequência do Teorema (6.5.1) acima.

Para obter (6.164), basta notarmos que, para cada $x \in (-R, R)$, de (6.153) e indução, sobre a ordem de derivação, segue que

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{d^k}{dx^k} f(x) \\ &\overset{(6.163)}{=} \frac{d^k}{dx^k}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\right] \\ &\overset{(6.153)}{=} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}\left[a_n\,x^n\right] \\ &\overset{\text{Cálculo 1. e indução}}{=} \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)\,a_n\,x^{n-k}\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração

□

Observação 6.5.2

1. *Como resumo, temos que uma série de potências, cujo raio de convergência é igual a* $R \in (0, \infty]$, *representa uma função que possui derivada, de qualquer ordem, no intervalo* $(-R, R)$.

   O raio de convergência de qualquer uma das séries de potências obtidas da série de potências inicial, derivando-se termo a termo, continua o mesmo.

   O intervalo de convergência de uma série de potências, obtida da derivação da série de potências dada, pode mudar.

   Em geral, temos

   $$I' \subseteq I\,, \tag{6.165}$$

   onde $\underline{I}$ *e* $\underline{I'}$ *denotam os intervalos de convergência da série de potências inicial e da série de potências derivada termo a termo, respectivamente.*

   Pode ocorrer situações em que

   $$I' \neq I\,. \tag{6.166}$$

   Um caso em que isto ocorre é no Exemplo (6.4.2) *olhado da seguinte forma:*

Vimos, no Exemplo (6.4.2), que a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \tag{6.167}$$

tem como intervalo de convergência o intervalo

$$I \doteq [-1, 1] \tag{6.168}$$

Notemos que, a série de potências obtida derivando-se a série de potências (6.167), termo a termo, será a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \tag{6.169}$$

que tem como intervalo de convergência

$$I' \doteq (-1, 1),$$

ou seja, o intervalo de convergência $\underline{I'}$*, da série de potências obtida por derivação da série de potências (6.167), está contido,* **propriamente***, o intervalo de convergência* $\underline{I}$ *da série de potências (6.167).*

2. *As propriedades obtidas nos resultado acima, são intrísecas de séries de potências, ou seja, isto pode* **não** *ocorrer, em geral, para séries de funções, como mostra o seguinte exemplo:*

   A série de funções

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$$

   (que **não** *é uma série de potências) é uniformemente convergente na reta* $\underline{\mathbb{R}}$*, como vimos no Exemplo (5.3.5).*

   Notemos que, se derivarmos a série de funções acima, termo a termo, obteremos a seguinte série de funções

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n},$$

   que **não** *converge em, por exemplo,*

   $$x = 0,$$

   na verdade, não converge em $x = 2k\pi$*, para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

3. *Para* $a \in \mathbb{R}$ *fixado, vale o análogo do Corolário (6.5.1) acima, para a série de potências*

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{6.170}$$

no intervalo $(a-R, a+R)$, *onde* $R \in (0, \infty]$ *é o raio de convergência da série de potências* (6.170).

Mais precisamente, a função $f : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a-R, a+R), \tag{6.171}$$

pertencerá $C^\infty((a-R, a+R); \mathbb{R})$.

Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, *a série de potência* (6.170), *pode ser derivada* $\underline{k}$*-vezes, termo a termo em* $(a-R, a+R)$, *isto é, para* $x \in (a-R, a+R)$ *teremos:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, a_n (x-a)^{n-k}. \tag{6.172}$$

Deixaremos a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Podemos utilizar a representação em séries de potência de funções conhecidas para obter uma representação em série de potências para outras funções, como mostram os exemplos aseguir:

Exemplo 6.5.1 *Considere a função* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1). \tag{6.173}$$

Obter uma representação em série de potências para a função $\underline{f}$, *no intervalo* $(-1, 1)$.

Resolução:

Observemos que, para cada $x \in (-1, 1)$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] &= (-1)\frac{1}{(1-x)^2}(-1) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\overset{(6.173)}{=} f(x). \end{aligned} \tag{6.174}$$

Como vimos no Exemplo (6.4.1) (ou ainda, (6.140)),

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1, 1), \tag{6.175}$$

que é uma série de potências cujo raio de convergência é $R = 1$.

Logo, do Teorema (6.5.1) acima, segue que a série de potências em (6.175) pode ser derivada, termo a termo, no intervalo $(-1\,,1)$, ou seja, para cada $x \in (-1\,,1)$, teremos:

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(6.174)}{=} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] \\ &\overset{(6.175)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right] \\ &\overset{(6.153)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d}{dx}x^n\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}\,. \end{aligned} \tag{6.176}$$

Portanto,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,, \tag{6.177}$$

será a representação da função $\underline{f}$, dada por (6.173), em séries de potências, no intervalo $(-1\,,1)$, completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 6.5.2 *Consideremos a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n}\,. \tag{6.178}$$

Mostre que a o intervalo deconvergência da série de potências (6.178) *é igual a* $\mathbb{R}$.

Além disso, se função soma da série de potências (6.115)*, que denotaremos por* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.179}$$

mostre que

$$f(x) = \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.180}$$

Resolução:

Notemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,\left(x^2\right)^n\,. \tag{6.181}$$

Logo, definido-se

$$y \doteq x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.182}$$

segue que basta estudarmos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^n . \tag{6.183}$$

Para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definamos

$$A_n \doteq \frac{-(1)^n}{(2n)!} . \tag{6.184}$$

Calculemos:

$$\begin{aligned}
\rho_o &\doteq \lim_{n \to \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| \\
&\overset{(6.184)}{=} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\dfrac{-(1)^{n+1}}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{-(1)^n}{(2n)!}} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \overset{\text{Exercício}}{=} 0 .
\end{aligned}$$

Logo, do item 1. do Teorema (6.2.3), segue que o raio de convergência da série de potências (6.183) será

$$R = \infty ,$$

ou seja, a série de potências (6.183) converge em $\mathbb{R}$, ou ainda, o intervalo de convergência da série de potências (6.183) será

$$I_o \doteq \mathbb{R} .$$

Logo, de (6.182), temos que a série de potências (6.178) terá intervalo de convergência igual a

$$I_o \doteq \mathbb{R} .$$

Em particular, do Corolário (6.5.1), segue que a função soma da série de potências (6.115), isto é, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por (6.179), pertencerá a $C^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ e a série de potências (6.178) poderá ser derivada, termo a termo, a qualquer ordem.

Logo, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned}
f'(x) &\overset{(6.179)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)}{(2n)!}\, x^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} \\
&\overset{m \doteq n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{[2(m+1)-1]!}\, x^{2(m+1)-1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}\, x^{2m+1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \qquad (6.185)\\
&= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Derivando mais uma vez, termo a termo, obtemos:

$$\begin{aligned}
f''(x) &\overset{(6.185)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\right] x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(2n+1)!}\, x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\, x^{2n} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\, x^{2n} \\
&\overset{(6.179)}{=} -f(x),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f''(x) = -f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (6.186)$$

Notemos que

$$f(0) \overset{x=0 \text{ em } (6.179)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, 0^{2n} = 1 \qquad (6.187)$$

e

$$f'(0) \overset{x=0 \text{ em } (6.185)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} 0^{2m+1} = 0, \tag{6.188}$$

isto é, a função $\underline{f}$ satisfaz ao seguinte PVI

$$\begin{cases} f''(x) = -f(x), & \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1, \\ f'(0) = 0 \end{cases}.$$

Na disciplina de Equações Diferencias Ordinárias, foi mostrado que existe uma única função que tem essas três propriedades e, esta função é a função cosseno, ou seja,

$$f(x) = \cos(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6.189}$$

completando a resolução.

□

Como consequência, temos o:

Exemplo 6.5.3 *Mostre que*

$$\begin{aligned} \text{sen}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.190}$$

Resolução:

Notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\text{sen}(x).$$

Logo podemos obter uma representação em série de potências para a função seno utilizando-se representação em série de potências para a função cosseno, masi precisamente, para cada

$x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= -\frac{d}{dx}\cos(x) \\
&\overset{(6.189)}{=} -\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}\right] \\
&\overset{\text{Teorema } (6.5.1)}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right] \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)}{(2n)!}\, x^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

completando a resolução.

□

A seguir temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 6.5.1 *Encontrar uma aproximação de*

$$e^{-1},$$

com um erro menor que 10^{-4}, *ou seja, três casas decimais exatas.*

Resolução:

Do Exemplo (5.3.7) segue que

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.191}$$

Logo

$$\begin{aligned}
e^{-x} &\overset{(6.191)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, (-x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^n, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{6.192}$$

Notemos que, para cada $x_o \in (0\,,\infty)$, teremos que a série numérica

$$e^{-x_o} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} {x_o}^n$$

é uma série alternada, que satisfaz do critério da série alternada (veja o Teorema (3.6.1)).

Logo deste, segue que

$$|e^{-x_o} - S_n(x_o)| \leq a_{n+1}(x_o)\,,$$

onde, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definimos

$$a_n(x_o) \doteq \frac{{x_o}^n}{n!} \tag{6.193}$$

e $S_n(x_o)$ denota a soma parcial de ordem $\underline{n}$ da série numérica acima, isto é,

$$\left| e^{-x_o} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k} {x_o}^k \right| \leq \frac{{x_o}^{n+1}}{(n+1)!}\,. \tag{6.194}$$

Isto pode nos ser útil para obter aproximações de e^{-x_o}, para cada $x_o \in (0\,,\infty)$, por meio das somas parciais da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} {x_o}^n$, sabendo-se que o erro será menor ou igual a

$$\frac{{x_o}^n}{n!}\,.$$

Com isto, fazendo $x_o = 1$ em (6.194), obteremos, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, que:

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}. \tag{6.195}$$

Observemos que para que

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-4} \quad \text{se, e somente se,} \quad (n+1)! > 10^4,$$

que ocorre quando

$$n > 7\,,$$

pois

$$8! = 40320 > 10^4\,.$$

Logo, de (6.195), segue que

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{8!} < 10^{-4}\,.$$

Notemos que

$$S_7(1) = \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k}{k} \sim 0,36786$$

é uma aproximação de e^{-1}, com erro inferior a 10^{-4}, completando a resolução.

□

Exercício 6.5.2 *Calcule um valor aproximado de*

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \tag{6.196}$$

com um erro inferior a 10^{-4}*, ou seja, três casas decimais exatas.*

Resolução:

Do Exemplo (5.3.7) segue que

$$e^y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,y^n\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.197}$$

Logo, fazendo $y \doteq -x^2$ em (6.197), obteremos

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\left(-x^2\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,x^{2n}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{6.198}$$

Portanto, do Teorema (6.4.1), a série de potência (6.198) acima, pode ser integrada, termo a termo, no intervalo $[0,1]$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2}\,dx &\overset{(6.198)}{=} \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,x^{2n}\right] dx \\ &\overset{(6.102)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!}\,x^{2n}\right] dx \\ &\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\,x^{2n+1}\Big|_{x=0}^{x=1}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\,. \end{aligned} \tag{6.199}$$

Observemos que a série numérica acima é uma série alternada que satisfaz do critério da série alternada (veja o Teorema (3.6.1)).

Assim, do critério da série alternada, segue que

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx - S_n\right| \le a_{n+1}\,, \tag{6.200}$$

onde, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definimos

$$a_n \doteq \frac{1}{n!\,(2n+1)} \tag{6.201}$$

e $S_n(x_o)$ denota a soma parcial de ordem $\underline{n}$ da série numérica acima, isto é,

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)}\,. \tag{6.202}$$

Observemos que para que

$$\frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)} < 10^{-4} \quad \text{se, e somente se} \quad (n+1)!\,(2n+3) > 10^4\,,$$

que ocorrerá, por exemplo, se

$$n > 5\,,$$

pois

$$6!\,15 = 10800 > 10^4\,.$$

Logo

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}dx - \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}\right| \leq \frac{1}{6!15} < 10^{-4}\,.$$

Notemos que

$$S_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \sim 0,74684$$

será uma aproximação de e^{-1}, com erro inferior a 10^{-4}, completando a resolução.

□

6.6 Série de Taylor e de McLaurin

Lembraremos de um resultado importante do Cálculo I, que nos será muito útil logo à frente, a saber o Teorema do Valor Médio:

Teorema 6.6.1 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a\,,b]$ *e diferenciável em* $(a\,,b)$.

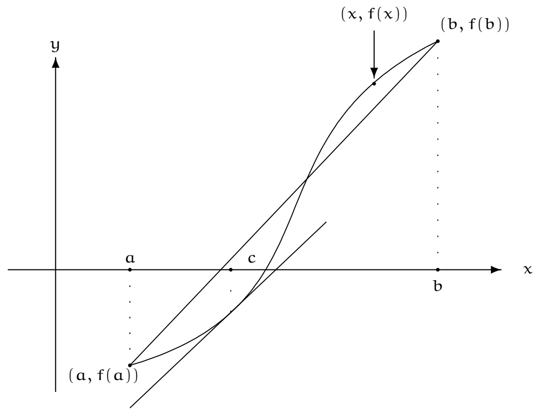
Então podemos encontrar $c \in (a\,,b)$ *tal que*

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,,$$

ou equivalentemente,

$$f(b) = f(a) + f\,'(c)\,(b - a)\,. \tag{6.203}$$

Geometricamente, temos a seguinte situação:



Observação 6.6.1

1. *O Teorema* (6.6.1) *acima nos diz que podemos determinar o valor da função* $\underline{f}$ *em* $x = b$ *(isto é,* $f(b)$*) conhencdo-se o valor da* $\underline{f}$ *em* $x = aa$ *(isto é,* $f(a)$*) e o valor da derivada da função* $\underline{f}$ *em um ponto intermediário* $\underline{c}$*, que está entre* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *(isto é,* $f'(c)$*, para algum* $c \in (a, b)$*).*

2. *Se para cada* $x \in [0, b]$*, a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $[0, x]$ *e diferenciável em* $(0, x)$ *então, do Teorema* (6.6.1) *acima (aplicado no intervalo* $[0, x]$*), segue que podemos encontrar* $c_x \in (0, x)$ *tal que*

$$f(x) = f(0) + f'(c_x)\, x\,. \tag{6.204}$$

Como consequência deste temos o Teorema de Rolle (também visto no Cálculo 1):

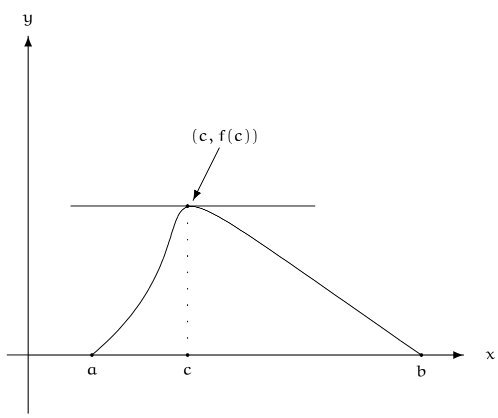
Teorema 6.6.2 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$*, diferenciável em* (a, b) *e satisfazendo*

$$f(a) = f(b) = 0\,. \tag{6.205}$$

Então podemos encontrar $c \in (a, b)$*, tal que*

$$f'(c) = 0\,. \tag{6.206}$$

Geometricamente temos a seguinte situação:



Demonstração:

Aplicando o Teorema (6.6.1), a segue que podemos encopntrar $c \in (a\,,b)$, de modo que

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overset{(6.205)}{=} 0\,,$$

concluindo a demonstração do resultado.

□

Podemos estender o Teorema do Valor Médio (isto é, o Teorema (6.6.1)), como mostra o:

Teorema 6.6.3 **(Teorema de Taylor)** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que a função $f^{(n)}$ é contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $(a\,,b)$ (isto é, existe $f^{(n+1)}$ em $(a\,,b)$).*

Então podemos encontrar um $c \in (a\,,b)$, de modo que

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) &+ \frac{f\,'(a)}{1!}\,(b-a) + \frac{f\,''(a)}{2!}\,(b-a)^2 + \frac{f\,'''(a)}{3!}\,(b-a)^3 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}\,. \end{aligned} \tag{6.207}$$

Demonstração:

Consideremos a função $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} F(x) \doteq f(b) - f(x) &- \frac{f\,'(x)}{1!}\,(b-x) - \frac{f\,''(x)}{2!}\,(b-x)^2 - \frac{f\,'''(x)}{3!}\,(b-x)^3 - \cdots \\ &- \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,(b-x)^n - \frac{k}{(n+1)!}\,(b-x)^{n+1}\,, \end{aligned} \tag{6.208}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é escolhido de modo que

$$F(a) = 0\,, \tag{6.209}$$

isto é,

$$\begin{aligned} k \doteq \Bigg[f(b) - f(a) &- \frac{f\,'(a)}{1!}\,(b-a) - \frac{f\,''(a)}{2!}\,(b-a)^2 - \frac{f\,'''(a)}{3!}\,(b-a)^3 - \cdots \\ &- \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n \Bigg] \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}. \end{aligned} \tag{6.210}$$

Notemos também que:

$$\begin{aligned} F(b) \doteq f(b) - f(b) &- \frac{f\,'(b)}{1!}\,(b-b) - \frac{f\,''(b)}{2!}\,(b-b^2 - \frac{f\,'''(b)}{3!}\,(b-b)^3 - \cdots \\ &- \frac{f^{(n)}(b)}{n!}\,(b-b)^n - \frac{k}{(n+1)!}\,(b-b)^{n+1} \\ = 0\,, \end{aligned} \tag{6.211}$$

Como a função $f^{(n)}$ é contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $(a\,,b)$, segue que a função $\underline{F}$ será contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $(a\,,b)$.

Para cada $x \in (a\,,b)$, temos que:

$$
\begin{aligned}
F\,'(x) &\overset{(6.208)}{=} 0 - f\,'(x) - \left[\frac{f\,''(x)}{1!}(b-x) + \frac{f\,'(x)}{1!}(-1)\right] - \left[\frac{f\,'''(x)}{2!}(b-x)^2 + \frac{f\,''(x)}{2!}\,2\,(b-x)\,(-1)\right] \\
&\quad - \left[\frac{f\,'''(x)}{3!}(b-x)^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^3 + \frac{f\,'''(x)}{3!}\,3\,(b-x)^2\,(-1)\right] - \cdots \\
&\quad - \left[\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,n\,(b-x)^{n-1}\,(-1)\right] - \frac{k}{(n+1)!}(b-x)^n\,(-1) \\
&= \frac{k - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n\,. \qquad (6.212)
\end{aligned}
$$

Como

$$F(b) \overset{(6.211)}{=} 0 \overset{(6.209)}{=} F(a)\,,$$

segue do Teorema de Rolle (isto é, o Teorema (6.6.2)), que podemos encontrar $c \in (a\,,b)$ tal que

$$
\begin{aligned}
& F'(c) = 0\,, \\
\text{que, de (6.212), implcará em:}\quad & f^{(n+1)}(c) = k\,. \qquad (6.213)
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{(6.209)}{=} F(a) \\
&\overset{(6.208)}{=} f(b) - f(a) - \frac{f\,'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f\,''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f\,'''(a)}{3!}(b-a)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\
&\quad - \frac{k}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\
&\overset{(6.213)}{=} f(b) - f(a) - \frac{f\,'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f\,''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f\,'''(a)}{3!}(b-a)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\
&\quad - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + \frac{f\,'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f\,''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f\,'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 6.6.2

1. *O Teorema (6.6.3) acima também é conhecido como* **Fórmula de Taylor com resto de Lagrange**.

2. *Com as hipóteses do Teorema (6.6.3) satisfeitas, para cada $x \in [a\,,b]$, se aplicarmos o Teorema de Taylor ao intervalo $[a\,,x]$ (isto é, o Teorema (6.6.3) no intervalo $[a\,,x]$), obteremos a seguinte expressão:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \end{aligned} \tag{6.214}$$

onde $c_x \in (a\,,x)$, que será denominada **<u>Fórmula de Taylor associada a função f, em $x = a$</u>** .

3. *Na situação acima, (6.214), pode ser reescrita na forma*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,, \tag{6.215}$$

onde

$$\begin{aligned} P_n(x) &\doteq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{6.216}$$

será dito **<u>polinômio de Taylor, de grau n, associado à função f, em $x = a$</u>** *e*

$$R_n(x) \doteq \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,, \tag{6.217}$$

será dito **<u>resto de Taylor, de grau n, associado à função f, em $x = a$</u>**.

Neste caso, (6.217) será dito **<u>resto de Taylor na forma de Lagrange</u>** *(1783-1813).*

4. *Na situação acima, se consideramros*

$$a = 0\,, \tag{6.218}$$

de (6.214), segue que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \end{aligned} \tag{6.219}$$

onde $c_x \in (0\,,x)$, que será dita **<u>fórmula de McLaurin associada à função f</u>**.

5. *Na situação acima, (6.219), pode ser reescrita na forma*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,, \tag{6.220}$$

onde

$$P_n(x) \doteq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{6.221}$$

será dito **polinômio de McLaurin, de grau $\underline{n}$, associado à função $\underline{f}$, em $x = a$** *e*

$$R_n(x) \doteq \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}\,, \tag{6.222}$$

será dito **resto de McLaurin, de grau $\underline{n}$, associado à função $\underline{f}$**.

6. *A fórmula de Taylor, isto é,* (6.214) *(ou a fórmula de McLaurin, ou seja,* (6.219)*), pode ser usada para aproximar uma função $\underline{f}$ "bem comportada", por um polinômio, que é o polinômio de Taylor associado à função $\underline{f}$, isto é ,*(6.216) *(ou o polinômio de McLaurin, ou seja,* (6.221)*), se soubermos controlar o resto de Taylor, isto é,* (6.217) *(ou o resto de McLaurin, ou seja,* (6.222)*).*

7. *Suponhamos que $f \in C^\infty([a\,,b]\,;\mathbb{R})$, e que podemos encontrar um limitante $\varepsilon > 0$, para o resto de Taylor associado a função $\underline{f}$ (isto é,* (6.217)*), mais precisamente,*

$$|R_n(x)| < \varepsilon\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{6.223}$$

Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} &|f(x) - P_n(x)| \overset{(6.215)}{=} |R_n(x)| \overset{(6.223)}{<} \varepsilon\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a,b]\,,\\ \textit{ou seja,} \quad &f(x) - \varepsilon < P_n(x) < f(x) + \varepsilon\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \end{aligned} \tag{6.224}$$

Portanto se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$, de modo que (6.223) *ocorra, teremos que* (6.224) *também ocorrerá, ou seja, a sequência de funções formada pelos polinômios de Taylor de ordem $\underline{n}$ (isto á a sequência de funções polinomiais $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$) irá convergir uniformemente, no intervalo $[a\,,b]$, para a função $\underline{f}$, ou ainda*

$$P_n \overset{u}{\to} f\,, \quad \textit{em } [a\,,b]\,, \tag{6.225}$$

onde, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, a função polinomial $\underline{P_n}$ é dada por (6.216).

8. *A expressão da fórmula de Taylor, isto é,* (6.214) *(ou da fórmula de McLaurin, ou seja,* (6.219)*) também é conhecida como* **desenvolvimento de Taylor (respectivamente, de McLaurin), de ordem $\underline{n}$, da função $\underline{f}$, em torno de $x = a$** .

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 6.6.1 *Encontrar a fórmula de McLaurin, de ordem $n \geq 5$, para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq x^4 - 2\,x^3 + 2\,x - 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.226}$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial).

Logo podemos aplicar o Teorema de Taylor (isto é, o Teorema (6.6.3)) em qualquer intevalo $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Em particular, se aplicarmos para

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b = x\,,$$

ou seja, aplicaremos fórmula de McLaurin (veja o item 4. da Observação (6.6.2)) que nos garante a existência de $c \in (0\,,x)$, se $x \in (0\,,\infty)$, ou $c \in (x\,,0)$, se $x \in (-\infty\,,0)$, de modo que:

$$f(x) \overset{(6.219)}{=} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}. \tag{6.227}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 2\,x^3 + 2\,x - 1\,, \quad \text{logo:} \quad f(0) = -1\,;\\
f\,'(x) &= 4\,x^3 - 6\,x^2 + 2\,, \quad \text{logo:} \quad f\,'(0) = 2\,;\\
f\,''(x) &= 12\,x^2 - 12\,x\,, \quad \text{logo:} \quad f\,''(0) = 0\,;\\
f\,'''(x) &= 24\,x - 12\,, \quad \text{logo:} \quad f\,'''(0) = -12;\\
f^{(4)}(x) &= 24\,, \quad \text{logo:} \quad f^{(4)}(0) = 24\,;\\
f^{(n)}(x) &= 0\,, \quad \text{para todo } n \geq 5\,, \quad \text{logo:} \quad f^{(n)}(c) = 0\,, \quad \text{para} \quad n \geq 5 \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned} \tag{6.228}$$

Sustituindo (6.228) em (6.227), obteremos

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{(6.219)}{=} f(0) + \frac{f\,'(0)}{1!}\,x + \frac{f\,''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f\,'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{n!}\,x^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\\
&\overset{(6.228)}{=} -1 + \frac{2}{1!}\,x + \frac{0}{2!}\,x^2 + \frac{(-12)}{3!}\,x^3 + \frac{24}{4!}\,x^4 + \frac{0}{5!}\,x^5\\
&= x^4 - 2\,x^3 + 2\,x - 1\,,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, a própria função (que é um polinômio!).

□

Exemplo 6.6.2 *Encontrar a fórmula de McLaurin, de ordem $n \in \mathbb{N}$, da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.229}$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$.

Logo podemos aplicar o Teorema de Taylor (isto é, o Teorema (6.6.3)) em qualquer intevalo $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Em particular, se aplicarmos para

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b = x\,,$$

ou seja, aplicaremos fórmula de McLaurin (veja o item 4. da Observação (6.6.2)), que nos garante a existência de $c \in (0\,, x)$, se $x \in (0\,, \infty)$, ou $c \in (x\,, 0)$, se $x \in (-\infty\,, 0)$, de modo que:

$$f(x) \overset{(6.219)}{=} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}. \tag{6.230}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{logo:} \quad f(0) = 0\,;\\
f'(x) &= \cos(x)\,, \quad \text{logo:} \quad f'(0) = 1\,;\\
f''(x) &= \operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{logo:} \quad f''(0) = 0\,;\\
f'''(x) &= -\cos(x)\,, \quad \text{logo:} \quad f'''(0) = -1\,;\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{logo:} \quad f^{(4)}(0) = 0\,.
\end{aligned} \tag{6.231}$$

Em geral,

$$f^{(2n)}(x) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(2n+1)}(x) = \pm 1\,,$$

mais precisamente,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \text{ é par;}\\ (-1)^{\frac{n+3}{2}}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}\,. \tag{6.232}$$

Susbtituindo (6.232) em (6.230), obteremos:

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{(6.219)}{=} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{n!}\,x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,, x^{n+1}\\
&\overset{(6.232)}{=} 0 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{0}{2!}\,x^2 - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{0}{4!}\,x^4 + \frac{1}{5!}\,x^5 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,,
\end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

□

Observação 6.6.3 *Observemos que o resto de McLaurin de ordem* $(n+1)$*, associado à função* $\underline{f}$ *do Exemplo* (6.6.2) *acima (veja* (6.222)*), terá a seguinte propriedade:*

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\overset{(6.222)}{=} \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\right|\\
&= \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\,|x|^{n+1}\\
&\overset{(6.234)}{\leq} \frac{1}{(n+1)!}\,|x|^{n+1},
\end{aligned} \tag{6.233}$$

pois

$$f^{(n+1)}(c) = \pm\operatorname{sen}(c) \quad \textit{ou} \quad f^{(n+1)}(c) = \pm\cos(c)\,,$$

implicando que

$$\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1\,, \quad \textit{para cada} \quad c \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{6.234}$$

Assim, se

$$|x| \leq b\,,$$

segue, de (6.234), que

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\, b^{n+1}\,. \tag{6.235}$$

Notemos que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, b^{n+1}$$

é convergente em $\mathbb{R}$.

Para verificar este fato, basta aplicar o critério da razão por limites para séries numéricas cujos termos são não-negativos (isto é, o item 1. do Teorema (3.5.5)).

Deixaremos os detalhes da verificação deste fato como exercício para o leitro.

Logo , do critério da divergência para séries numéricas (isto é, o Teorema (3.4.2)), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, b^{n+1} = 0\,,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$, *de modo que se* $n \geq N_o$ *temos*

$$|R_n(x)| < \varepsilon\,, \qquad \textit{para todo} \quad x \in [-b\,, b]\,.$$

Portanto, para $n \geq N_o$, *o polinômio de McLaurin, calculado em* $x \in [-b\,, b]$, *associado à função* $\underline{f}$, *aproximar-se-á do valor da função* $\underline{f}$ *em* $\underline{x}$ *(ou seja, de* $f(x) = \mathrm{sen}(x)$*), com erro menor que* $\varepsilon > 0$ *(o erro será o resto de McLaurin).*

Com isto podemos concluir que a sequência de funções formada pelos polinômios de McLaurin, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$, *em cada intervalo limitado e fechado da reta* $\mathbb{R}$.

Acabamos de exibir um modo de aproximar uma função $\underline{f}$, *por um polinômio, no caso, por meio da fórmula de McLaurin.*

Podemos obter uma outra expressão para o resto de Taylor de ordem $(n+1)$, associado à uma função $\underline{f}$, em $x = a$, isto é, $R_n = R_n(x)$, dado por (6.217), chamado de **resto de Taylor na forma integral**:

Teorema 6.6.4 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ *uma função de modo que* $f^{(n+1)}$ *é uma função contínua em* $[a\,, b]$, $\underline{P_n}$ *e* $\underline{R_n}$ *são o polinômio de Taylor de ordem* $\underline{n}$, *associado à função* $\underline{f}$, *em* $x = a$, *e o resto de Taylor de ordem* $\underline{n}$, *, associado à função* $\underline{f}$, *em* $x = a$, *respectivamente, dados por (6.216) e (6.217).*

Então

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,, b]\,. \tag{6.236}$$

Demonstração:

A demonstração é feita por indução.

Daremos a seguir uma ideia da demonstração.

Do Teorema Fundamental do Cálculo segue que:

$$\begin{aligned} & f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt\,, \\ \text{ou seja,}\quad & f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt\,, \qquad (6.237) \\ \text{ou ainda,}\quad & f(x) = P_o(x) + R_o(x)\,, \end{aligned}$$

onde

$$P_o(x) \doteq f(a) \quad \text{e} \quad R_o(x) \doteq \int_a^x f'(t)\,dt\,.$$

Com isto mostramos que o resultado é valido para $n = 0$.

Utilizando (6.237) e integração por partes na integral definida, teremos:

$$\begin{aligned} f(x) & \overset{(6.237)}{=} f(a) + \int_a^x \underbrace{f'(t)}_{=u}\,\underbrace{dt}_{=dv} \\ & \underset{=}{\left\langle \begin{array}{l} u \doteq f'(t)\,,\ \text{logo: } du = f''(t)\,dt \\ dv \doteq dt\,,\ \text{logo: } v = t - x \end{array} \right\rangle} f(a) + \left[(t-x)\,f'(t) \Big|_{t=a}^{t=x} \right] - \int_a^x (t-x)\,f''(t)\,dt \\ & = f(a) + (x-x)\,f'(x) - (a-x)\,f'(a) - \int_a^x (t-x)\,f''(t)\,dt \\ & = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \int_a^x (x-t)\,f''(t)\,dt \qquad (6.238) \\ & = P_1(x) + R_1(x)\,, \end{aligned}$$

onde

$$P_1(x) \doteq f(a) + f'(a)\,(x-a) \quad \text{e} \quad R_1(x) \doteq \int_a^x (x-t)\,f''(t)\,dt\,.$$

Com isto mostramos que o resultado é valido para $n = 1$.

Utilizando (6.238) e integração por partes na integral definida, teremos:

$$\begin{aligned} f(x) & \overset{(6.238)}{=} f(a) + f'(a)\,(x-a) + \int_a^x (x-t)\,f''(t)\,dt \\ & \left\langle \begin{array}{l} u \doteq f''(t)\,,\ \text{logo: } du = f'''(t)\,dt \\ dv \doteq (x-t)\,dt\,,\ \text{logo: } v = -\dfrac{(x-t)^2}{2} \end{array} \right\rangle \\ & = f(a) + f'(a)\,(x-a) - \left[\frac{(x-t)^2}{2} f''(t) \Big|_{t=a}^{t=x} \right] + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}\, f'''(t)\,dt \\ & = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}\, f'''(t)\,dt \\ & = P_2(x) + R_2(x)\,, \end{aligned}$$

onde

$$P_2(x) \doteq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \quad \text{e} \quad R_2(x) \doteq \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,.$$

Com isto mostramos que o resultado é valido para $n = 2$.

Podemos prosseguir utilizando integração por partes uma vez mais.

A prova pode ser completada utilizando-se indução matemática e esses detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

□

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 6.6.3 *Encontrar o desenvolvimento de McLaurin de ordem* $\underline{n}$*, para a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq e^x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.239}$$

Resolução:

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f^{(n)}(x) = e^x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.240}$$

em particular

$$f^{(n)}(0) = 1\,, \quad \text{para cada} \quad \geq 0\,. \tag{6.241}$$

Assim, da fórmula de MacLaurin (isto é, (6.219)), segue que, existe $c_x \in (0\,,x)$, se $x \in (0\,,\infty)$, ou $c_x \in (x\,,0)$, se $x \in (-\infty\,,0)$, tal que:

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(6.219)}{=} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &\overset{(6.241)}{=} 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{c_x}}{(n+1)!}x^{n+1}\,. \end{aligned} \tag{6.242}$$

Neste caso, o polinômio de McLaurin de ordem $\underline{n}$, associados à função $\underline{f}$, será dado por:

$$P_n(x) \doteq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.243}$$

e o resto de McLaurin de ordem $\underline{n+1}$, associados à função $\underline{f}$, será dado por:

$$R_n(x) \doteq \frac{e^{c_x}}{(n+1)!}x^{n+1}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.244}$$

ou seja, (6.242), (6.243) e (6.244), teremos:

$$e^x \overset{(6.239)}{=} f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.245}$$

□

Observação 6.6.4 *Observemos que, se*

$$x \in [a\,,b]\,,$$

podemos encontrar $M \in (0\,,\infty)$, *de modo que*

$$[a\,,b] \subseteq [-M\,,M]\,,$$

e assim, teremos

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\overset{(6.244)}{=} \left| \frac{e^c}{(n+1)!}\,x^{n+1} \right| \\
&\frac{e^c_x}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} \\
&\overset{c_x \in (-M\,,M)\ \text{e exponencial é crescente:}}{\leq} \frac{e^M}{(n+1)!}|x|^{n+1} \\
&\overset{|x|\leq M}{\leq} \frac{e^M}{(n+1)!}\,M^{n+1} \overset{\text{veja (6.235) do Exemplo (6.6.2)}}{\longrightarrow} 0\,,
\end{aligned} \tag{6.246}$$

quando $n \to \infty$.

Ou seja, a sequência de funções formada pelos polinômios de McLaurin, associados à função $\underline{f}$, *isto é, a sequência de funções* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde, para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *a função polinomial* $\underline{P_n}$ *é dada por* (6.243), *converge uniformemente para* $\underline{f}$, *no intervalo fechado e limitado* $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{P_n}$ *é a soma parcial de ordem* $\underline{n}$, *associada a série de potências*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\,, \tag{6.247}$$

das discussões acima (isto é, de (6.245) *e* (6.246)*), podemos concuir que a série de potências* (6.247) *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$, *em* $[a\,,b]$.

Em particular, teremos

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.248}$$

Temos também o:

Exemplo 6.6.4 *Encontrar o desenvolvimento de McLaurin para a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.249}$$

Resolução:

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que temos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x)\,, & \text{logo:} \quad & f(0) = \cos(0) = 1\,,\\
f'(x) &= -\operatorname{sen}(x)\,, & \text{logo:} \quad & f'(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0\,,\\
f''(x) &= -\cos(x)\,, & \text{logo:} \quad & f''(0) = -\cos(0) = -1\,,\\
f'''(x) &= \operatorname{sen}(x)\,, & \text{logo:} \quad & f'''(0) = \operatorname{sen}(0) = 0\,,\\
f^{(4)}(x) &= \cos(x)\,, & \text{logo:} \quad & f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1\,.
\end{aligned} \tag{6.250}$$

Cm isto teremos que:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\,, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

Assim, da fórmula de MacLaurin (isto é, (6.219)), segue que, existe $c_x \in (0\,,x)$, se $x \in (0\,,\infty)$, ou $c_x \in (x\,,0)$, se $x \in (-\infty\,,0)$, tal que:

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(6.219)}{=} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,x^{n+1} \\ &\overset{(6.250)}{=} 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c_c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,. \end{aligned} \tag{6.251}$$

Neste caso, o polinômio de McLaurin de ordem $\underline{n}$, associados à função $\underline{f}$, será dado por:

$$P_n(x) \doteq 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.252}$$

e o resto de McLaurin de ordem $\underline{n+1}$, associados à função $\underline{f}$, será dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,, \tag{6.253}$$

ou seja, (6.251), (6.252) e (6.253), teremos:

$$\cos(x) \overset{(6.249)}{=} f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.254}$$

□

Observação 6.6.5 *Observemos que, se*

$$x \in [a\,,b]\,,$$

podemos encontrar $M \in (0\,,\infty)$*, de modo que*

$$[a\,,b] \subseteq [-M\,,M]\,,$$

e assim, teremos

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\overset{(6.253)}{=} \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\right| \\ &\overset{|f^{(n+1)}(c)| \overset{(6.250)}{\leq} 1}{\leq} \frac{1}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} \\ &\overset{|x|\leq M}{\leq} \frac{1}{(n+1)!} M^{n+1} \\ &\overset{\textit{veja } (6.235) \textit{ do Exemplo } (6.6.2)}{\longrightarrow} 0\,, \end{aligned} \tag{6.255}$$

quando $n \to \infty$.

Ou seja, a sequência de funções formada pelos polinômios de McLaurin, associados à função $\underline{f}$, isto é, a sequência de funções $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, a função polinomial $\underline{P_n}$ é dada por (6.252), converge uniformemente para $\underline{f}$, no intervalo fechado e limitado $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{P_n}$ é a soma parcial de ordem $\underline{n}$, associada a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n\,, \tag{6.256}$$

das discussões acima (isto é, de (6.254) e (6.255)), podemos concuir que a série de potências (6.256) converge uniformemente para a função $\underline{f}$, em $[a\,,b]$.

Em particular, teremos

$$\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.257}$$

6.7 Representação de Funções em Séries de Potências

Como vimos no Corolário (6.5.1), podemos utilizar uma série de potências para definir uma função, cujo domínio será o intervalo de convergência da série de potências.

Lembremos que (veja o Corolário (6.5.1)), se $R \in (0\,,\infty]$ é o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, então a função $f : (-R\,,R) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-R\,,R)\,, \end{aligned} \tag{6.258}$$

está bem definida e pertencerá a $C^\infty((-R\,,R)\,;\mathbb{R})$.

Definição 6.7.1 *Na situação acima, diremos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ é uma* **representação da função $\underline{f}$, por meio de uma série de potências**, *ou ainda, que a função $\underline{f}$ pode ser* **representada pela série de potências** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Para ilustrar temos o:

Exemplo 6.7.1 *Representar a função $f : (-1\,,1) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{1+x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,, \tag{6.259}$$

em série de potências de $\underline{x}$, em $(-1\,,1)$.

Resolução:

Observemos que (veja (6.175), trocado-se $\underline{x}$ *por* $\underline{-x}$*) a série de potências*

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(6.259)}{=} \frac{1}{1+x} \\ &\overset{(6.175)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1,1), \end{aligned} \tag{6.260}$$

pode ser derivada termo a termo, para $x \in (-1,1)$*, quantas vezes quisermos.*

Para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, definamos*

$$a_n \doteq (-1)^n. \tag{6.261}$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(6.259)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\ &\overset{(6.261)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1,1). \end{aligned} \tag{6.262}$$

Notemos que

$$f(0) \overset{(6.259)}{=} 1 \overset{(6.261)}{=} a_o = a_o\, 0!\,.$$

Observemos também que, para $x \in (-1,1)$*, temos:*

$$\begin{aligned} f'(x) &\overset{(6.260)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right] \\ &\overset{\textit{Teorema } (6.5.1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{d}{dx} x^n\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n\, x^{n-1}, \end{aligned} \tag{6.263}$$

$$\textit{em particular,} \quad f'(0) \overset{(6.263) \textit{ com } x=0}{=} -1 \overset{(6.261)}{=} a_1\, 1!\,.$$

De modo semelhante, temos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}[f'(x)] \\ &\overset{(6.263)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n\, x^{n-1}\right] \\ &\overset{\textit{Teorema } (6.5.1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n \left[\frac{d}{dx} x^{n-1}\right] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, n\, (n-1)\, x^{n-2}, \end{aligned} \tag{6.264}$$

$$\textit{em particular,} \quad f''(0) \overset{(6.264) \textit{ com } x=0}{=} 2 \overset{(6.261)}{=} a_2\, 2!\,.$$

Podemos repetir o procedimento e assim, obter

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{d}{dx}\left[f''(x)\right] \\ &\overset{(6.264)}{=} \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\, n\,(n-1)\, x^{n-1}\right] \\ &\overset{\textit{Teorema } (6.5.1)}{=} \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\, n\,(n-1)\, \frac{d}{dx}\left[x^{n-1}\right] \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\, n\,(n-1)\,(n-2)\, x^{n-3}, \end{aligned} \tag{6.265}$$

$$\textit{em particular,} \quad f'''(0) \overset{(6.265)\ \textit{com}\ x=0}{=} -6 \overset{(6.261)}{=} a_3\, 3!\,.$$

Assim, neste exemplo, podemos mostrar (por indução) que

$$f^{(n)}(0) = a_n\, n!\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,,$$

isto é,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \cdots\,,$$

para $x \in (-1\,,1)$

Como veremos, no resultado a seguir, isto ocorre em geral, a saber, temos o:

Teorema 6.7.1 *Consideremos* $a \in \mathbb{R}$ *e suponhamos que a função* $f:(a-R\,,a+R) \to \mathbb{R}$ *seja uma função dada por uma série de potências, centrada em* $x = a$*, ou seja,*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n, \quad x \in (a-R\,,a+R)\,. \tag{6.266}$$

Então $f \in C^{\infty}((a-R\,,a+R)\,;\mathbb{R})$ *com e, além disso, teremos:*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\,(x-a)^3 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \cdots \end{aligned} \tag{6.267}$$

ou seja, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, temos que*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,. \tag{6.268}$$

Demonstração:

Como a série de potências (6.266) converge para $x \in (a-R\,,a+R)$ segue que sua soma define uma função, $f:(a-R\,,a+R) \to \mathbb{R}$ que, do item 3. da Observação (6.5.2), segue que a função $\underline{f}$ pertencerá a $C^{\infty}((a-R\,,a+R)\,;\mathbb{R})$.

Além disso, a série de potências (6.266) pode ser derivada, termo a termo, no intervalo $(a-R\,,a+R)$, a qualquer ordem e, além disso, teremos:

$$f(x) \overset{(6.266)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n\,,$$

$$\text{logo:}\quad f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(a-a)^n = a_o\,0!;$$

$$f'(x) \overset{(6.172)\ \text{com}\ k=1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,n\,(x-a)^{n-1}\,,$$

$$\text{logo:}\quad f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,n\,(a-a)^{n-1} = a_1\,1!\,;$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\,n\,(n-1)\,(x-a)^{n-2}\,,$$

$$\text{logo:}\quad f''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\,n\,(n-1)\,(a-a)^{n-2} = a_2\cdot 2\cdot 1 = a_2\,2!\,;\,,$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(x-a)^{n-3}\,,$$

$$\text{logo:}\quad f'''(a) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(a-a)^{n-3} = a_3\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = a_3\,3!\,,$$

e assim, por indução, podemos mostrar que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\,n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)\,(x-a)^{n-k}\,,$$

para cada $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $x \in (a-R\,,a+\mathbb{R})$.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Em particular, segue que:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(a) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(a-a)^{n-k} \\ &= a_k\cdot k\cdot(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= a_k\,k!\,. \end{aligned} \tag{6.269}$$

Portanto, de (6.269), segue que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,,$$

para $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, comletando a demonstração

□

Observação 6.7.1

1. *A série de potências* (6.266), *será denominada* **série de Taylor da função $\underline{f}$, em $x = a$**.

   Para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *o número real* $\underline{a_n}$, *dado por* (6.268), *será denominado* **coeficiente de Taylor, de ordem $\underline{n}$, da função $\underline{f}$, em $x = a$** *ou* **$\underline{n}$-ésimo coeficiente de Taylor da função $\underline{f}$, em $x = a$** .

2. *Se no Teorema* (6.7.1) *acima,*
$$a = 0\,,$$
   a série de potências obtida será denominada **série de McLaurin da função** f, *isto é, se a série de potências*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n \tag{6.270}$$
   é converge em $(-R\,,R)$, *então a função soma da série de potências* (6.270), *que indicaremos por* $f:(-R\,,R) \to \mathbb{R}$, *terá a seguinte representação:*
$$f(x) = f(0) + f\,'(0)\,x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R\,,R)\,, \tag{6.271}$$
   isto é,
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,, \tag{6.272}$$
   que será denominado **coeficiente de MacLaurin, de ordem $\underline{n}$, da função $\underline{f}$** *ou* **$\underline{n}$-ésimo coeficiente de MacLaurin, da função $\underline{f}$, em $x = a$** .

3. *O Teorema* (6.7.1) *acima nos diz que se uma função* $f:(a - R\,, a + R) \to \mathbb{R}$ *possui representação em série de potências de* $(x-a)$ *(ou seja, centrada em* $x = a$*), então esta série de potências deverá ser a série de Taylor da função* $\underline{f}$, *em* $x = a$, *ou seja, temos a unicidade de representação em séries de potências.*

4. *O Teorema* (6.7.1) *acima* **não** *nos fornece condições suficientes para garantir a existência de uma representação em series de potências para uma dada função* $\underline{f}$.

Para isto tratar desta questão, temos o:

Teorema 6.7.2 *Suponhamos que a função* $f:(b\,,d) \to \mathbb{R}$ *tem derivada de qualquer ordem em* $(b\,,d)$, *isto é,* $f \in C^\infty((b\,,d))\,;\mathbb{R})$ *e* $a \in (b\,,d)$.

Suponhamos que
$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\,, \tag{6.273}$$
para cada $x \in (b\,,d)$ *onde, para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $R_n = R_n(x)$ *é o resto de Taylor, de ordem* $\underline{n}$, *associado a função* $\underline{f}$, *em* $x = a$, *ou ainda*
$$R_n(x) \doteq \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a-\delta\,, a+\delta) \subseteq (b\,,d)\,, \tag{6.274}$$
para algum $c_x \in (a-\delta\,, a+\delta)$, *para* $\delta > 0$, *suficientemente pequeno.*

Então a função $\underline{f}$ pode ser representada em série de Taylor em $x = a$, isto é,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a-\delta, a+\delta). \tag{6.275}$$

Demonstração:

Observemos que, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, temos que o polinômio de Taylor, de ordem $\underline{n}$, associado à função $\underline{f}$, em $x = a$, será dado por (veja (6.216))

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que coincide com a soma parcial, de ordem $\underline{n}$, da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ou seja, as somas parciais da série de potências associada a função $\underline{f}$, em $(x-a)$, são os polinômios de Taylor, associados a função $\underline{f}$, em $x = a$.

Mas

$$|f(x) - P_n(x)| \overset{(6.215)}{=} |R_n(x)| \xrightarrow{p} 0,$$

para cada $x \in (a-\delta, a+\delta)$, por hipótese.

Logo, da Definição (4.2.1), segue que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad \text{para cada} \quad x \in (a-\delta, a+\delta),$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 6.7.2

1. *Para cada $a \in (b, d)$, a convergência da série de potências (6.275) acima, será uniforme em qualquer intervalo fechado e limitado contido em dentro do interior do seu intervalo de convergência.*

   De fato, pois uma série de potências converge uniformemente em qualquer intervalo limitado e fechado contido no intervalo de convergência da série de potências.

2. *O resultado nos dá condições* **suficientes** *sobre uma função $\underline{f}$, para que ela possua uma representação em séries de Taylor, em $x = a$.*

3. *Exitem funções* $f \in C^{\infty}((b\,,d)\,;\,\mathrm{R})$, *cuja série de Taylor (ou de McLaurin)* **não** *converge para a função, como mostra o exemplo a seguir:*

   Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & \textit{para} \quad x \neq 0 \\ 0\,, & \textit{para}\ x = 0 \end{cases}. \tag{6.276}$$

   Afirmamos que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ *e que*

$$f^{(n)}(0) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\{\cup \mathbb{N}\,. \tag{6.277}$$

   Observemos que para $x \neq 0$, *da regra da cadeia, a função* $\underline{f}$, *tem derivada de qualquer ordem.*

   O problema é no ponto $x = 0$, *que passaremos a estudar a seguir.*

   Mostremos que a função $\underline{f}$ *é contínua em* $x = 0$.

   Para isto notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &\overset{x \neq 0 \ \textit{em}\ (6.276)}{=} \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &\overset{\lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty}{=} 0 \\ &\overset{x = 0 \ \textit{em}\ (6.276)}{=} f(0). \end{aligned}$$

   Portanto, a função $\underline{f}$ *é contínua em* $x = 0$.

   Mostremos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x = 0$.

   Para isto calculemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(h)}^{\overset{x \neq 0\ \textit{em}\ (6.276)}{=} e^{-\frac{1}{h^2}}} - \overbrace{f(0)}^{\overset{x = 0\ \textit{em}\ (6.276)}{=} 0}}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \\ &\overset{\textit{Exercício}}{=} 0\,. \end{aligned}$$

   Com isto mostramos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x = 0$ *e*

$$f\,'(0) = 0\,. \tag{6.278}$$

   Assim, da regra da cadeia (para $x \neq 0$*) e de* (6.278), *segue que a função* $f\,' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada*

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & \textit{para} \quad x \neq 0 \\ \\ 0\,, & \textit{para} \quad x = 0 \end{cases}. \tag{6.279}$$

   Pode-se mostrar que a função $\underline{f\,'}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Como a composta de funções contínuas é uma função contínua, segue que a função $\underline{f'}$ *é contínua em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Deixaremos como exercício para o leitor, mostrar que a $\underline{f'}$ *é contínua em* $x=0$.

Prosseguindo, por indução, podemos mostrar que $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *e que*

$$f^{(n)}(0)=0\,, \quad \textit{para cada} \quad n\in\{0\}\cup\mathbb{N}\,.$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Portanto a série de McLaurin associada à função $\underline{f}$, *será dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overbrace{f^{(n)}(0)}^{\stackrel{(6.277)}{=}0}}{n!}x^n=0\neq f(x)\,,$$

para $x\neq 0$, *isto é, a série de McLaurin associada à função* $\underline{f}$, **não** *converge para a própria função associada à função* $\underline{f}$ *(exceto se* $x=0$*).*

Introduziremos agora a:

Definição 6.7.2 *Seja* $\underline{I}$ *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$.

Diremos que uma função $f:I\to\mathbb{R}$ *é* **analítica (real) em** $\underline{I}$ *se para cada* $a\in I$, *podemos encontrar* $\delta=\delta(a)>0$, *de modo que a série de Taylor associada à função* $\underline{f}$, *em* $x=a$, *isto é, a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,,$$

for converge para $f(x)$, *para cada* $x\in(a-\delta\,,a+\delta)$, *isto é,*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in(a-\delta\,,a+\delta)\,. \tag{6.280}$$

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *será dita* **função inteira** *se ela for analítica em qualquer intervalo aberto de* $\mathbb{R}$.

A seguir daremos algumas funções e suas respectivas representações em série de potências (de McLaurin):

Exemplo 6.7.2 *Do Exemplo (6.6.3), temos que a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x)\doteq e^x\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\,, \tag{6.281}$$

possui representação em série de McLaurin na reta $\mathbb{R}$ *dada por*

$$e^x\stackrel{(6.248)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\,. \tag{6.282}$$

Exemplo 6.7.3 *Como consequência do Exemplo (6.6.2) e da Observação (6.6.3), segue que a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.283}$$

possui representação em série de McLaurin na reta $\mathbb{R}$*, dada por*

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.284}$$

Exemplo 6.7.4 *Do Exemplo (6.6.4), segue que a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.285}$$

possui representação em série de McLaurin na reta $\mathbb{R}$*, dada por*

$$\cos(x) \overset{(6.257)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.286}$$

Exemplo 6.7.5 *De (6.175), segue que a função* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{1-x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1), \tag{6.287}$$

possui representação em série de McLaurin em $(-1, 1)$*. dada por*

$$\frac{1}{1-x} \overset{(6.175)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1). \tag{6.288}$$

Exemplo 6.7.6 *Da Observação (6.4.3), segue que a função* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{arctg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1), \tag{6.289}$$

possui representação em série de McLaurin em $(-1, 1)$*, dada por*

$$\operatorname{arctg}(x) \overset{(6.136)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1). \tag{6.290}$$

Exemplo 6.7.7 *Do item 2. da Observação (6.4.2), segue que a função* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \ln(x+1), \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1), \tag{6.291}$$

possui representação em série de McLaurin em $(-1, 1)$*, dada por*

$$\ln(x+1) \overset{(6.121)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1). \tag{6.292}$$

A seguir vamos obter uma representação em série de Taylor para:

Exemplo 6.7.8 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.293}$$

Obter uma representação da função $\underline{f}$ *em série de Taylor, em* $x = \dfrac{\pi}{6}$.

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$.

Além disso, par $\delta > 0$ fixado, para cada

$$\left|x - \frac{\pi}{6}\right| < \delta\,, \tag{6.294}$$

temos que o resto de Taylor, de ordem $\underline{n}$, associado à função $\underline{f}$, em $x = \dfrac{\pi}{6}$, satisfaz:

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\overset{(6.274)}{=} \left|\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n\right| \\
&\overset{|f^{(k)}(x)|\leq 1}{\leq} \frac{\left|x - \frac{\pi}{6}\right|^n}{(n+1)!} \\
&\overset{(6.294)}{=} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \overset{\text{Exemplo (6.6.2)}}{\to} 0\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad \left|x - \frac{\pi}{6}\right| < \delta\,.$$

Logo, do Teorema (6.7.2) acima (com $a \doteq \dfrac{\pi}{6}$), segue que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{n!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.295}$$

Mas,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\,, & k = 4\,m\,, \text{ para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,, \\ \cos(x)\,, & k = 4\,m + 1\,, \text{ para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,, \\ -\operatorname{sen}(x)\,, & k = 4\,m + 2\,, \text{ para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ -\cos(x)\,, & k = 4\,m + 3\,, \text{ para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \end{cases}.$$

Logo

$$f^{(k)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,, & k = 4\,m\,, \text{ para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, & k = 4\,m + 1\,, \text{ para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\,, & k = 4\,m + 2\,, \text{ para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\[2ex] -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, & k = 4\,m + 3\,, \text{ para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \end{cases}. \tag{6.296}$$

Assim, substituindo (6.296) em (6.295), obteremos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{n!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Observemos que a convergência da série de potências acima será uniforme, em cada intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

□

Observação 6.7.3

1. *Todas as funções dos Exemplos acima são analíticas nos seus respectivos domínios.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Lembremos que se* $0 \in (-a, a)$ *e* $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ *é uma função ímpar então*

   $$f(0) = 0. \tag{6.297}$$

   De fato, pois

   $$f(-x) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (-a, a).$$

   Logo $-x \in (-a, a)$ *e assim*

   $$\begin{aligned}
   & f(-0) = -f(0) = f(0), \\
   \textit{ou seja,} \quad & 2\,f(0) = 0, \\
   \textit{assim:} \quad & f(0) = 0,
   \end{aligned}$$

   como afirmamos.

2. *Seja* $R \in (0, \infty]$.

   Observemos que se uma função $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *possui representação em série de McLaurin no intervalo* $(-R, R)$ *e ela é uma função par, isto é,*

   $$f(-x) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (-a, a),$$

   então sua série de McLaurin só apresentará potências pares (isto é, do tipo x^{2n}*), ou seja, os coeficientes das potências ímpares (isto é, de* x^{2n+1}*) serão iguais a zero.*

   Lembremos que a função $\underline{f}$*, em particular, deverá ter derivada de qualquer ordem em* $(-R, R)$.

   De fato, pois se a função $\underline{f}$ *é uma função par então, da regra da cadeia, segue que sua função derivada, isto é, a função* $f' : (-R, R) \to \mathbb{R}$*, será uma função ímpar.*

A verifiacação deste dao será deixado como exercício para o leitor.

Logo, de (6.297)*, segue que*

$$f'(0) = 0\,. \tag{6.298}$$

Suponhamos que a função $\underline{f'}$ *é uma função ímpar então, da regra da cadeia, segue que sua função derivada segunda, isto é,* $f'' : (-R\,, R) \to \mathbb{R}$ *será uma função par.*

Logo, novamente, da regra da cadeia, segue que sua função derivada terceira, isto é, $f''' : (-R\,, R) \to \mathbb{R}$ *será uma função ímpar e assim, de* (6.297)*, deveremos ter:*

$$f'''(0) = 0\,. \tag{6.299}$$

Prosseguindo o raciocício, por indução, podemos mostrar que todas as derivadas de ordem ímpar, isto é, $f^{(2n+1)}$*, serão funções ímpares.*

Logo deveremos ter

$$f^{(2n+1)}(0) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,. \tag{6.300}$$

Portanto a série de McLaurin associada à função $\underline{f}$ *(veja* (6.271)*) tornar-se-á:*

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(6.271)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \\ &\overset{(6.300)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\, x^{2n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R\,, R)\,. \end{aligned}$$

3. *Seja* $R \in (0\,, \infty]$*.*

   De modo análogo, se uma função $f : (-R\,, R) \to \mathbb{R}$ *possui representação em série de McLaurin* $(-R\,, R)$ *e ela é uma função ímpar, isto é,*

$$f(-x) = -f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R\,, R)\,,$$

   então sua série de McLaurin só apresentará potências ímpares (isto é, do tipo x^{2n+1}*), ou seja, os coeficientes das potências pares (isto é, do tipo* x^{2n}*) serão iguais a zero, ou seja,*

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(6.271)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R\,, R)\,. \end{aligned}$$

   Para msotrar a afirmação acima, basta observar que se uma função é ímpar e é diferenciável em um intervalo aberto simétrico em relação à origem, então sua derivada será uma função par nesse intervalo aberto.

   Assim, de (6.297)*), segue que*

$$f^{(2n)}(0) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,. \tag{6.301}$$

Um resultado final sobre a convergência de séries de Taylor é dado pelo:

Teorema 6.7.3 *Sejam* $a \in \mathbb{R}$, $R \in (0, \infty]$ *e a função* $f : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ *tal que a função* f *tenha derivada de qualquer ordem em* $(a-R, a+R)$ *(isto é,* $f \in C^{\infty}((a-R, a+R); \mathbb{R})$*).*

Além disso, suponhamos que existe $M > 0$*, de modo que*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \quad \textit{para todo} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \quad \textit{e} \quad x \in (a-R, a+R). \tag{6.302}$$

Então a função f *pode ser representada em série de Taylor, em* $x = a$*, isto é,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a-R, a+R). \tag{6.303}$$

Demonstração:

Observemos que se

$$x \in (a-R, a+R) \quad \text{ou seja,} \quad |x-a| < R, \tag{6.304}$$

temos que o resto de Taylor, de ordem n, associado à função f, em $x = a$, vai satisfazer:

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\overset{(6.274)}{=} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \\
&\leq \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} | \, |x-a|^{n+1} \\
&\overset{(6.303) \text{ e } (6.304)}{\leq} \frac{M}{(n+1)!} R^{n+1} \\
&\overset{\text{Exemplo } (6.6.2)}{\to} 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Logo, do Teorema (6.7.2), segue que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad \text{para cada} \quad x \in (a-R, a+R),$$

como queríamos demonstrar.

□

Apliquemos o resultado acima ao:

Exemplo 6.7.9 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.305}$$

Mostre que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.306}$$

Resolução:

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$|f^{(n)}(x)| = \begin{cases} |\operatorname{sen}(x)|, & \text{para } n \text{ é par} \\ |\cos(x)|, & \text{para } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

ou seja,

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Teorema (6.7.3) acima, segue que série de MacLurin, associada a função f, converge para a função f, em $\mathbb{R}$, ou seja, vale (6.306).

□

Exemplo 6.7.10 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \cos(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.307}$$

Mostre que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.308}$$

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$|f^{(n)}(x)| = \begin{cases} |\cos(x)|, & \text{para } n \text{ é par} \\ |\operatorname{sen}(x)|, & \text{para } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

ou seja,

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Teorema (6.7.3) acima, segue que série de MacLurin, associada a função f, converge para a função f, em $\mathbb{R}$, ou seja, vale (6.308).

□

Observação 6.7.4 *Podemos mostrar que as funções dos dois exemplos acima são funções inteiras.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos resolver o:

Exemplo 6.7.11 *Encontre uma série numérica convergente cuja soma é igual a*

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx. \tag{6.309}$$

Resolução:

Do Exemplo (6.7.9) acima, temos que (veja (6.306)):

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{6.310}
$$

Notemos que, se $x \neq 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} &\overset{(6.310)}{=} \frac{1}{x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right] \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \\
&= 1 - \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} + \cdots.
\end{aligned} \tag{6.311}
$$

Observemos que em

$$x = 0,$$

a série de potências em (6.311), converge para $\underline{1}$.

Observação 6.7.5 *Isto nada mais é que uma outra demonstração do primeiro limite fundamental, a saber, que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Podemos mostrar que o raio de convergência da série de potências (6.311) é $R = \infty$.

Em particular, do Teorema (6.3.1), a série de potências (6.311), converge uniformemente em $[0, 1]$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo podemos integrar a série de potências (6.311), termo a termo, em $[0, 1]$, isto é,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx &\overset{(6.311)}{=} \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\, dx \right] \\
&\overset{(6.103)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\, dx \right] \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cáclulo}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \left[x^{2n+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)},
\end{aligned} \tag{6.312}
$$

finalizando o exercício.

□

Observação 6.7.6 *A série numérica (6.312) é uma série alternada, que satisfaz as condições do Teorema da série alternada (veja o Teorema (3.6.1)).*

Logo podemos concluir deste resultado que (na verdade de (3.224)), para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *teremos*

$$\left| \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx - S_n \right| \leq a_{n+1}\,,$$

onde,

$$S_n \doteq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)}\,,$$

isto é, $\underline{S_n}$ *é soma parcial de ordem* $\underline{n}$ *da série numérica (6.312) e*

$$a_n \doteq \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}\,,$$

ou seja,

$$\left| \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)!(2k+3)}\,. \tag{6.313}$$

Deste modo podemos obter uma aproximação para o valor da integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ *utlizando-se (6.313).*

6.8 Série Binomial

Do Binômio de Newton, segue o:

Teorema 6.8.1 *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *então*

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a^n\, b^{m-n}\,, \tag{6.314}$$

onde

$$\binom{m}{n} \doteq \frac{m!}{(m-n)!\,n!}\,. \tag{6.315}$$

Demonstração:

A demonstração desse fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 6.8.1

1. *Tomando-se*

$$a = 1 \quad e \quad b = x\,,$$

na expressão (6.314) *acima, obteremos:*

$$
\begin{aligned}
(1+x)^m &\overset{(6.314)}{=} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^{m-n} \\
&= 1 + m\,x + \frac{m\,(m-1)}{2!}\,x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{3!}\,x^3 \\
&\quad + \cdots + \frac{\overbrace{m\,(m-1)\cdots[m-(k-1)]}^{k-fatores}}{k!}\,x^k + \cdots + x^m\,,
\end{aligned}
$$

2. *A expressão acima coincide com a soma da série de McLaurin da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$
f(x) \doteq (1+x)^m\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.316}
$$

onde $m \in \mathbb{N}$ *está fixado.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

3. *Observemos que para* $\underline{m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}}$ *fixado, a série de potências*

$$
\begin{aligned}
&1 + m\,x + \frac{m\,(m-1)}{2!}\,x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{3!}\,x^3 + \cdots \\
&+ \frac{\overbrace{m\,(m-1)\cdots[m-(k-1)]}^{k-fatores}}{k!}\,x^k + \cdots\,,
\end{aligned}
\tag{6.317}
$$

é a soma da série de McLaurin que representa a função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$
f(x) \doteq (1+x)^m\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in I\,, \tag{6.318}
$$

onde $\underline{I}$ *é o intervalo de convergência da série de potências* (6.317).

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Definição 6.8.1 *A série de potências* (6.317) *será denominada* **<u>série binomial</u>**.

Observação 6.8.2

1. *Determinemos o raio de convergência da série binomial* (6.317).

   Para isto, observamos que, para cada $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ *fixado, e para cada* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *definamos:*

$$
a_n \doteq \frac{m\,(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{n!}\,. \tag{6.319}
$$

Com isto, teremos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{(6.319)}{=} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}}{\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|m-n|}{n+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m}{n+1}-\frac{n}{n+1}\right| = 1\,.$$

Portanto, do Teorema (6.2.3) (ou de (6.48)) o raio de convergência da série binomial (6.317) será igual a

$$R = 1\,,$$

ou seja, a série binomial (6.317)

$$\textit{converge em } (-1\,,1) \quad e \quad \textit{diverge em } (-\infty\,,-1)\cup(1\,,\infty)\,. \tag{6.320}$$

2. *Observemos que para $m \in \mathbb{N}$ fixado, a série binomial (6.317), tornar-se-á:*

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\,, \tag{6.321}$$

onde

$$a_1 = 1\,,$$
$$a_n = \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{n!}\,, \quad \textit{para cada} \quad n\in\{2\,,3\,,\cdots,m\},$$
$$a_n = 0 \quad \textit{para} \quad n \in \{m+1\,,m+2\,,m+3\,,\cdots\}\,.$$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 6.8.1 *Considere a função $f:(-1\,,1)\to\mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$
$$= (1+x)^{-\frac{1}{2}}\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in(-1\,,1)\,. \tag{6.322}$$

Encontrar uma em série de potências de $\underline{x}$, que represente a função $\underline{f}$ em $(-1\,,1)$.

Resolução:

Tomando-se

$$m = -\frac{1}{2}\,,$$

na expressão da série binomial (6.317), obteremos:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \\
\text{onde} \quad a_o &= 1\,, \\
a_n &= \frac{\overbrace{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left[-\frac{1}{2}-(n-1)\right]}^{n\text{-fatores}}}{n!}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}
\tag{6.323}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
a_o &= 1, \\
a_1 &\overset{n=1 \text{ em } (6.323)}{=} \frac{-\frac{1}{2}}{1!} \\
&= -\frac{1}{2}\,, \\
a_2 &\overset{n=2 \text{ em } (6.323)}{=} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!} \\
&= \frac{\frac{3}{4}}{2!} \\
&= \frac{3}{2^2\,2!}\,, \\
a_3 &\overset{n=3 \text{ em } (6.323)}{=} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!} \\
&= \frac{-1\cdot 3\cdot 5}{2^3\,3!}, \\
&\vdots \\
a_n &\overset{\text{por indução}}{=} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,(-1)^n}{2^n\,n!}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,
\end{aligned}
\tag{6.324}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\
&\overset{(6.324)}{=} 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}\,x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\,3!}\,x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,(-1)^n}{2^n\,n!}\,x^n + \cdots\,,
\end{aligned}
\tag{6.325}
$$

para cada $x \in (-1\,,1)$.

□

Como exercício para o leitor temos os

Exercício 6.8.1 *Encontrar o desenvolvimnto em série de McLaurin da função* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \end{aligned} \tag{6.326}$$

Resolução:

Como vimos no Exemplo (6.8.1) acima (na verdade em (6.326)), a série de McLaurin da função $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) \doteq (1+y)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{para cada} \quad y \in (-1\,,1)\,,$$

é dada por:

$$\begin{aligned} g(y) &= (1+y)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,y + \frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}\,y^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\,3!}y^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,(-1)^n}{2^n\,n!}\,y^n + \cdots, \end{aligned} \tag{6.327}$$

para cada $y \in (-1\,,1)$.

Logo, para $x \in (-1\,,1)$, temos que

$$y \doteq x^2 \in (-1\,,1)\,,$$

assim, de (6.327), teremos:

$$\begin{aligned} \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}\,\left(-x^2\right) + \frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}\,\left(-x^2\right)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\,3!}\,\left(-x^2\right)^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,(-1)^n}{2^n\,n!}\,\left(-x^2\right)^n + \cdots \\ &= 1 - (-1)\,\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}\,x^4 - (-1)\,\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\,3!}\,x^6 + \cdots \\ &\quad + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(-1)^n(-1)^n}{2^n\,n!}\,x^{2n} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}\,x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\,3!}\,x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!}\,x^{2n} + \cdots, \end{aligned} \tag{6.328}$$

para cada $x \in (-1\,,1)$.

□

Exercício 6.8.2 *Encontrar a série de McLaurin que represente a função* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{arcsen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \tag{6.329}$$

Resolução:

Observemos que, do Cálculo 1, sabemos que, para cada $x \in (-1\,,1)$, teremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsen}(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt\,. \end{aligned} \tag{6.330}$$

Do Exercício (6.8.1) acima, temos uma representação da função do integrando de (6.330) em série de potências.

Sabemos, pelo Teorema (6.4.1), que a série de potências (6.328) pode ser integrada, termo a termo, no intervalo $[0\,,x]$, se $x \in [0\,,1)$, ou em $[x\,,0]$, se $x \in (-1\,,0)$.

Com isto obteremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsen}(x) &\overset{(6.330)}{=} \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt \\ &\overset{(6.328)}{=} \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,t^{2n}\,dt\right] \\ &\overset{(6.103)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\int_0^x t^{2n}\,dt\right] \\ &\overset{\text{Cálculo 1}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{2n+1} t^{2n}\Big|_{t=0}^{t=x}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+1}\,x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!\,(2n+1)}\,x^{2n+1}\,,\end{aligned}$$

para cada $x \in (-1\,,1)$, ou seja,

$$\operatorname{arcsen}(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!\,(2n+1)}\,x^{2n+1}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1\,,1)\,. \tag{6.331}$$

6.9 Resolução de PVI's associados a EDO's via Séries de Potencias

A seguir daremos um método para encontrar solução para o problema de valor inicial (PVI) associado a uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), utilizando-se séries de potências.

Para o desenvolvimento do método precisamos supor que a solução do PVI pode ser representada em série de potências.

A verificação dessa condição será estudada no curso de Equações Diferenciais Ordinárias.

Para exemplificarmos o método, consideraremos o seguinte exemplo, que fisicamente corresponde ao movimento de um sistema massa-mola, com uma força externa agindo no sistema:

Exemplo 6.9.1 *Encontrar uma função* $x : (-R\,,R) \to \mathbb{R}$ *que possua representação em série de McLaurin, isto é,*

$$x(t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in (-R\,,R) \tag{6.332}$$

que satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} x\,''(t) + x(t) = \operatorname{sen}(t)\,, & \textit{para cada} \quad t \in (-R\,,R) \\ x(0) = 0 \\ x\,'(0) = 1 \end{cases} . \tag{6.333}$$

Resolução:

Suponhamos que (6.332) seja a representação da solução do PVI (6.333), no intervalo $(-R\,,R)$, para algum $R \in (0\,,\infty]$.

Do Teorema (6.5.1), temos que a série de potências (6.332) pode ser derivada, termo a termo, em $[a\,,b] \subseteq (-R,R)$, ou seja,

$$\begin{aligned} x\,'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\right] \\ &\overset{(6.153)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[a_n\, t^n\right] \\ &\overset{(6.153)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, t^{n-1} \end{aligned} \tag{6.334}$$

e assim:

$$\begin{aligned} x''(t) = (x\,')'(t) &\overset{(6.134)}{=} \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, t^{n-1}\right] \\ &\overset{(6.153)}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[a_n\, n\, t^{n-1}\right] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n\,(n-1)\, t^{n-2}\,, \end{aligned} \tag{6.335}$$

para cada $t \in (-R\,,R)$.

Do Exemplo (6.7.9) temos que (veja (6.306)):

$$\operatorname{sen}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, t^{2\,n+1}\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{6.336}$$

Logo substituindo (6.332), (6.335) e (6.336) na EDO de (6.333), obteremos, para cada $t \in (-R\,,R)$, a seguinte identidade:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n\,(n-1)\, t^{n-2}}_{\doteq I} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, t^{2\,n+1}\,. \tag{6.337}$$

Fazendo

$$m \doteq n - 2$$

na série de potências $\underline{I}$, (6.337) tornar-se-á:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+2)(m+1) t^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1},$$

ou seja (fazendo $m \doteq n$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+2)(n+1) + a_n] t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \tag{6.338}$$

para cada $t \in (-R, R)$.

Identificando os correspondentes termos nas duas séries de potências de (6.338), segue que (observemos que, no lado direito da identidade acima, os coeficientes dos termos das potências de ordem par, são todos iguais a zero), para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, teremos:

$$a_{2n+2} (2n+2)(2n+1) + a_{2n} = 0, \tag{6.339}$$

$$a_{[(2n+1)+2]} [(2n+1)+2] [(2n+1)+1] + a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!},$$

ou seja,

$$a_{2n+3} (2n+3)(2n+2) + a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \tag{6.340}$$

Notemos que, em (6.339), fazendo:

$$n = 0: \quad a_2 \cdot 2 + a_o = 0,$$

$$\text{ou seja,} \quad a_2 = -\frac{a_o}{2} \tag{6.341}$$

$$n = 1: \quad a_4 \cdot 4 \cdot 3 + a_2 = 0,$$

$$\text{ou seja,} \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} \overset{(6.341)}{=} \frac{a_o}{4 \cdot 3 \cdot 2}, \tag{6.342}$$

$$n = 2: \quad a_6 \cdot 6 \cdot 5 + a_4 = 0,$$

$$\text{ou seja,} \quad a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 5} \overset{(6.342)}{=} -\frac{a_o}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Por indução, pode-se mostrar que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_o, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.343}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Por outro lado, em (6.340), fazendo:

$$\begin{aligned}
n = 0 :&\quad a_3 \cdot 3 \cdot 2 + a_1 = 1\,,\\
\text{ou seja,}&\quad a_3 = \frac{1 - a_1}{3 \cdot 2}\,, \qquad (6.344)\\
n = 1 :&\quad a_5 \cdot 5 \cdot 4 + a_3 = -\frac{1}{3!}\\
\text{ou seja,}&\quad a_5 = \frac{-\frac{1}{3!} - a_3}{5 \cdot 4} \overset{(6.344)}{=} \frac{-2 + a_1}{5!}\,, \qquad (6.345)\\
n = 2 :&\quad a_7 \cdot 7 \cdot 6 + a_5 = \frac{1}{5!}\,,\\
\text{ou seja,}&\quad a_7 = \frac{\frac{1}{5!} - a_5}{7 \cdot 6} \overset{(6.345)}{=} \frac{3 - a_1}{7!}\,.
\end{aligned}$$

Por indução, pode-se mostrar que:

$$a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n - a_1}{(2n+1)!}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \qquad (6.346)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Deste modo obtemos os coeficientes

$$a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

e portanto a função $x = x(t)$, dada por (6.332), que será a candidata a solução do PVI (6.333).

Notemos que deveremos ter

$$0 = x(0) \overset{t=0 \text{ em } (6.332)}{=} a_o\,,$$

ou seja, de (6.343), segue que

$$a_{2n} = 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \qquad (6.347)$$

Por outro lado

$$1 = x'(0) \overset{t=0 \text{ em } (6.332)}{=} a_1$$

ou seja, de (6.346), segue que

$$a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n - 1}{(2n+1)!}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \qquad (6.348)$$

Logo, substituindo (6.347) e (6.348) em (6.332), obteremos

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(2n+1)!} t^{2n+1}\,, \quad \text{para cada} \quad t \in (-R, R)\,, \qquad (6.349)$$

será uma representação em série de MacLaurin da solução do PVI (6.333) em $(-R, R)$.

□

Observação 6.9.1

1. *Notemos que a série de potências* (6.349) *pode ser reescrita na seguinte forma:*

$$x(t) = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(2n+1)!} \left(t^2\right)^n, \quad \textit{para cada} \quad t \in (-R, R), \tag{6.350}$$

2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *definamos*

$$A_n \doteq \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(2n+1)!}. \tag{6.351}$$

Observemos que, que

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| \\ &\stackrel{(6.351)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^{(n+1)+1}[(n+1)-1]|}{[(2n+1)+1]!}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(2n+1)!}\right|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^{n+2} n|}{(2n+2)!}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(2n+1)!}\right|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(2n+1)!}{(2n+3)!\,(n-1)} \stackrel{\textit{Exercício}}{=} 0. \end{aligned}$$

Portanto, do Teorema (6.2.3) *(ou de* (6.48)*), segue que o raio de convergência da série de potências é*

$$R = \infty,$$

isto é, a série de potências converge em $\mathbb{R}$, *ou seja, a solução do PVI dada pela série de potências* (6.349) *pertencerá a* $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

3. *Notemos que na solução obtida em Exemplo* (6.9.1) *acima (isto é, em* (6.349)*), se fizermos*

$$t \to \infty,$$

teremos que

$$x(t) \to \infty.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

No curso Equações Diferencias Ordinárias será desenvolvido a teoria e outros exemplos associados a problemas do tipo acima.

6.10 Exercícios

Capítulo 7

Séries de Fourier

7.1 Introdução

Nas próximas seções estudaremos uma outra classe especial de séries de funções, denominadas <u>**séries de Fourier**</u>.

O objetivo é representar funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sejam periódicas (por exemplo, 2π-periódicas) na forma de uma série de funções que envolvem somente senos e cossenos.

Mais precisamente, para o caso 2π-periódico, corresponderia a representar uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é 2π-periódica "bem comportada" (que será explicitado no decorrer das notas) da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\,x) + b_n \operatorname{sen}(n\,x)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.1}$$

As perguntas que serão respondidas estarão relacionadas com os seguintes tópicos:

1. Se a função $\underline{f}$ puder ser representada na forma (7.1) acima, quem serão os coeficientes

$$\begin{aligned} & a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ \text{e os coeficientes} \quad & b_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\ ? \end{aligned} \tag{7.2}$$

2. Que propriedades a função $\underline{f}$ deve ter para pode ser representada na forma (7.1) acima?

3. Em que sentido a série de funções (7.1) converge pontualmente, uniformemente, em algum subconjunto de $\mathbb{R}$?

Na verdade estudaremos uma situação um pouco mais geral, a saber, para o caso em que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $2\,L$-periódica e a representação que procuraremos, para a função $\underline{f}$, será da forma

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\right]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in I \overset{\text{intervalo}}{\subseteq} \mathbb{R}\,. \tag{7.3}$$

Observação 7.1.1 *Notemos que no caso em que*

$$L = \pi$$

temos que a série de funções (7.3) *tornar-se-á a série de funções* (7.1) *acima.*

Para motivar o estudo das séries de funções do tipo (7.3), introduziremos um método (denominado **método da separação de variáveis**) que, como consequência, nos levará a necessidade de estudarmos funções que possuam representação em série de funções do tipo (7.3).

7.2 Método das Separação de Variáveis

Para motivar os tópicos que serão desenvolvidos nas próximas seções vamos introduzir um método para encontrar solução para uma Equação Diferencial Parcial (EDP) importante nas aplicações, denominada **Equação do Calor**.

Tal método, que pode ser aplicado a outros problemas relacionados com outras EDP's, por exemplo, a Equação da Onda, a Equação de Laplace e é denominado **Método da Separação de Variáveis**.

Como dito acima, aplicaremos o método para encontrar (ou tentar encontrar) uma solução para o problema da distribuição de calor, em um fio finito, de comprimento $L \in (0, \infty)$, para os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo, no instante inicial, ou seja, $t = 0$, que está isolado termicamente, por exemplo, o fio está dentro de um isopor, e cujas extremidades são mantidas temperatuda 0^o C, ao longo de todo o processo.

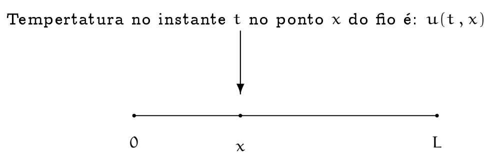
Vamos imaginar que o fio é o intervalo

$$[0, L] \subseteq \mathbb{R}$$

e que

$$u = u(t, x),$$

nos fornece a temperatura no ponto $x \in [0, L]$ do fio, no instante $t \in [0, \infty)$.



Matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar um função

$$u = u(t, x), \quad \text{para cada} \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L],$$

que venha satisfazer o seguinte problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \tag{7.4}$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [0, L], \tag{7.5}$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty). \tag{7.6}$$

A condição (7.5) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, a temperatura no ponto $x \in [0\,,L]$ do fio é igual a $f(x)\,{}^{o}C$.

A condição (7.6) nos diz que a temperatura nos extremos do fio igual a $0\,{}^{o}C$, ao longo de todo o processo, isto é, para $t \in [0\,,\infty)$.

A Equação Diferencial Parcial (7.4) é denominada **Equação do Calor**.

A constante

$$\alpha \in (0\,,\infty)\,,$$

está relacionada com a condutibilidade térmica do fio, isto é, depende do material que o fio é feito.

No nosso caso, vamos supor que

$$\alpha = 1\,.$$

O caso geral será tratado mais adiante.

O método que desenvolveremos a seguir é simples e o próprio nome já nos diz o que faremos.

Observemos, inicialmente que, por questões de compatibilidade, deveremos ter:

$$\begin{aligned} f(0) &\overset{x=0 \text{ em } (7.5)}{=} u(0\,,0) \\ &\overset{t=0 \text{ em } (7.6)}{=} 0 \\ &\overset{t=0 \text{ em } (7.6)}{=} u(0\,,L) \\ &\overset{x=L \text{ em } (7.5)}{=} f(L)\,, \\ \text{ou seja,} \quad & f(0) = f(L) = 0\,. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Do ponto de vista matemático é razoável, à primeira vista, procurarmos soluções $u = u(t,x)$ na seguinte classe:

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,\infty) \times (0\,,L)\,;\mathbb{R}) \tag{7.8}$$

o que implicará, por (7.5), que

$$f(\cdot) \overset{(7.5)}{=} u(0\,,\cdot) \overset{(7.9)}{\in} C([0\,,L]\,;\mathbb{R})\,, \tag{7.9}$$

A EDP (7.4) é uma equação importante que ocorre em muitas aplicações e também é um exemplo importante das EDP's lineares de tipo **parabólico**.

Um dos primeiros a estudar, de modo sistemático, o problema da condução de calor foi Joseph B. Fourier (1768-1830).

Ele desenvolveu o método que trataremos a seguir, dito **Método de Fourier**.

O método consiste em procurar soluções do problema acima do tipo

$$u(t\,,x) = \psi(t)\,\phi(x)\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x) \in [0\,,\infty) \times \in [0\,,L]\,, \tag{7.10}$$

isto é, soluções do **tipo variáveis separadas**, dai o nome do método.

Começaremos tentando soluções do tipo acima para (7.4), (7.6) e, posteriormente, utilizaremos (7.5).

De (7.8) e (7.10) segue que

$$\psi \in C([0,\infty);\mathbb{R}) \cap C^2((0,\infty);\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \phi \in C([0,L];\mathbb{R}) \cap C^2((0,L);\mathbb{R}). \tag{7.11}$$

Na verdade estaremos interessados em soluções não nulas, isto é,

$$u(t,x) \neq 0, \quad \text{para algum} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times x \in [0,L],$$

o que implicará que

$$\psi(t), \phi(x) \neq 0, \quad \text{para algum} \quad t \in [0,\infty) \ \text{ e } \ x \in [0,L]. \tag{7.12}$$

Supondo que as funções $\psi = \psi(t)$ e $\phi = \phi(x)$ satisfaçam (7.11), de (7.10), para cada $(t,x) \in (0,\infty) \times (0,L)$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &\overset{(7.10)}{=} \frac{\partial}{\partial t}[\psi(t)\,\phi(x)] \\ &= \psi'(t)\,\phi(x) \end{aligned} \tag{7.13}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &\overset{(7.10)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\psi(t)\,\phi(x)] \\ &= \psi(t)\,\phi''(x). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Substituindo (7.13) e (7.14) em (7.4), obteremos

$$\psi'(t)\,\phi(x) = \psi(t)\,\phi''(x), \quad \text{para cada} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L).$$

Dividindo a igualdade acima por $\psi(t)\,\phi(x)$ (nos pontos onde $\psi(t)\,\phi(x) \neq 0$), obteremos a seguinte identidade:

$$\frac{\psi'(t)\,\phi(x)}{\psi(t)\,\phi(x)} = \frac{\psi(t)\,\phi''(x)}{\psi(t)\,\phi(x)}, \quad \text{para cada} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L).$$

Como $\psi(t), \phi(x) \neq 0$, teremos:

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}, \quad \text{para cada} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L). \tag{7.15}$$

Notemos que o lado direito da identidade (7.15) acima, é uma função que depende de $\underline{x}$, enquanto o lado esquerdo da mesma é uma função que depende de $\underline{t}$.

Logo ambos deverão ser iguais a uma constante, que chamaremos de

$$-\lambda. \tag{7.16}$$

O motivo do sinal negativo será justificado mais adiante.

Portanto, de (7.15), segue que

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}, \quad \text{para cada} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L),$$

que darão origem a duas Equações Diferencias Ordinárias (EDO), a saber:

$$\psi\,'(t) = -\lambda\,\psi(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in (0\,,\infty)\,, \tag{7.17}$$
$$\phi\,''(x) = -\lambda\,\phi(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0\,,L)\,. \tag{7.18}$$

Impondo a condição (7.6), devermos ter:

$$\begin{aligned} \psi(t)\,\phi(0) &\overset{t=0 \text{ em } (7.10)}{=} u(t\,,0) \\ &\overset{(7.6)}{=} 0 \\ &\overset{(7.6)}{=} u(t\,,L) \\ &\overset{t=L \text{ em } (7.10)}{=} \psi(t)\,\phi(L) \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad \psi(t)\,\phi(0) = \psi(t)\,\phi(L)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0\,,\infty)\,. \tag{7.19}$$

Como

$$\psi(t) \neq 0\,, \quad \text{para algum} \quad t \in (0\,,\infty)\,,$$

dividindo ambos os membros da identidade (7.19) por $\psi(t)$, obteremos

$$\phi(0) = 0 = \phi(L)\,, \tag{7.20}$$

Portanto, de (7.18), (7.20) e (7.11), segue que a função $\phi = \phi(x)$ deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:

$$\phi\,''(x) = -\lambda\,\phi(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0\,,L) \tag{7.21}$$
$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \tag{7.22}$$
$$\phi \in C([0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,L)\,;\mathbb{R})\,. \tag{7.23}$$

Observação 7.2.1

1. *Um valor* $\underline{\lambda}$*, para os quais* (7.21)-(7.22) *admite solução, não nula, na classe* (7.23) *será dito* <u>**autovalor do problema (7.21)**</u>*, e as soluções não triviais da equação* (7.21)*, na classe*
   eqrefE8 serão ditas <u>**autofunções correspondentes ao autovalor λ**</u>.

2. *Como estamos procurando soluções reais, isto é,*

   $$u(t\,,x) \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{para cada} \quad (t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]\,,$$

   só nos interessará o caso em que

   $$\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

   O item a seguir mostrará que $\underline{\lambda}$ *deverá ser um número real maior do que zero, isto é, que*

   $$\lambda \in (0\,,\infty)\,.$$

3. *Afirmamos que*

$$\lambda \in (0\,,\infty) \tag{7.24}$$

(em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$*).*

De fato, suponhamos que a função $\phi = \phi(x)$ *satisfaz* (7.21), (7.22) *e* (7.23), *em* $[0\,,L]$, *para algum* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Afirmamos que existem os limites laterias

$$\phi\,''(0^+) \quad e \quad \phi\,''(L^-)\,.$$

De fato pois:

$$\begin{aligned}
\phi\,''(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \phi\,''(x) \\
&\overset{(7.21)}{=} -\lambda \lim_{x\to 0^+} \phi(x) \\
&\overset{(7.23)}{=} -\lambda\,\phi(0) \\
&\overset{(7.22)}{=} 0
\end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
\phi\,''(L^-) &= \lim_{x\to L^-} \phi\,''(x) \\
&\overset{(7.21)}{=} -\lambda \lim_{x\to L^-} \phi(x) \\
&\overset{(7.23)}{=} -\lambda\,\phi(L) \\
&\overset{(7.22)}{=} 0\,,
\end{aligned} \tag{7.26}$$

ou seja, de (7.25) *e* (7.26), *segue que*

$$\phi\,''(0^+) = 0 = \phi\,''(L^-)\,. \tag{7.27}$$

Por outro lado, como $\phi \in C([0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,L)\,;\mathbb{R})$, *para* $x \in (0\,,L)$, *teremos:*

$$\begin{aligned}
-\lambda \int_0^x \phi(y)\,dy &= \lim_{a\to 0^+}\left[\int_a^x -\lambda\,\phi(y)\,dy\right] \\
&\overset{(7.21)}{=} \lim_{a\to 0^+}\left[\int_a^x \phi\,''(y)\,dy\right] \\
&\overset{\text{Teor. Fundamental do Cálculo}}{=} \lim_{a\to 0^+}[\phi\,'(x) - \phi\,'(a)] \\
&= \phi\,'(x) - \left[\lim_{a\to 0^+}\phi\,'(a)\right],
\end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned}
-\lambda \int_x^L \phi(y)\,dy &= \lim_{b\to L^-}\left[\int_x^b -\lambda\phi(y)\,dy\right] \\
&\overset{(7.21)}{=} \lim_{b\to L^-}\left[\int_x^b \phi\,''(y)\,dy\right] \\
&\overset{\text{Teor. Fundamental do Cálculo}}{=} \lim_{b\to L^-}[\phi\,'(b) - \phi\,'(x)] \\
&= \left[\lim_{b\to L^-}\phi\,'(b)\right] - \phi\,'(x)\,,
\end{aligned} \tag{7.29}$$

portanto, de (7.28) e (7.29), segue que existem os limites laterais

$$\phi\,'(0^+) \doteq \lim_{a\to 0^+} \phi\,'(a) \quad e \quad \phi\,'(L^-) \doteq \lim_{b\to L^-} \phi\,'(b)\,. \tag{7.30}$$

Logo podemos integrar as funções $\underline{\phi\,'}$ *e* $\underline{\phi\,''}$*, no intervalo* $[0\,,L]$*, o que permite fazermos os seguintes cálculos a seguir.*

Observemos que

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^L |\phi(x)|^2\,dx &\overset{|z|^2=z\bar z}{=} \lambda \int_0^L \phi(x)\,\overline{\phi(x)}\,dx \\
&= \int_0^L [\lambda\,\phi(x)]\,\overline{\phi(x)}\,dx \\
&\overset{(7.21)}{=} -\int_0^L \phi''(x)\,\overline{\phi(x)}\,dx \\
&= -\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to L^-}} \left[\int_a^b \phi\,''(x)\,\overline{\phi(x)}\,dx\right] \\
&\overset{\textit{Integração por Partes}}{=} -\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to L^-}} \left\{\left[\phi\,'(x)\,\overline{\phi(x)}\,\Big|_{x=a}^{x=b}\right] - \int_a^b \phi\,'(x)\,\overline{\phi\,'(x)}\,dx\right\} \\
&= -\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to L^-}} \left[\phi\,'(b)\,\overline{\phi(b)} - \phi\,'(a)\,\overline{\phi(a)}\right] - \int_0^L |\phi\,'(x)|^2\,dx \\
&\overset{(7.30)}{=} -\left[\phi\,'(L^-)\,\underbrace{\overline{\phi(L)}}_{\overset{(7.22)}{=}0} - \phi\,'(0^+)\,\underbrace{\overline{\phi(0)}}_{\overset{(7.22)}{=}0}\right] - \int_0^L |\phi'(x)|^2\,dx \\
&= \int_0^L \underbrace{|\phi\,'(x)|^2}_{\geq 0}\,dx \geq 0\,.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Afirmamos que

$$\int_0^L |\phi\,'(x)|^2\,dx > 0\,. \tag{7.32}$$

De fato, suponhamos, por absurdo que

$$\int_0^L |\phi\,'(x)|^2\,dx = 0\,.$$

Como a função $\underline{\phi\,'}$ *é contínua em* $(0\,,L)$ *(veja (7.23)), teríamos que ter*

$$\phi\,'(x) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0\,,L)$$

ou seja , a função $\underline{\phi}$ *seria constante em* $(0\,,L)$.

Mas a função $\underline{\phi}$ *é contínua em* $[0\,,L]$ *(veja* (7.23)*) e, de* (7.22)*, teríamos*

$$\phi(x) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,L]\,,$$

que não nos interessa pois neste caso

$$u(t\,,x) = \psi(t)\,\phi(x) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad (t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]\,.$$

Assim

$$\lambda \underbrace{\int_0^L |\phi(x)|^2\,dx}_{\in(0\,,\infty)} \overset{(7.31)}{=} \int_0^L |\phi\,'(x)|^2\,dx \overset{(7.32)}{>} 0\,,$$

mostrando que $\lambda > 0$ *(em particular,* $\lambda \in \mathbb{R}$*), como havíamos afirmado.*

4. *Observemos que se*

$$\lambda_1\,,\lambda_2 \in (0\,,\infty)$$

são autovalores distintos do problema (7.21)-(7.23) *e a funções*

$$\phi_1 = \phi(x) \qquad e \qquad \phi_2 = \phi_2(x)$$

são suas correspondentes autofunções, então:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\,dx &= \int_0^L [\lambda_1\,\phi_1(x)]\,\overline{\phi_2(x)}\,dx \\
&\overset{(7.21)}{=} \int_0^L [-\phi_1\,''(x)]\;\phi_2(x)\,dx \\
&\overset{\textit{Integração por Partes}}{=} -\left\{\left[\phi_1\,'(x)\,\phi_2(x)\,\Big|_{x=0}^{x=L}\right] - \int_0^L \phi_1\,'(x)\,\phi_2\,'(x)\,dx\right\} \\
&- \left\{\left[\phi_1\,'(L)\;\underbrace{\phi_2(L)}_{\overset{(7.22)}{=}0} - \phi_1\,'(0)\;\underbrace{\phi_2(0)}_{\overset{(7.22)}{=}0}\right] - \int_0^L \phi_1\,'(x)\,\phi_2\,'(x)\,dx\right\} \\
&\overset{(7.22)}{=} \int_0^L \phi_1\,'(x)\,\phi_2\,'(x)\,dx \\
&\overset{\textit{Integração por Partes}}{=} \left[\phi_1(x)\,\phi_2\,'(x)\,\Big|_{x=0}^{x=L}\right] - \int_0^L \phi_1(x)\,\phi_2\,''(x)\,dx \\
&= \left[\underbrace{\phi_1(L)}_{\overset{(7.22)}{=}0}\;\phi_2\,'(L) - \underbrace{\phi_1(0)}_{\overset{(7.22)}{=}0}\;\phi_2\,'(0)\right] - \int_0^L \phi_1(x)\,\phi_2\,''(x)\,dx \\
&= -\int_0^L \phi_1(x)\,\phi_2\,''(x)\,dx \\
&\overset{(7.21)}{=} -\int_0^L \phi_1(x)\left[\overline{-\lambda_2\,\phi_2(x)}\right]\,dx \\
&\overset{\lambda_2\in\mathbb{R}}{=} \lambda_2 \int_0^L \phi_1(x)\,\overline{\phi_2(x)}\,dx\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x)\,\overline{\phi_2(x)}\,dx = -\lambda_2 \int_0^L \phi_1(x)\,\overline{\phi_2(x)}\,dx,$$

ou ainda ,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^L \phi_1(x)\,\overline{\phi_2(x)}\,dx = 0\,. \tag{7.33}$$

Como

$$\lambda_1 \neq \lambda_2\,,$$

de (7.33), *segue que*

$$\int_0^L \phi_1(x)\,\overline{\phi_2(x)}\,dx = 0\,,$$

ou seja, as funções $\phi_1 = \phi_1(x)$ *e* $\phi_2 = \phi_2(x)$ *são ortogonais, relativamente, ao produto interno de* $C([0\,,L]\,;\mathbb{C})$ *definido por:*

$$(f\,,g) = \int_0^L f(x)\,\overline{g(x)}\,dx\,,$$

para $f\,,g \in C([0\,,L]\,;\mathbb{C})$.

5. *Como*

$$\lambda > 0\,,$$

temos que a solução geral real da EDO (7.21) *será dada por:*

$$\phi(x) = a\cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + b\,\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,L]\,, \tag{7.34}$$

onde $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são constantes.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto na disciplina de EDO).

Mas a função $\phi = \phi(x)$*, deve satisfazer as condições* (7.22)*, ou seja:*

$$\begin{aligned} a &\overset{(7.34)}{=} \phi(0) \\ &\overset{(7.22)}{=} 0\,, \\ \textit{logo}\,, \qquad \phi(x) &\overset{a=0 \text{ em } (7.34)}{=} b\,\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)\,, \qquad (7.35) \\ b\,\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) &\overset{(7.35)}{=} \phi(L) \\ &\overset{(7.22)}{=} 0\,. \qquad (7.36) \end{aligned}$$

Como

$$\phi(x) \neq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,L]\,,$$

segue que deveremos ter

$$b \neq 0\,,$$

pois $a = 0$.

Assim, da identidade (7.36) *acima, segue que*

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) = 0\,,$$
$$\text{ou seja,}\quad \sqrt{\lambda}\,L = n\,\pi\,,\quad \text{para cada}\quad n \in \mathbb{N}\,,$$

isto é,

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,,\quad \text{para cada}\quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{7.37}$$

e assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, *de* (7.36) *e* (7.37), *teremos que:*

$$\begin{aligned}\phi(x) = \phi_n(x) &= \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}}\,x\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,,\quad \text{para cada}\quad x \in [0\,,L]\,.\end{aligned} \tag{7.38}$$

6. *Resolvendo a EDO* (7.17) *com*

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\,,\quad \text{para cada}\quad n \in \mathbb{N}\,,$$

obtemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, *que*

$$\psi(t) = \psi_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,t}\,,\quad \text{para cada}\quad t \in [0\,,\infty)\,. \tag{7.39}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto na disciplina de EDO)

Podemos resumir tudo nisso no seguinte resultado, cuja demonstração foi feita na Observação (7.2.1) acima:

Proposição 7.2.1

1. *Se* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é um autovalor a função* $\phi = \phi(x)$ *é autofunção associada a* $\underline{\lambda}$, *para os problemas* (7.21)-(7.23), *então*

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,,$$

isto é, $\lambda = \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ *e*

$$\phi(x) = \phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,,\quad \text{para cada}\quad x \in [0\,,L]\,.$$

Além disso, toda solução de (7.21)-(7.23) *é combinação linear finita das funções abaixo:*

$$\phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\,, \tag{7.40}$$

para cada $x \in [0\,,L]$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

2. *Toda solução de* (7.17) *com*

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

é combinação linear finita das funções abaixo:

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}, \tag{7.41}$$

para cada $t \in [0, \infty)$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Observação 7.2.2

1. *Obtivemos, agindo segundo a Observação* (7.2.1), *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *soluções de* (7.4) *e* (7.6) *da forma:*

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &\overset{(7.10)}{=} \psi_n(t)\, \phi_n(x) \\ &\overset{(7.40)\ e\ (7.41)}{=} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\, x\right), \end{aligned} \tag{7.42}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Tentaremos encontrar soluções do problema (7.4), (7.5), (7.6) *da forma:*

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, u_n(t, x) \\ &\overset{(7.42)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \psi_n(t)\, \phi_n(x) \\ &\overset{(7.40)\ e\ (7.41)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right), \end{aligned} \tag{7.43}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times \in [0, L]$.

Observemos que se soubermos que a série de funções (7.43) *acima, pode ser derivada, termo a termo, uma vez, em relação à* $\underline{t}$ *e duas vezes, em relação à* $\underline{x}$, *em* $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, *então a função* $u = u(t, x)$, *dada por* (7.43), *irá satisfazer* (7.4) *e* (7.6).

Isto ocorrerá porque, para cada $n \in \mathbb{N}$, *a função*

$$u_n(t, x) = \psi_n(t)\, \phi_n(x), \quad \textit{para cada} \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \in [0, L],$$

tem essa propriedade, por construção.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para que a função $u = u(t, x)$*, dada por* (7.43)*, venha satisfazer a condição* (7.5)*, deveremos ter:*

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{(7.5)}{=} u(0, x) \\
&\overset{t=0 \text{ em } (7.43)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} 0}}_{=1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \qquad (7.44)
\end{aligned}$$

para cada $x \in [0, L]$.

Ou seja, devemos saber expressar a função $f = f(x)$*, como uma série do tipo* (7.44)*, isto é, uma* **<u>série de senos</u>**.

2. *Podemos aplicar as mesmas ideias acima a seguinte situação:*

   Vamos imaginar que o fio do problema anterior, está isolado termicamente e que suas extremidades não troquem calor com o meio ambiente.

   Matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar uma função

$$u = u(t, x), \quad \textit{para cada} \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L],$$

   que satisfaz as seguintes condições:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \textit{para cada} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \qquad (7.45)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, L], \qquad (7.46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, \infty). \qquad (7.47)$$

   A condição (7.45) *nos diz que a temperatura no ponto* $x \in [0, L]$ *do fio é igual a* $f(x)^o$ C.

   A condição (7.45) *nos diz que os extremos não trocam calor com o meio ambiente.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

   Observemos, inicialmente que, por questões de compatibilidade, deveremos ter:

$$\begin{aligned}
f'(0) &\overset{\frac{d}{dx}(7.46) \text{ com } x=0}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) \\
&\overset{(7.47), \text{ com } t=0}{=} 0 \\
&\overset{(7.47), \text{ com } t=0}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(0, L) \\
&\overset{\frac{d}{dx}(7.46), \text{ com } x=L}{=} f'(L),
\end{aligned}$$

$$\textit{ou seja,} \quad f'(0) = f'(L) = 0. \qquad (7.48)$$

Do ponto de vista aplicado é razoável procurarmos soluções $u = u(t, x)$ *na seguinte classe*

$$u \in C^1([0,\infty) \times [0,L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0,\infty) \times (0,L);\ R), \tag{7.49}$$

o que implicará que

$$f \overset{(7.46)}{=} u(0,.) \in C^1([0,L]; \mathbb{R}).$$

Como no caso tratado anteriormente (veja (7.10)), procuraremos soluções do problema do tipo

$$u(t,x) \doteq \psi(t)\,\phi(x), \quad \textit{para cada} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,L], \tag{7.50}$$

isto é, soluções do **tipo variáveis separadas**.

Começaremos tentando soluções do tipo acima para (7.45), (7.47) e posteriormente utilizaremos (7.46).

De (7.49) e (7.50) segue que

$$\psi \in C^1([0,\infty); \mathbb{R}) \cap C^2((0,\infty); \mathbb{R}) \quad \textit{e} \quad \phi \in C^1([0,L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0,L); \mathbb{R}). \tag{7.51}$$

Estaremos interessados em soluções não constantes, isto é,

$$u(t,x) \neq C, \quad \textit{para cada} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$$

o que implicará que

$$\psi(t), \phi(x) \neq C, \quad \textit{para algum} \quad t \in [0,\infty) \quad \textit{e} \quad x \in [0,L], \tag{7.52}$$

para qualquer $C \in \mathbb{R}$ *fixado.*

Supondo que as funções $\psi = \psi(t)$ *e* $\phi = \phi(x)$ *satisfaçam (7.51), de (7.50), para cada* $(t,x) \in (0,\infty) \times (0,L)$, *teremos:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &\overset{(7.10)}{=} \frac{\partial}{\partial t}[\psi(t)\,\phi(x)] \\ &= \psi'(t)\,\phi(x) \end{aligned} \tag{7.53}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &\overset{(7.10)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\psi(t)\,\phi(x)] \\ &= \psi(t)\,\phi''(x). \end{aligned} \tag{7.54}$$

Substituindo (7.53) e (7.54) em (7.45), obteremos

$$\psi'(t)\,\phi(x) = \psi(t)\,\phi''(x), \quad \textit{para cada} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L).$$

Dividindo a identidade acima por $\psi(t)\,\phi(x)$, *nos pontos de* $[0\,,\infty)\times[0\,,L]$ *onde este é diferente se zero, obteremos:*

$$\frac{\psi\,'(t)\,\phi(x)}{\psi(t)\,\phi(x)}=\frac{\psi(t)\,\phi\,''(x)}{\psi(t)\,\phi(x)}\,,\quad \textit{para cada}\quad (t\,,x)\in(0\,,\infty)\times(0\,,L)\,.$$

Como $\psi(t)\,,\phi(x)\neq 0$, *em algun ponto de* $[0\,,\infty)\times[0\,,L]$, *segue que*

$$\frac{\psi\,'(t)}{\psi(t)}=\frac{\phi\,''(x)}{\phi(x)}\,,\quad \textit{para cada}\quad (t\,,x)\in(0\,,\infty)\times(0\,,L)\,. \tag{7.55}$$

Como no caso tratado anteriormente (veja (7.15)*), o lado direito da identidade* (7.55)*, é uma função de* $\underline{x}$*, enquanto o lado esquerdo da mesma, é uma função de* $\underline{t}$.

Logo ambos os lados da identidade (7.55) *deverão ser iguais a uma constante que chamaremos de* $\underline{-\lambda}$.

O motivo do sinal negativo será tratado a seguir, como no caso anterior (veja (7.16)*).*

Portanto

$$\frac{\psi\,'(t)}{\psi(t)}=-\lambda=\frac{\phi\,''(x)}{\phi(x)}\,,\quad \textit{para cada}\quad (t\,,x)\in(0\,,\infty)\times(0\,,L)\,.$$

Com isto obtemos duas Equações Diferencias Ordinárias (EDO), a saber:

$$\psi\,'(t)=-\lambda\,\psi(t)\,,\quad \textit{para cada}\quad t\in(0\,,\infty) \tag{7.56}$$
$$\phi\,''(x)=-\lambda\,\phi(x)\,,\quad \textit{para cada}\quad x\in(0\,,L)\,. \tag{7.57}$$

Impondo as condições (7.47)*, teremos:*

$$\begin{aligned}\psi(t)\,\phi\,'(0) &\overset{(7.50)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t\,,0)\\ &\overset{(7.47)}{=} 0\\ &\overset{(7.47)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t\,,L)\\ &\overset{(7.50)}{=} \psi(t)\,\phi'(L)\,,\quad \textit{para cada}\quad t\in[0\,,\infty)\,.\end{aligned} \tag{7.58}$$

Como

$$\psi(t)\neq 0\,,$$

dividindo ambos os membros da identidade (7.58)*, por* $\psi(t)$*, obteremos*

$$\phi\,'(0)=0=\phi\,'(L)\,, \tag{7.59}$$

ou seja, a função $\phi = \phi(x)$*, deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:*

$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0\,,L) \tag{7.60}$$

$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0 \tag{7.61}$$

$$\phi \in C^1([0\,,L)\,;\mathbb{R}) \cap C^1([0\,,L]\,;\mathbb{R})\,. \tag{7.62}$$

3. *Afirmamos que*

$$\lambda \in (0\,,\infty) \tag{7.63}$$

(em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$*).*

De fato, suponhamos que a função $\phi = \phi(x)$ *satisfaz* (7.60)*,* (7.61)*,* (7.62)*, para algum* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

Observemos que existem os limites laterias:

$$\phi''(0^+) \quad e \quad \phi''(L^-)\,.$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\phi''(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \phi''(x) \\
&\overset{(7.60)}{=} \lim_{x\to 0^+} [-\lambda\,\phi(x)] \\
&= -\lambda \lim_{x\to 0^+} \phi(x) \\
&\overset{\phi \text{ é contínua em } x=0 \text{ - veja } (7.62)}{=} -\lambda\,\phi(0)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi''(L^-) &= \lim_{x\to L^-} \phi''(x) \\
&\overset{(7.60)}{=} \lim_{x\to L^-} [-\lambda\,\phi(x)] \\
&= -\lambda \lim_{x\to L^-} \phi(x) \\
&\overset{\phi \text{ é contínua em } x=0 \text{ - veja } (7.62)}{=} -\lambda\,\phi(L)\,.
\end{aligned}$$

Logo podemos fazer os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^L \phi(x)\,\overline{\phi(x)}\,dx &= \int_0^L [\lambda\,\phi(x)]\,\overline{\phi(x)}\,dx \\
&\overset{(7.60)}{=} \int_0^L [-\phi''(x)]\,\overline{\phi(x)}\,dx \\
&= -\int_0^L \phi''(x)\,\overline{\phi(x)}\,dx \\
&\overset{\text{integração por partes}}{=} -\left\{\left[\phi'(x)\,\overline{\phi(x)}\,\Big|_{x=0}^{x=L}\right] - \int_a^b \phi'(x)\,\overline{\phi'(x)}\,dx\right\}
\end{aligned}$$

$$= -\left\{ \left[\underbrace{\phi\,'(L)}_{\overset{(7.61)}{=} 0} \overline{\phi(L)} - \underbrace{\phi\,'(0)}_{\overset{(7.61)}{=} 0} \overline{\phi(0)} \right] - \int_0^L |\phi'(x)|^2 \, dx \right\}$$

$$= \int_0^L |\phi\,'(x)|^2 \, dx \geq 0 \,. \tag{7.64}$$

Afirmamos que

$$\int_0^L |\phi\,'(x)|^2 \, dx > 0 \,. \tag{7.65}$$

De fato, suponhamos, por absurdo que

$$\int_0^L |\phi\,'(x)|^2 \, dx = 0 \,.$$

Como $\phi \in C^1([0\,, L]\,; \mathbb{R})$ *segue que*

$$\phi\,'(x) = 0 \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,, L] \,,$$

ou seja, a função $\phi = \phi(x)$ *deveria ser constante, o que contraria* (7.52).

Assim

$$\lambda \int_0^L |\phi(x)|^2 \, dx \overset{(7.64)}{=} \int_0^L |\phi\,'(x)|^2 \, dx \overset{(7.65)}{>} 0$$

implicando que

$$\lambda > 0 \,,$$

como afirmamos.

Em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. *Observemos ainda que se*

$$\lambda_1 \quad e \quad \lambda_2$$

satisfazem o problema (7.60), (7.61), (7.62) *e as funções*

$$\phi_1 = \phi_1(x) \quad e \quad \phi_2 = \phi_2(x)$$

são duas correspondentes soluções do problema acima, então:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2(x)} \, dx &= \int_0^L [\lambda_1\, \phi_1(x)]\, \overline{\phi_2(x)} \, dx \\
&\overset{(7.60)}{=} \int_0^L [-\phi_1\,''(x)]\, \overline{\phi_2(x)} \, dx \\
&= -\int_0^L \phi_1\,''(x)\, \overline{\phi_2(x)} \, dx \\
&\overset{\textit{integração por partes}}{=} -\left\{ \left[\phi_1\,'(x)\, \overline{\phi_2(x)} \, \Big|_{x=0}^{x=L} \right] - \int_0^L \phi_1\,'(x)\, \phi_2\,'(x) \, dx \right\} \\
&= -\left\{ \left[\underbrace{\phi_1\,'(L)}_{\overset{(7.61)}{=} 0} \overline{\phi_2(L)} - \underbrace{\phi_1\,'(0)}_{\overset{(7.61)}{=} 0} \overline{\phi_2(0)} \right] - \int_0^L \phi_1\,'(x)\, \overline{\phi_2\,'(x)} \, dx \right\}
\end{aligned}$$

$$= \int_0^L \phi_1{}'(x)\, \overline{\phi_2{}'(x)}\, dx$$

$$\stackrel{\textit{integração por partes}}{=} \left[\phi_1(x)\, \overline{\phi_2{}'(x)} \, \Big|_{x=0}^{x=L} \right] - \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2{}''(x)}\, dx$$

$$= \left[\phi_1(L)\, \underbrace{\overline{\phi_2{}'(L)}}_{\stackrel{(7.61)}{=} 0} - \phi_1(0)\, \underbrace{\overline{\phi_2{}'(0)}}_{\stackrel{(7.61)}{=} 0} \right] - \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2{}''(x)}\, dx$$

$$= - \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2{}''(x)}\, dx$$

$$\stackrel{(7.60)}{=} - \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{[-\lambda_2\, \phi_2(x)]}\, dx$$

$$\stackrel{\lambda_2 \in \mathbb{R}}{=} \lambda_2 \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2(x)}\, dx \,. \tag{7.66}$$

Logo:

$$\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2(x)}\, dx \stackrel{(7.66)}{=} \lambda_2 \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2(x)}\, dx \,,$$

ou seja, $$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2(x)}\, dx = 0 \,. \tag{7.67}$$

Logo, se

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \,,$$

de (7.67), *segue que*

$$\int_0^L \phi_1(x)\, \overline{\phi_2(x)}\, dx = 0 \,,$$

ou seja, a sfunções $\phi_1 = \phi_1(x)$ *e* $\phi_2 = \phi_2(x)$ *são ortogonais, relativamente, ao produto interno de* $C([0, L]; \mathbb{C})$ *definido por:*

$$(f, g) = \int_0^L f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \,,$$

para $f, g \in C([0, L]; \mathbb{C})$.

5. *Como*

$$\lambda > 0 \,,$$

temos que a solução geral da EDO (7.60) *é dada por:*

$$\phi(x) = a \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + b \,\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, L] \,, \tag{7.68}$$

onde $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são constantes reais.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto na disciplina de EDO)

Com isto, segue que

$$\phi'(x) \overset{(7.68)}{=} -a\sqrt{\lambda}\,\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + b\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right), \tag{7.69}$$

para cada $x \in [0, L]$.

Mas a função $\phi = \phi(x)$*, deve satisfazer:*

$$b\sqrt{\lambda} \overset{(7.69)}{=} \phi'(0) \overset{(7.61)}{=} 0,$$

como $\sqrt{\lambda} > 0$*, teremos:*

$$b = 0$$

$$\phi(x) \overset{b=0 \text{ em } (7.68)}{=} a\cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) \tag{7.70}$$

logo,

$$-a\sqrt{\lambda}\,\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) \overset{(7.69)}{=} \phi'(L) \overset{(7.61)}{=} 0. \tag{7.71}$$

Como

$$\phi(x) \neq C$$

segue que

$$a \neq 0,$$

pois $b = 0$.

Assim, de (7.71)*, segue que*

$$\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) = 0,$$

$$\textit{ou seja,} \quad \sqrt{\lambda}\,L = n\,\pi, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

isto é,

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7.72}$$

e assim, de (7.70) *e* (7.72)*, segue que*

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_n(x)\\ &= \cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\,x\right)\\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, L] \quad \textit{e} \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{7.73}$$

6. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, resolvendo a EDO* (7.56)*, com* (7.72)*, obteremos*

$$\psi(t) = \psi_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, \infty). \tag{7.74}$$

7. *Obtivemos, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *agindo da forma acima, soluções de* (7.45) *e* (7.47), *da forma:*

$$u_n(t,x) \overset{(7.50)}{=} \psi_n(t)\,\phi_n(x) \overset{(7.74)\ e\ (7.73)}{=} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right), \tag{7.75}$$

para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$.

Utilizando o princípio da superposição (infinita), tentaremos encontrar soluções do problema (7.45), (7.41), (7.47), *da forma:*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, u_n(t,x) \\ &\overset{(7.50)}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \psi_n(t)\,\phi_n(x) \\ &\overset{(7.74)\ e\ (7.73)}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right), \end{aligned} \tag{7.76}$$

para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$.

Observemos que se soubermos que a série de funções acima puder se derivada parcialmente, termo a termo, uma vez em relação $\underline{t}$ *e duas vezes, em relação à* $\underline{x}$, *a função* $u = u(t,x)$, *dada por* (7.76), *irá satisfazer* (7.45) *e* (7.47).

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Finalmente, para satisfazer (7.46), *deveremos ter:*

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(7.46)}{=} u(0,x) \\ &\overset{(7.76)}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}0} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right) \\ &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right), \end{aligned} \tag{7.77}$$

para cada $x \in [0,L]$.

Ou seja, devemos saber expressar a função $f = f(x)$ *como uma série do tipo* (7.77), *isto é, uma* **série de cossenos**.

8. *Uma outra situação, é o estudo da temperatura em um fio, cujo fluxo de calor nas extremidades do fio seja proporcional à temperatura nas extremidades do mesmo.*

Matematicamente, em uma versão simplificada, o problema acima corresponde a encontrar um afunção

$$u = u(t,x), \quad \textit{para cada} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$$

que satisfaça:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad \textit{para cada} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L) \tag{7.78}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0,L] \tag{7.79}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) + u(t,0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) + u(t,L), \quad \textit{para cada} \quad t \in [0,\infty). \tag{7.80}$$

Agindo como nos dois casos anteriores, ou seja, aplicando o método da separação de variáveis, podemos mostrar que, neste caso chegaremos a seguinte expressão para as soluções do problema (7.78), (7.79), (7.80)*:*

$$u(t,x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right], \tag{7.81}$$

para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$.

Observemos que se soubermos que a série de funções acima puder se derivada parcialmente, termo a termo, uma vez, em relação à underlinet, e duas vezes, em relação à $\underline{x}$*, em* $(0,\infty) \times (0,L)$*, então a função* $u = u(t,x)$*, dada por* (7.81)*, irá satisfazer* (7.78) *e*
eqrefE24.

Para satisfazer (7.79) *deveremos ter:*

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(7.79)}{=} u(0,x) \\ &\overset{t=0 \text{ em } (7.81)}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}0}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] \\ &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right], \end{aligned} \tag{7.82}$$

para cada $x \in [0,L]$.

Ou seja, devemos saber expressar a função $f = f(x)$ *em uma série do tipo* (7.82)*, isto é, uma* **<u>série de senos e cossenos</u>** *também denominada de* **<u>série de Fourier da função f</u>***.*

Isto nos motiva a estudar as funções que podem ser representadas nesse tipo de séries de funções.

9. *Podemos aplicar o método da separação de variáveis para estudar outros tipos de problemas, como por exemplo, o problema da corda de comprimento* $L > 0$*, vibrante num plano com as extremidades presas.*

   Suponhamos que a corda acima, esteja estendida sobre o eixo dos Ox *e que seus extremos sejam*

$$x = 0 \quad e \quad x = L.$$

Neste caso, a função, que denotaremos por

$$u = u(t, x),$$

que nos fornece a deflexão da corda, em relação à posição de repouso, sendo

$$f = f(x) \quad e \quad g = g(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, L],$$

a posição inicial da corda e a velocidade inicial de vibração da corda, respectivamente, então, matematicamente, a função $u = u(t, x)$*, deverá satisfazer ao seguinte problema:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad \textit{para cada} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \tag{7.83}$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, L] \tag{7.84}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, L] \tag{7.85}$$

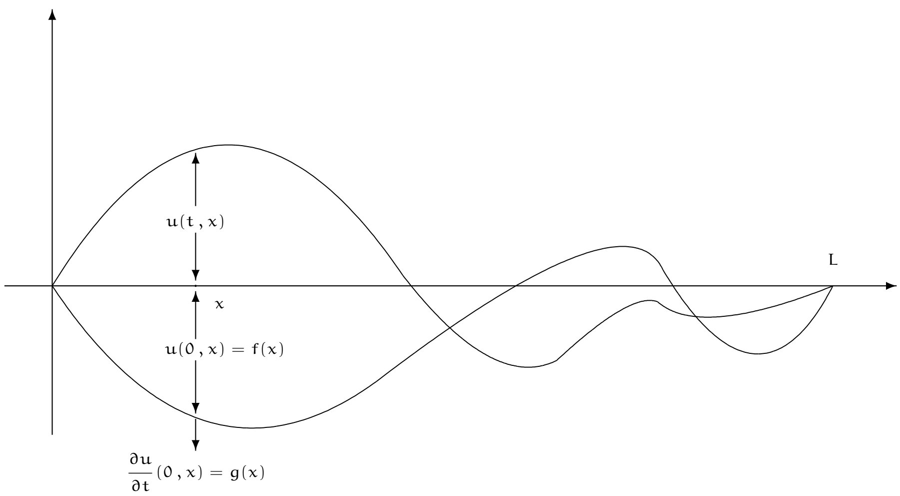
$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, \infty). \tag{7.86}$$

Notemos que, (7.84) *nos diz que a posição da corda, no ponto* $x \in [0, L]$*, será igula a* $f(x)$*, e* (7.85)*, nos diz que e velocidade inicial, no ponto* $x \in [0, L]$*, será igual a* $g(x)$*, respectivamente.*

Além disso, (7.86) *nos diz que as extremidades da corda estão fixas.*

A cosntante $c > 0$ *depende do material com que a corda é feita.*

A figura abaixo ilustra a situação acima.



A EDP (7.83) *acima é conhecida como* **Equação da Onda**.

Essa equação é um exemplo importante de EDP's do tipo **hiperbólico**.

10. *Podemos considerar outros tipos de problemas relacionados com a corda vibrante.*

    Eles aparecerão nas listas exercícios.

11. *Outro problema importante que podemos aplicar o método da separação de variáveis é para encontrar uma função*

$$u = u(x, y), \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \Omega \overset{aberto}{\subseteq} \mathbb{R}^2,$$

que satisfaz as seguinte condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \Omega \tag{7.87}$$

$$u_{|\partial\Omega} = f \tag{7.88}$$

onde $\partial\Omega$ *é a fronteira do conjunto* $\underline{\Omega}$*, em* $\mathbb{R}^2$*.*

O problema acima é conhecido como **Problema de Dirichlet***.*

Também podemos considerar problema de encontrar uma função

$$u = u(x, y), \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

que satisfaz as seguinte condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \Omega \tag{7.89}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u_{|\partial\Omega} = f, \tag{7.90}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ *denota a derivada direcional na direção do vetor normal unitário exterior da fronteira de* $\underline{\Omega}$*, em* $\mathbb{R}^2$*, que é conhecido como* **Problema de Newman***.*

12. *Esses dois últimos problemas, aparecerão nas listas de exercícios para serem tratados nos casos em que*

$$\Omega = (a, b) \times (c, d),$$

ou seja,o interior de um retângulo em $\mathbb{R}^2$*, e no caso em que*

$$\Omega \doteq \left\{(x, y);\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\},$$

ou seja, o interior da circunferência de centro na origem $(0, 0)$ *e tem raio igual a* $R \in (0, \infty)$ *fixado, em* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente.*

Passaremos, a seguir, a estudar as funções que possuem representão na forma (7.82).

7.3 Os Coeficientes de Fourier

Começaremos tentanto responder a 1.ª questão colocada no início do capítulo (veja (7.2)), isto é, sabendo-se que a função $\underline{f}$ pode ser representada por uma série de funções do tipo (7.3), como deverão ser os coeficientes $\underline{a_m}$ e $\underline{b_n}$, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$?

Para isto, introduziremos uma classe de funções que nos ajudará a tratar da resposta a essa pergunta.

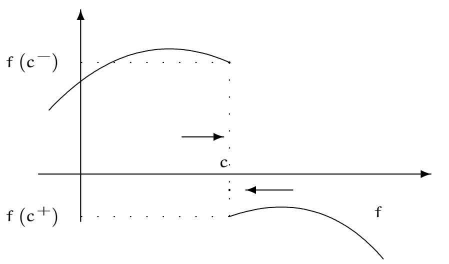
Definição 7.3.1 *Dado* $c \in \mathbb{R}$, *diremos que uma função real (ou complexa) de variável real* $f : I\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), onde* $\underline{I}$ *é um intervalo de* $\mathbb{R}$ *tem uma* **descontinuidade de 1.ª espécie em** $x = c$, *se a função* $\underline{f}$ *não for contínua em* $x = c$, *mas existem e são finitos os limites lateriais*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x\to c^-} f(x)\,.$$

Neste caso, denotaremos por

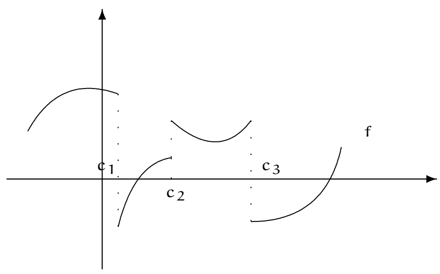
$$f\left(c^+\right) \doteq \lim_{x\to c^+} f(x)$$
$$e \quad f(c^-) \doteq \lim_{x\to c^-} f(x)\,. \tag{7.91}$$

A figura abaixo ilustra a situação acima, para o caso da função ser a valores reais (isto é, $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$*).*



Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **contínua por partes em** $\underline{I}$ **(ou seccionalmente contínua em** $\underline{I}$**)**, *se em cada intervalo* $(a\,,b)$, *contido em* $\underline{I}$, *a função* $\underline{f}$, *tem, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade de 1.ª espécie.*

A figura abaixo ilustra a situação acima, para o caso da função ser a valores reais.



O conjunto formado por todas as funções a valores reais (respectivamente, complexos), contínuas por partes (ou seccionalmente contínuas) em $I \subseteq \mathbb{R}$, *será indicado por*

$$SC(I\,;\mathbb{R}) \quad \textit{(respectivamente, } SC(I\,;\mathbb{C})\textit{)}\,. \tag{7.92}$$

Observação 7.3.1

1. *Do ponto de vista geométrico, dizer que uma função* $\underline{f}$ *tem uma descontinuidade de 1.ª espécie em* $x = c$ *é equivalente a dizer que a representação geométrica do seu gráfico tem um salto finito, em* $x = c$.

2. *Do ponto de vista geométrico, dizer que uma função* $\underline{f}$ *é contínua por partes em* $\underline{I}$ *é equivalente a dizer que a representação geométrica do seu gráfico tem um número finito de saltos, em cada intervalo* (a, b) *contido em* $\underline{I}$.

3. *Se* $f, g \in SC(I; \mathbb{R})$ *(respectivamente,* $SC(I; \mathbb{C})$*) e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) então* $(f+g), (\alpha f) \in SC(I; , \mathbb{R})$ *(respectivamente,* $SC(I; \mathbb{C})$*), isto é,*

$$SC(I; \mathbb{R}) \quad \textit{(respectivamente, } SC(I; \mathbb{C})\textit{)}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*), quando munido das operações usuais de adição de funções e multiplicação de número real (respectivamente, complexo) por uma função.*

A seguir exibiremos alguns exemplos importantes de seccionalmente contínuas definidas em $I \doteq \mathbb{R}$.

Exemplo 7.3.1 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad x \in [0, \pi) \\ -1\,, & \textit{para} \quad x \in [-\pi, 0) \\ f(x + 2\pi) = f(x)\,, & \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} . \tag{7.93}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em* $\mathbb{R}$.

Resolução:

Notemos que os pontos de descontinuidade da função $\underline{f}$ serão somente os pontos da forma

$$x = k\pi, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que, em cada um desse pontos, a função $\underline{f}$ tem um ponto de descotinuidade de 1.ª espécie pois, para cada $k \in \mathbb{Z}$, existem os limites laterais

$$\lim_{x \to (k\pi)^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to (k\pi)^-} f(x).$$

De fato, se $k \in \mathbb{Z}$ for par, isto é,

$$k = 2m \quad \text{para algum} \quad m \in \mathbb{Z},$$

teremos que:

$$\lim_{x \to (k\pi)^+} f(x) = \lim_{x \to (2m\pi)^+} f(x) \overset{x \in (2m\pi, 2(m+1)\pi),\ \text{logo, } (7.93)}{=} 1$$

$$\lim_{x \to (k\pi)^-} f(x) = \lim_{x \to (2m\pi)^-} f(x) \overset{x \in ((2m-1)\pi, 2m\pi),\ \text{logo, } (7.93)}{=} -1\,.$$

Por outro lado, se $k \in \mathbb{Z}$ for ímpar, isto é,

$$k = 2m + 1 \quad \text{para algum} \quad m \in \mathbb{Z},$$

teremos que:

$$\lim_{x \to (k\pi)^+} f(x) = \lim_{x \to [(2m+1)\pi]^+} f(x) \overset{x \in (2m+1\pi, 2(m+1)\pi),\ \text{logo},\ (7.93)}{=} -1,$$

$$\lim_{x \to (k\pi)^-} f(x) = \lim_{x \to [(2m+1)\pi]^-} f(x) \overset{x \in ((2m)\pi, (2m+1)\pi),\ \text{logo},\ (7.93)}{=} 1,$$

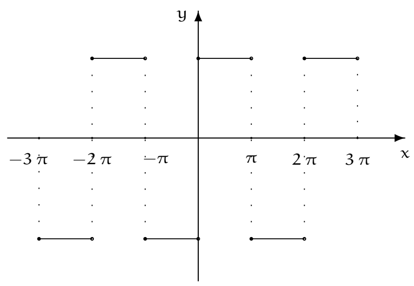
mostrando que a função $\underline{f}$ tem um ponto de descontinuidade de 1.ª espécie no ponto $x = k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Logo em qualquer intervalo limitado $[a, b]$, a função $\underline{f}$ terá, no máximo, um número finito de pontos de descotinuidade de 1.ª espécie, pois em cada intevalo $[a, b]$ existe, no máximo, um número finito de pontos do tipo $x = k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

□

Observação 7.3.2 *A função $\underline{f}$ do Exemplo (7.3.1) será denominda* **onda quadrada**.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ do Exemplo (7.3.1) é dada pela figura abaixo.



Onda Quadrada

Outro exemplo importante é:

Exemplo 7.3.2 *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{para } x \in [-\pi, \pi) \\ f(x + 2\pi) = f(x), & \textit{para cada } \ x \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{7.94}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Notemos que os pontos de descontinuidade da função $\underline{f}$ serão somente os pontos da forma

$$x = (2\,k + 1)\,\pi\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Observemos que em cada um desse pontos a função $\underline{f}$ tem um ponto de descotinuidade de 1.ª espécie pois, para cada $k \in \mathbb{Z}$, existem os limites laterais

$$\lim_{x \to [(2\,k+1)\pi]^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to [(2\,k+1)\pi]^-} f(x)\,.$$

Como a função $\underline{f}$ é $2\,\pi$-periódica basta estudarmos os pontos de descontinuidade da função no intervalo $[-\pi\,,\pi]$, ou seja, nos pontos

$$-\pi \quad \text{e} \quad \pi\,.$$

Notemos que

$$\text{se} \quad x \in (\pi\,, 3\,\pi)\,, \quad \text{segue que:} \quad f(x) \stackrel{(7.93)}{=} x - 2\,\pi \tag{7.95}$$

$$\text{se} \quad x \in (-3\,\pi\,, -\pi)\,, \quad \text{segue que:} \quad f(x) \stackrel{(7.93)}{=} x + 2\,\pi \tag{7.96}$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi^+} f(x) &\stackrel{x \in (\pi\,,3\,\pi)\,,\ \text{logo},\ (7.95)}{=} \lim_{x \to \pi^+} (x - 2\,\pi) \\ &= -\pi\,, \\ \lim_{x \to \pi^-} f(x) &\stackrel{x \in (-\pi\,,\pi)\,,\ \text{logo},\ (7.93)}{=} \lim_{x \to \pi^-} x \\ &= \pi\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\pi^+} f(x) &\stackrel{x \in (-\pi\,,\pi)\,,\ \text{logo},\ (7.93)}{=} \lim_{x \to -\pi^+} x \\ &= -\pi\,, \\ \lim_{x \to -\pi^-} f(x) &\stackrel{x \in (-3\,\pi\,,-\pi)\,,\ \text{logo},\ (7.96)}{=} \lim_{x \to \pi^-} (x + 2\,\pi) \\ &= \pi\,, \end{aligned}$$

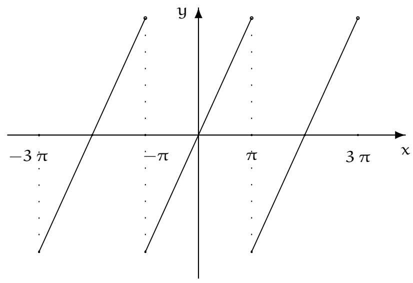
mostrando que a função $\underline{f}$ tem um ponto de descontinuidade de 1.ª espécie no ponto $x = (2\,k + 1)\,\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Logo em qualquer intervalo limitado $[a\,,b]$, a função $\underline{f}$ terá, no máximo, um número finito de pontos de descotinuidade de 1.ª espécie, pois em cada intevalo $[a\,,b]$ existe, no máximo, um número finito de pontos do tipo $x = (2\,k + 1)\,\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

□

Observação 7.3.3 *A função $\underline{f}$ do Exemplo (7.3.2) será denominda* <u>onda dente de serra</u>.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ do Exemplo (7.3.2) é dada pela figura abaixo.



Onda Dente de Serra

Temos também o

Exemplo 7.3.3 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{para } x \in (0, \infty) \\ \\ 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0] \end{cases} . \tag{7.97}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ ***não*** *é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em* $\mathbb{R}$.

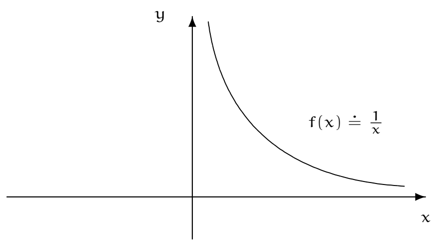
Resolução:

De fato, a função $\underline{f}$ tem um, único ponto de descontínuidade, que é o ponto $x = 0$.

Notemos que no ponto $x = 0$ a função $\underline{f}$ tem uma descotinuidade que **não** é de $1.^a$ espécie, pois não existe

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \quad (= +\infty) .$$

A figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.



□

Observação 7.3.4

1. *Notemos que, uma função seccionalmente contínua em* $[a, b]$ ***não*** *precisa, necessariamente, estar definida em todo o intervalo* $[a, b]$ *mas apenas em uma reunião finita, do tipo*

$$\bigcup_{j=0}^{N} (x_j, x_{j-1}) ,$$

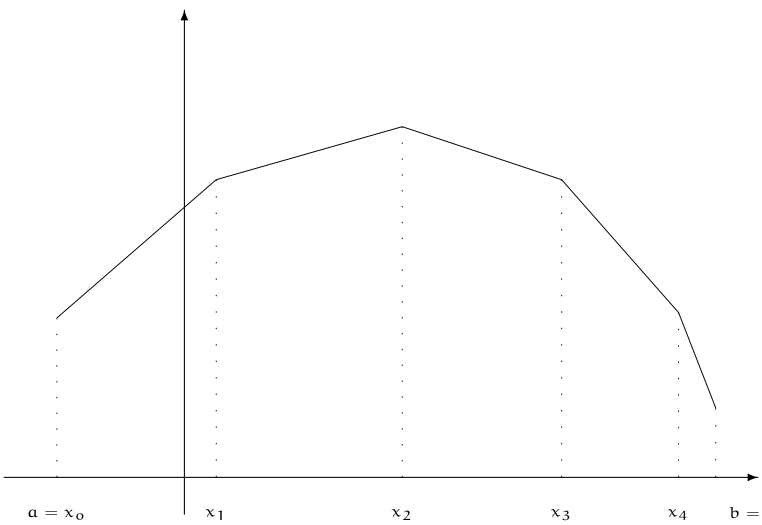
onde $x_j \in [a, b]$, *para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

Além disso, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$, *deverá ser uma função contínua em* (x_j, x_{j-1}) *e existirem e serem finitso, os limites laterais*

$$\lim_{x \to x_j^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_j^-} f(x) .$$

Essas observação serão importantes para incluirmos as derivadas de funções (a valores reais ou compexos), cujas representações geométricas dos gráficos são formadas por poligonais.

A figura abaixo ilustra a situação acima, para o caso da função considerada ser a valores reais.



2. *Observemos também que, toda função* $\underline{f}$ *secionalmente contínua em* $[a, b]$ *é uma função limitada em* $[a, b]$, *isto é, existe* $M \in (0, \infty)$ *tal que*

$$|f(x)| \leq M, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b] . \tag{7.98}$$

De fato, como a função $\underline{f}$ *é secionalmente contínua em* $[a, b]$ *segue que existem, no máximo, um número finito de pontos* $x_j \in [a, b]$, *para* $j \in \{0, 1, 2, \cdots, N\}$, *de modo que a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\bigcup_{j=1}^{N} (x_{j-1}, x_j)$ *e, além disso, existem, e são finitos, os limites laterais*

$$\lim_{x \to x_j^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_j^-} f(x) ,$$

excetuando-se, eventualmente, se $x_o \doteq a$ *e* $x_N \doteq b$ *que, neste caso, seriam considerados, nos extremos do intervalo* $[a, b]$, *os limites laterias*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

serem finitos.

Assim, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$, *a restrição da função* $\underline{f}$ *a cada um dos intervalos abertos* (x_{j-1}, x_j), *que denotaremos por*

$$F_j \doteq f_{|_{(x_{j-1}, x_j)}},$$

pode ser estendida a uma função contínua no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, *definido-se*

$$F_j(x_{j-1}) \doteq \lim_{x \to x_j{}^+} f(x) \quad e \quad F_j(x_{j+1}) \doteq \lim_{x \to x_{j+1}{}^-} f(x),$$

e portanto esta será uma função limitada nesse intervalo, implicando que a função $\underline{f}$ *também será uma função limitada nesse intervalo.*

Como temos somente $\underline{N}$ *intervalos desse tipo, segue que a função* $\underline{f}$ *será uma função limitada em* $[a, b]$.

3. *Notemos também que toda função* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(respectivamente* $\mathbb{C}$*) contínua em* $\underline{I}$ *será uma função seccionalmente contínua em* $\underline{I}$, *ou seja,*

$$C(I; \mathbb{R}) \subseteq SC(I; \mathbb{R}) \quad (\textit{respectivamente, } C(I; \mathbb{C}) \subseteq SC(I; \mathbb{C})).$$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

4. *Para finalizar temos que toda função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) que é seccionalmente contínua em* $[a, b]$ *é uma função integrável em* $[a, b]$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto em Cálculo 1).

Definição 7.3.2 *Dadas as funções* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, *seccionalmente contínuas em* $[a, b]$ *(isto é, a valores reais), definiremos*

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \in \mathbb{R}, \tag{7.99}$$

ou seja,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : SC([a, b]; \mathbb{R}) \times SC([a, b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

dada por (7.99).

Se as funções $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ *são seccionalmente contínuas em* $[a, b]$ *(isto é, a valores complexos), definiremos*

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \in \mathbb{C}, \tag{7.100}$$

onde, se

$$Z = A + i\,B \in \mathbb{C},$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, *então definimos*

$$\overline{Z} \doteq A - B\,i, \tag{7.101}$$

dito **conjugado do número complexo** Z, *ou seja,*

$$\langle\, \cdot\,,\ \cdot\rangle\,:\,SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{C})\times SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{C})\to\mathbb{C}\,,$$

dada por (7.100).

Com isto temos as seguints propriedades de $<\ ,\ >$:

Proposição 7.3.1 *A função* $\langle\, \cdot\,,\ \cdot\rangle\,:\,SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{R})\times SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\langle\, \cdot\,,\ \cdot\rangle\,:\,SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{C})\times SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$*) tem as seguintes propriedades:*

Se f, g, $h\in SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{R})$ *(respectivamente,* $SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{C})$*) e* $\alpha\in\mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\alpha\in\mathbb{C}$*), temos que:*

$$\textbf{1.}\ \ \langle\alpha\, f+g\,,h\rangle=\alpha\,\langle f\,,h\rangle+\langle g\,,h\rangle\ , \tag{7.102}$$

$$\textbf{2.}\ \ \langle f\,,g\rangle=\langle g\,,f\rangle\qquad \textit{(respectivamente, } \langle f\,,g\rangle=\overline{\langle g\,,f\rangle}\textit{)}, \tag{7.103}$$

$$\textbf{3.}\ \ \langle f\,,f\rangle\geq 0\,. \tag{7.104}$$

Demonstração:

Faremos a demonstração para o caso $\langle\, \cdot\,,\ \cdot\rangle\,:\,SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{R})\times SC([a\,,b]\,;\,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$.

O caso de funções a valores complexo, será deixado como exercício para o leitor.

De 1.:

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\langle\alpha\, f+g\,,h\rangle &\overset{(7.99)}{=}\int_a^b(\alpha\, f+g)\,(x)\,h(x)\,dx\\
&=\int_a^b[\alpha\, f(x)+g(x)]\ h(x)\,dx\\
&\overset{\text{propriedades da integral definida}}{=}\alpha\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx\\
&\overset{(7.99)}{=}\alpha\,\langle f\,,h\rangle+\langle g\,,h\rangle\ ,
\end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (7.102).

De 2.:

Observmeos que

$$\begin{aligned}
\langle f\,,g\rangle &\overset{(7.99)}{=}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\\
&\overset{\text{propriedades de }\mathbb{R}}{=}\int_a^b g(x)\,f(x)\,dx\\
&\overset{(7.99)}{=}\langle g\,,f\rangle\ ,
\end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (7.103).

De 3.:

Notemos que:

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &\overset{(7.99)}{=} \int_a^b f(x)\, f(x)\, dx \\ &= \int_a^b \underbrace{f^2(x)}_{\geq 0}\, dx \overset{\text{propriedades da integral definida}}{\geq} 0,\end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (7.104), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 7.3.5

1. *A função*

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : SC([a, b]; \mathbb{R}) \times SC([a, b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

dada por (7.99) *(respectivamente,* $\langle \cdot, \cdot\rangle : SC([a, b]; \mathbb{C}) \times SC([a, b]; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$*, dada por* (7.100)*) é quase um* **produto interno** *no espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(SC([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ *(respectivamente,* $(SC([a, b]; \mathbb{C}), +, \cdot)$*), onde* $\underline{+}$ *denota a operação usual de adição de funções e* $\underline{\cdot}$ *denota a operação multiplicação de número real (respectivamente, complexo) por uma função.*

Para a função $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *ser um produto interno no respectivo espaço vetorial, ela teria que satisfazer, além das propriedades da Proposição* (7.3.1) *(ou seja, 1., 2. e 3.), também deveria satisfazer a seguinte propriedade:*

$$\textit{se } f \in SC([a, b]; \mathbb{R}) \quad \textit{então} \quad \langle f, f\rangle = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad f = O,$$

(respectivamente, em $SC([a, b]; \mathbb{C})$*).*

Mas essa propriedade **não** *vale em* $SC([a, b]; \mathbb{R})$ *(ou em* $SC([a, b]; \mathbb{C})$*), como mostra o seguinte exemplo:*

Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{para} \quad x \in (0, 1] \\ 1, & \textit{para} \quad x = 0 \end{cases}. \tag{7.105}$$

Observemos que $f \in SC([0, 1]; \mathbb{R})$ *e*

$$\langle f, f\rangle \overset{(7.99) \textit{ com } a=0 \textit{ e } b=1}{=} \int_0^1 f^2(x)\, dx \overset{\textit{Exercício}}{=} 0,$$

mas

$$f \neq O.$$

Mesmo assim, a função $\langle \cdot, \cdot\rangle$*, dada por* (7.99) *(respectivamente,* (7.100)*) desempenhará um papel inportante na determinação dos coeficientes*

$$a_m \quad \textit{e} \quad b_n, \quad \textit{para} \quad m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \quad \textit{e} \quad n \in \mathbb{N},$$

da expansão (7.3)*, associada à função* $\underline{f}$*, como veremos mais adiante.*

2. *Notemos que a função* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *dada por* (7.99) *(respectivamente,* (7.100)*) satisfaz a* **desiguladade de Cauchy-Schwartz**, *isto é,*

   Dadas $f, g \in SC([a, b] :, \mathbb{R})$ *(respectivamente,* $SC([a, b] :, \mathbb{C})$*), segue que*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \, \|g\|, \tag{7.106}$$

   onde

$$\|f\| \doteq \sqrt{\langle f, f\rangle}, \tag{7.107}$$

   que será denominada **semi-norma da função f**.

   Faremos a demonstração da desigualdade acima para o caso de funções a valores reais, isto é, em $SC([a, b] :, \mathbb{R})$.

   O caso de funções a valores complexo, isto é, em $SC([a, b] :, \mathbb{C})$, *será deixado com exercício para o leitor.*

   Notemos que, dada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *sabemos que*

$$\begin{aligned}
0 &\overset{(7.104)}{\leq} \langle \lambda f + g, \lambda f + g\rangle \\
&\overset{(7.102)}{=} \lambda^2 \langle f, f\rangle + \lambda \langle f, g\rangle + \lambda \underbrace{\langle g, f\rangle}_{\overset{(7.103)\ caso\ real}{=} \langle f, g\rangle} + \langle g, g\rangle \\
&= \lambda^2 \langle f, f\rangle + 2\lambda \langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \\
&\overset{(7.107)}{=} \|f\|^2 \lambda^2 + 2 \langle f, g\rangle \lambda + \|g\|^2.
\end{aligned} \tag{7.108}$$

   Logo o trinômio do 2.o grau à direita deverá ser não negativo, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *para que isto aconteça é necessário e suficiente, que o discriminante, que indicaremos por* $\underline{\Delta}$, *do trinômio do 2.o grau à direita deverá ser não positivo, isto é*

$$\Delta \leq 0,$$

   ou seja,

$$0 \geq \Delta \overset{(7.108)}{=} 4 \langle f, g\rangle^2 - 4 \|f\|^2 \|g\|^2,$$

   que dividindo por $\underline{4}$, *implicará em*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \, \|g\|,$$

   como queríamos demonstrar.

3. *Como consequência de* (7.106), *temos que a função* $\| \ \| : SC([a, b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\| \ \| : SC([a, b]; \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$*) satisfaz a, assim denominada,* **desigualdade triangular** , *ou seja:*

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{7.109}$$

   onde $f, g \in SC([a, b]; \mathbb{R})$ *(respectivamente,* $SC([a, b]; \mathbb{C})$*).*

De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &\overset{(7.107)}{=} \langle f+g\,,f+g\rangle \\
&\overset{(7.102)}{=} \langle f\,,f\rangle + \langle f\,,g\rangle + \underbrace{\langle g\,,f\rangle}_{\overset{(7.103)}{=}\,\textit{caso real}\,\langle f\,,g\rangle} + \langle g\,,g\rangle \\
&\overset{(7.107)}{=} \|f\|^2 + 2\,\langle f\,,g\rangle + \|g\|^2 \\
&\leq \|f\|^2 + 2\,|\langle f\,,g\rangle| + \|g\|^2 \\
&\overset{(7.106))}{\leq} \|f\|^2 + 2\,\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 \\
&= (\|f\|+\|g\|)^2\,,
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|\,,$$

como queríamos demonstrar.

4. *Além disso vale, o assim denominado* **Teorema de Pitágoras**, *ou seja, se* $f\,,g \in SC([a\,,b]\,;\mathbb{R})$ *(respectivamente,* $SC([a\,,b]\,;\mathbb{C})$*), então*

$$\langle f\,,g\rangle = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \tag{7.110}$$

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \tag{7.111}$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &\overset{(7.107)}{=} \langle f+g\,,g+g\rangle \\
&\overset{(7.102)}{=} \langle f\,,f\rangle + \langle f\,,g\rangle + \underbrace{\langle g\,,f\rangle}_{\overset{(7.103)}{=}\,\textit{caso real}\,\langle f\,,g\rangle} + \langle g\,,g\rangle \\
&\overset{(7.107)}{=} \|f\|^2 + 2\,\langle f\,,g\rangle + \|g\|^2
\end{aligned} \tag{7.112}$$

Logo, de (7.112), segue que

$$\langle f\,,g\rangle = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

como queríamos demonstrar.

A segui exibiremos algumas propriedades gerais de integrais definidas de algumas classes de funções especiais, que serão importantes no calculo dos coeficientes

$$a_n \quad \text{e} \quad b_n\,, \quad \text{para} \quad m \in \{0\}\cup\mathbb{N} \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{N}$$

na expressão (7.3).

Observação 7.3.6 *Seja* $L \in (0\,,\infty)$ *fixado.*

Observemos que:

1. *Se a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(respectivamente,* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$*) é* $2\,L-$ *periódica, ou seja,*

$$f(x+2\,L)=f(x)\,,\quad \textit{para cada}\quad x\in\mathbb{R}\,, \tag{7.113}$$

e é integrável em $[-L\,,L]$*, segue que*

$$\int_0^{2\,L} f(x)\,dx=\int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{7.114}$$

Em geral, para cada $x_o\in\mathbb{R}$ *fixado, temos:*

$$\int_{x_o-L}^{x_o+L} f(x)\,dx=\int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{7.115}$$

De fato, notemos que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \overset{\textit{propriedades da integral definida}}{=} \int_{-L}^{0} f(x)\,dx+\int_0^{2\,L} f(x)\,dx+\int_{2\,L}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{7.116}$$

Aplicando mudança de variáveis na integral definida, obteremos:

$$\begin{aligned}\int_{2\,L}^{L} f(x)\,dx &= \left\langle \begin{array}{l} y=x-2\,L\,,\quad \textit{logo:}\quad dy=dx \\ \textit{assim}\quad x=y+2\,L \\ x=2\,L\,,\quad \textit{logo:}\quad y=0 \\ x=L\,,\ \textit{logo:}\ y=-L \end{array}\right\rangle = \int_0^{-L} f(y+2\,L)\,dy \\ &\overset{(7.113)}{=} \int_0^{-L} f(y)\,dy \\ &= -\int_{-L}^{0} f(y)\,dy\,. \end{aligned} \tag{7.117}$$

Substituindo (7.117) *em* (7.116)*, obteremos*

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx &= \int_{-L}^{0} f(x)\,dx+\int_0^{2\,L} f(x)\,dx-\int_{-L}^{0} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{2\,L} f(x)\,dx\,, \end{aligned} \tag{7.118}$$

mostrando a validade da identidade (7.114).

A verificação da identidade (7.115) *será deixada como exercício para o leitor.*

2. *Suponhamos que a função* $f:[-L\,,L]\to\mathbb{R}$ *(respectivamente,* $f:[-L\,,L]\to\mathbb{C}$*) é uma função par, isto é,*

$$f(-x)=f(x)\,,\quad \textit{para cada}\quad x\in[-L\,,L]\,. \tag{7.119}$$

e integrável em $[-L, L]$.

Então teremos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{7.120}$$

De fato, notemos que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \overset{\text{propriedades da integral definida}}{=} \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{7.121}$$

Mas, de uma mudança de variáveis na integral definida, obteremos:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{0} f(x)\,dx &= \left\langle \begin{array}{l} y = -x\,, \quad \textit{logo}: dy = -dx \\ \quad \textit{assim}: x = -y \\ x = -L\,, \quad \textit{logo}: y = L \\ x = 0\,, \quad \textit{logo}: y = 0 \end{array} \right\rangle = \int_{L}^{0} f(-y)\,(-dy) \\ &\overset{(7.119)}{=} -\int_{L}^{0} f(y)\,dy \\ &\overset{\text{propriedade da integral definida}}{=} \int_{0}^{L} f(y)\,dy\,,\end{aligned} \tag{7.122}$$

ou seja,

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{7.123}$$

Portanto, substituindo (7.123) *em* (7.121), *teremos*

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx &= \int_{0}^{L} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

3. *Suponhamos que a função* $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$*) seja uma função ímpar, isto é,*

$$f(-x) = -f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-L, L]\,, \tag{7.124}$$

e integrável em $[-L, L]$.

Então, teremos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0\,. \tag{7.125}$$

De fato, observemos que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \overset{\text{propriedades da integral definida}}{=} \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{7.126}$$

Mas, de uma mudança de variáveis na integral definida, obteremos:

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = \left\langle \begin{array}{l} y = -x\,, \quad \textit{logo:} \quad dy = -dx \\ \textit{assim:} \quad x = -y \\ x = -L\,, \quad \textit{logo:} \quad y = L \\ x = 0\,, \quad \textit{logo:} \quad y = 0 \end{array} \right\rangle = \int_{L}^{0} f(-y)\,(-dy)$$
$$\stackrel{(7.124)}{=} -\int_{0}^{L} f(y)\,dy\,,$$

ou seja,

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{7.127}$$

Portanto, substituindo (7.127) *em* (7.126)*, teremos*

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = -\int_{0}^{L} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx$$
$$= 0\,,$$

como queríamos demonstrar.

4. *Lembremos que se* $f, g : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $f, g : [-L, L] \to \mathbb{C}$*) são funções pares, então as funçoes*

$$f \cdot g\,, \quad f + g\,, \quad f - g\,, \quad \textit{e} \quad \frac{f}{g}$$

(na última, onde ela estiver definida) também serão funções pares.

Por outro lado, se as função $f, g : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $f, g : [-L, L] \to \mathbb{C}$*) forem funções ímpares, então as funções*

$$f \cdot g \quad \textit{e} \quad \frac{f}{g}$$

(esta última, onde estiver definida) serão funções pares e as funções

$$f + g \quad \textit{e} \quad f - g$$

serão funções ímpares.

Por fim se a função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *for uma função par e a função* $g : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *for uma função ímpar (respectivamente,* $f, g : [-L, L] \to \mathbb{C}$*) então as funções*

$$f \cdot g \quad \textit{e} \quad \frac{f}{g}$$

(esta última, onde estiver definida) serão funções ímpares.

As demonstrações destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

5. *No resultado que vem a seguir, precisaremos das seguintes relações trigonométricas:*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\,\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\,\operatorname{sen}(b) \tag{7.128}$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\,\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\,\operatorname{sen}(b) \tag{7.129}$$

Notemos que, somando-se (7.128) *com* (7.129), *obteremos*

$$\cos(a)\,\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \tag{7.130}$$

e subtraindo-se (7.128) *de* (7.129), *teremos*

$$\operatorname{sen}(a)\,\operatorname{sen}(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}. \tag{7.131}$$

Além disso,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\,\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\,\cos(a) \tag{7.132}$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\,\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\,\cos(a) \tag{7.133}$$

Notemos que, somando-se (7.132) *com* (7.133), *obteremos*

$$\operatorname{sen}(a)\,\cos(b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{2}. \tag{7.134}$$

A seguir definiremos duas famílias de funções que serão muito importantes no estudo das funções que podem ser expandidas em uma série de funções do tipo (7.3).

Definição 7.3.3 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *definiremos a função* $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$\phi_n(x) \doteq \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.135}$$

e para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *definiremos a função* $\psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$\psi_m(x) \doteq \cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.136}$$

Estas duas famílias de funções têm as seguintes propriedades:

Proposição 7.3.2

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *as funções* $\underline{\psi_n}$ *e* $\underline{\phi_n}$ *são* $\dfrac{2\,L}{n}$*-periódicas.*
   Em particular, todas elas serão $2\,L$*-periódicas;*

2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a funçãos* $\underline{\phi_n}$ *é uma função ímpar;*

3. *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{\psi_m}$ *é uma função par;*

4. *Valem as seguintes identidades:*

$$\langle \psi_k , \psi_m \rangle = \begin{cases} 0 , & \textit{para } k , m \in \{0\} \cup \mathbb{N} , \quad \textit{com} \quad k \neq m \\ L , & \textit{para } k = m \in \mathbb{N} \\ 2 L , & \textit{para } k = m = 0 \end{cases} ; \tag{7.137}$$

$$\langle \psi_m , \phi_n \rangle = 0 , \quad \textit{para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \quad \textit{e} \quad n \in \mathbb{N} ; \tag{7.138}$$

$$\langle \phi_n , \phi_j \rangle = \begin{cases} 0 , & \textit{para } n , j \in \mathbb{N} \quad \textit{com} \quad n \neq j \\ L , & \textit{para } n = j \in \mathbb{N} \end{cases} . \tag{7.139}$$

Demonstração:

De 1.:

Seja $n \in \mathbb{N}$ e consideremos

$$T \doteq \frac{2 L}{n} . \tag{7.140}$$

Para a função ϕ_n teremos:

Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \phi_n(x + T) &\overset{(7.135)}{=} \operatorname{sen}\left[\frac{n \pi}{L}(x + T)\right] \\ &\overset{(7.140)}{=} \operatorname{sen}\left[\frac{n \pi}{L}\left(x + \frac{2 L}{n}\right)\right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x + 2 \pi\right) \\ &\overset{\text{sen é } 2\pi\text{-periódica}}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \\ &\overset{(7.135)}{=} \phi_n(x) . \end{aligned}$$

Logo o número real T, dado por (7.140), é um período para a função ϕ_n.

Por outro lado, notemos que se $T' \in (0 , \infty)$ é um outro período para a função ϕ_n então, para cada $x \in \mathbb{R}$, deveremos ter

$$\begin{aligned} & \phi_n(x + T') = \phi_n(x) , \\ \text{de (7.135), teremos} \quad & \operatorname{sen}\left[\frac{n \pi}{L}(x + T')\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) , \\ \text{de (7.132), segue que} \quad & \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n \pi}{L} T'\right) \\ & + \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} T'\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) . \end{aligned} \tag{7.141}$$

Tomando-se

$$x = \frac{L}{2 n} ,$$

na identidade (7.141), obteremos:

$$\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}T'\right)+\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}T'\right)=\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0},$$

$$\text{isto é,}\quad \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}T'\right)=1\,,$$

$$\text{logo,}\quad \frac{n\,\pi}{L}T'=2\,k\,\pi\,,$$

para algum $k\in\mathbb{Z}$.

Portanto

$$T'=k\,\frac{2\,L}{n}\overset{(7.140)}{=}k\,T\,,$$

para algum $k\in\mathbb{Z}$, mostrando que $\underline{T}$, dado por (7.140), é o período fundamental da função $\underline{\phi_n}$, para cada $n\in\mathbb{N}$.

Para a função $\underline{\psi_n}$:

Para cada $x\in\mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\psi_m(x+T)&\overset{(7.136)}{=}\cos\left[\frac{n\,\pi}{L}(x+T)\right]\\
&\overset{(7.140)}{=}\cos\left[\frac{n\,\pi}{L}\left(x+\frac{2\,L}{n}\right)\right]\\
&=\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x+2\,\pi\right)\\
&\overset{\cos\ \text{é } 2\pi\text{-periódica}}{=}\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\\
&\overset{(7.136)}{=}\psi_n(x)\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado se $T'\in(0\,,\infty)$ é um outro período para a função $\underline{\psi_n}$ então, para cada $x\in\mathbb{R}$, deveremos ter

$$\begin{aligned}
&\psi_n(x+T')=\psi_n(x)\quad,\\
\text{de (7.136), teremos}\quad&\cos\left[\frac{n\,\pi}{L}(x+T')\right]=\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\,,\\
\text{de (7.128), segue que}\quad&\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}T'\right)\\
&+\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}T'\right)=\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\,.
\end{aligned}\tag{7.142}$$

Tomando-se

$$x=\frac{L}{n}$$

na identidade (7.142), obteremos:

$$\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}T'\right)+\underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0}\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}T'\right)=\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1},$$

$$\text{isto é,}\quad \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}T'\right)=1\,,$$

$$\text{logo,}\quad \frac{n\,\pi}{L}T'=2\,k\,\pi\,,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto

$$T' = k\,\frac{2\,L}{n} \overset{(7.140)}{=} k\,T\,,$$

mostrando que $\underline{T}$, dado por (7.140), é o período fundamental da função $\underline{\psi_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, completando a demonstração do item 1. .

<u>De 2.:</u>

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\phi_n(-x) &\overset{(7.135)}{=} \operatorname{sen}\left[\frac{n\,\pi}{L}\,(-x)\right] \\
&\overset{\text{sen é uma função ímpar}}{=} -\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\
&\overset{(7.135)}{=} -\phi_n(x)\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{\phi_n}$ é uma função ímpar, completando a demonstração do item 2. .

<u>De 3.:</u>

Observemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\psi_m(-x) &\overset{(7.136)}{=} \cos\left[\frac{m\,\pi}{L}\,(-x)\right] \\
&\overset{\cos\ \text{é uma função par}}{=} \cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right) \\
&\overset{(7.136)}{=} \psi_m(x)\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{\psi_m}$ é uma função par, completando a demonstração do item 3. .

<u>De 4.:</u>

Notemos que, para $k\,,m \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_k\,,\psi_m\rangle &\overset{(7.99)}{=} \int_{-L}^{L} \psi_k(x)\,\psi_m(x)\,dx \\
&\overset{(7.136)}{=} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\
&\overset{(7.130)}{=} \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x + \frac{m\,\pi}{L}\,x\right) + \cos\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x - \frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\cos\left[\frac{(k+m)\,\pi}{L}\,x\right] + \cos\left[\frac{(k-m)\,\pi}{L}\,x\right]\right\}\,dx\,. \qquad (7.143)
\end{aligned}$$

Logo, se $k \neq m$, segue que:

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_k , \psi_m \rangle &\overset{(7.143)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{ \cos \left[\frac{(k+m)\,\pi}{L}\, x \right] + \cos \left[\frac{(k-m)\,\pi}{L}\, x \right] \right\} dx \\
&\overset{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} \frac{1}{2} \left\{ \text{sen} \left[\frac{(k+m)\,\pi}{L}\, x \right] \frac{L}{(k+m)\,\pi} \right|_{-L}^{L} \\
&\qquad + \text{sen} \left[\frac{(k-m)\,\pi}{L}\, x \right] \frac{L}{(k-m)\,\pi} \left. \right|_{x=-L}^{x=L} \Bigg\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{L}{(k+m)\,\pi} \{ \text{sen}[(n+m)\,\pi] - \text{sen}[(k+m)\,(-\pi)] \} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{L}{(k-m)\,\pi} \{ \text{sen}[(k-m)\,\pi] - \text{sen}[(k-m)\,(-\pi)] \} \right\} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
\tag{7.144}
$$

Se $k = m \in \mathbb{N}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_m , \psi_m \rangle &\overset{(7.143)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{ \cos \left[\frac{(k+m)\,\pi}{L}\, x \right] + \cos \overbrace{\left[\frac{\overbrace{(k-k)}^{=0}\,\pi}{L}\, x \right]}^{=1} \right\} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left[\cos \left(\frac{2\,n\,\pi}{L}\, x \right) + 1 \right] dx \\
&\overset{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} \frac{1}{2} \left[\text{sen} \left(\frac{2\,m\,\pi}{L}\, x \right) \frac{L}{2\,m\,\pi} + x \right] \Bigg|_{x=-L}^{x=L} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{L}{2\,m\,\pi} \underbrace{\text{sen}(2\,m\,\pi)}_{=0} + L - \left[\frac{L}{2\,m\,\pi} \underbrace{\text{sen}(-2\,m\,\pi)}_{=0} - L \right] \right\} \\
&= L\,.
\end{aligned}
$$

Se $k = m = 0$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_o , \psi_o \rangle &\overset{(7.136)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} 2\, dx \\
&= 2\,L\,,
\end{aligned}
$$

com isto completamos a demonstração de (7.137).

Por outro lado se $n, j \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n , \phi_j \rangle &\overset{(7.99)}{=} \int_{-L}^{L} \phi_n(x)\, \phi_j(x)\, dx \\
&\overset{(7.135)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\, x \right)\, \operatorname{sen}\left(\frac{j\,\pi}{L}\, x \right) \right] dx \\
&\overset{(7.131)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{ \cos\left[\frac{(n-j)\,\pi}{L}\, x \right] - \cos\left[\frac{(n+j)\,\pi}{L}\, x \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{7.145}$$

Se $j = n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n , \phi_n \rangle &\overset{(7.145)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{ \underbrace{\cos\left[\frac{\overbrace{(n-n)}^{=0}\,\pi}{L}\, x \right]}_{=1} - \cos\left[\frac{(n+n)\,\pi}{L}\, x \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{ 1 - \cos\left[\frac{(n+n)\,\pi}{L}\, x \right] \right\} \\
&\overset{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} \frac{1}{2} \left[x - \cos\left(\frac{2\,n\,\pi}{L}\, x \right) \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] \Big|_{x=-L}^{x=L} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[L - \cos\left(\frac{2\,n\,\pi}{L}\, L \right) \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] - \left[(-L) - \cos\left(\frac{2\,n\,\pi}{(-L)} \right) \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[L - \cos(2\,n\,\pi)\, \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] - \left[-L - \underbrace{\cos(-2\,n\,\pi)}_{=\cos(2\,n\,\pi)}\, \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[L - \underbrace{\cos(2\,n\,\pi)}_{=1}\, \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] - \left[-L - \underbrace{\cos(-2\,n\,\pi)}_{=1}\, \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[L - \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] - \left[-L - \frac{L}{2\,n\,\pi} \right] \right\} \\
&= L ,
\end{aligned}$$

mostrando (7.139).

Por outro lado $j \neq n$, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n , \phi_j \rangle &\overset{(7.145)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{ \cos\left[\frac{(n-j)\,\pi}{L}\, x \right] - \cos\left[\frac{(n+j)\,\pi}{L}\, x \right] \right\} \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

A verificação da última igualdade acima é semelhante ao que fizemos em (7.144) e assim, deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Além disso, se $n \in \{0\} \cup N$ e $m \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n , \phi_m \rangle &\overset{(7.99)}{=} \int_{-L}^{L} \psi_n(x)\, \phi_m(x)\, dx \\
&\overset{(7.136) \text{ e } (7.135)}{=} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\, \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\, dx \\
&\overset{(7.134)}{=} \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x + \frac{m\,\pi}{L}\,x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x - \frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\right]\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left\{\operatorname{sen}\left[\frac{(n+m)\,\pi}{L}\,x\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{(n-m)\,\pi}{L}\,x\right]\right\}\, dx\,.
\end{aligned} \tag{7.146}$$

Se $n \neq m$, segue que:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n , \phi_m \rangle &\overset{(7.146)}{=} \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left\{\operatorname{sen}\left[\frac{(n+m)\,\pi}{L}\,x\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{(n-m)\,\pi}{L}\,x\right]\right\}\, dx \\
&\overset{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} \frac{1}{2}\left\{-\cos\left[\frac{(n+m)\,\pi}{L}\,x\right]\, \frac{L}{(n+m)\,\pi}\,\Bigg|_{x=-L}^{x=L} \right. \\
&\qquad \left. -\cos\left[\frac{(n-m)\,\pi}{L}\,x\right]\, \frac{L}{(n-m)\,\pi}\,\Bigg|_{x=-L}^{x=L}\right\} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 0
\end{aligned}$$

e, finalmente, para $n = m \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n , \phi_n \rangle &\overset{(7.146)}{=} \int_{-L}^{L} \left\{\operatorname{sen}\left[\frac{(n+n)\,\pi}{L}\,x\right] + \overbrace{\operatorname{sen}\left[\frac{\overbrace{(n-n)}^{=0}\,\pi}{L}\,x\right]}^{=0}\right\}\, dx \\
&\overset{(7.146)}{=} \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{2\,n\,\pi}{L}\,x\right)\, dx \\
&\overset{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\,n\,\pi}{L}\,x\right)\, \frac{L}{2\,n\,\pi}\,\Bigg|_{x=-L}^{x=L} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 0\,,
\end{aligned} \tag{7.147}$$

mostrando (7.138) e completando do item 4. e do resultado.

□

Observação 7.3.7

1. *Suponhamos que a função $f : [-L\,, L] \to \mathbb{R}$ pode ser representada por uma série de funções do tipo*

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\, \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + b_n\, \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right], \tag{7.148}$$

para cada $x \in [-L\,,L]$, *que, de* (7.136) *e* (7.135), *é o mesmo que escrever*

$$f(x) = \frac{a_o}{2}\,\psi_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\psi_n(x) + b_n\,\phi_n(x)\right]\,. \tag{7.149}$$

Formalmente, notemos que:

$$\begin{aligned}
\langle f\,,\psi_o\rangle &\overset{(7.149)}{=} \left\langle \frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\psi_n + b_n\,\phi_n\right],\psi_o\right\rangle \\
&\overset{\textit{todo cuidado!}}{=} \frac{a_o}{2}\,\underbrace{\langle\psi_o\,,\psi_o\rangle}_{\overset{(7.137)}{=}2\,L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\underbrace{\langle\psi_n\,,\psi_o\rangle}_{\overset{(7.137)}{=}0} + b_n\,\underbrace{\langle\phi_n\,,\psi_o\rangle}_{\overset{(7.138)}{=}0}\right] \\
&= \frac{a_o}{2}\,2\,L \\
&= a_o\,L\,,
\end{aligned} \tag{7.150}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
a_o &\overset{(7.150)}{=} \frac{1}{L}\,\langle f\,,\psi_o\rangle \\
&\overset{(7.99)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\psi_o(x)\,dx \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,.dx
\end{aligned} \tag{7.151}$$

De modo análogo, se $m \neq 0$, *temos:*

$$\begin{aligned}
\langle f\,,\psi_m\rangle &= \left\langle \frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\psi_n + b_n\,\phi_n\right]\,,\psi_m\right\rangle \\
&\overset{\textit{todo cuidado!}}{=} \frac{a_o}{2}\,\underbrace{\langle\psi_o\,,\psi_m\rangle}_{\overset{(7.137)\ \textit{com}\ m\neq 0}{=}0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\underbrace{\langle\psi_n\,,\psi_m\rangle}_{\overset{(7.137)\ \textit{com}\ n\,,m\neq 0}{=}\begin{cases}0\,, & \textit{se}\ n\neq m\\ L\,, & \textit{se}\ n = m\end{cases}} + b_n\,\underbrace{\langle\phi_n\,,\psi_m\rangle}_{\overset{(7.138)}{=}0}\right] \\
&= a_m\,L\,,
\end{aligned} \tag{7.152}$$

ou seja, para $m \in \mathbb{N}$, *teremos*

$$\begin{aligned}
a_m &\overset{(7.152)}{=} \frac{1}{L}\,\langle f\,,\psi_m\rangle \\
&\overset{(7.99)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\psi_m(x)\,dx \\
&\overset{(7.136)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,.
\end{aligned} \tag{7.153}$$

Finalmente, para $k \in \mathbb{N}$, *temos:*

$$
\begin{aligned}
\langle f\,,\phi_k\rangle &= \left\langle \frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\psi_n + b_n\,\phi_n\right]\,,\phi_k \right\rangle \\
&\overset{\text{todo cuidado!}}{=} \frac{a_o}{2}\,\underbrace{\langle\psi_o\,,\phi_k\rangle}_{\overset{(7.138)}{=}0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\,\underbrace{\langle\psi_n\,,\phi_k\rangle}_{\overset{(7.138)}{=}0} + b_n\,\underbrace{\langle\phi_n\,,\phi_k\rangle}_{\overset{(7.139)}{=}\begin{cases}0\,, & se\ n \neq k\\ L\,, & se\ n = k\end{cases}}\Big] \\
&= b_k\,L\,,
\end{aligned}
\tag{7.154}
$$

ou seja, para $k \in \mathbb{N}$, *teremos*

$$
\begin{aligned}
b_k &\overset{(7.154)}{=} \frac{1}{L}\,\langle f\,,\phi_k\rangle \\
&\overset{(7.99)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\phi_k(x)\,dx \\
&\overset{(7.135)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,.
\end{aligned}
\tag{7.155}
$$

Conclusão, de (7.150), (7.153) *e* (7.155), *segue que os coeficientes da série de funções* (7.148) *(ou, equivalentemente, da série de funções* (7.149)*) serão dados por:*

$$
a_m \doteq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad m \in \{0\} \cup \mathbb{N}
\tag{7.156}
$$

e

$$
b_k \doteq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{N}\,.
\tag{7.157}
$$

2. *A obtenção de* (7.156) *e* (7.157) *foi formal, isto é, sem o rigor matemático necessário com relação a convergência das séries de funções envolvidas.*

   Na verdade precisaríamos justificar o "**todo cuidado!**" *nos cáculos do teim 1 acima.*

3. *Dada uma função* $f : [-L\,,L] \to \mathbb{R}$ *que seja integrável em* $[-L\,,L]$, *segue que os coeficientes* (7.156) *e* (7.157) *existem, e podemos considerar a série de funções, que denotaremos por* $\underline{S[f]}$:

$$
S[f](x) \doteq \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + b_n\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right]\,,
\tag{7.158}
$$

ou ainda,

$$
S[f] \doteq \frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\psi_n + b_n\,\phi_n\right]\,,
\tag{7.159}
$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *o coeficiente* $\underline{a_m}$ *será dado por* (7.156) *e, para cada* $k \in \mathbb{N}$, *o coeficiente* $\underline{b_k}$ *será dado por* (7.157), *e assim podemos pensar em estudar a convergência da serie de funções* (7.158) *(ou, equivalentemente, da série de funções* (7.159)*).*

A fórmulas (7.156) *e* (7.157), *que nos fornecem expressões para os coeficientes na série de funções* (7.158) *(ou, equiavelentemente, da série de funções* (7.159)*), são denominadas* **fórmulas de Euler-Fourier**.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 7.3.4 *Sejam* $L > 0$ *fixado e* $f : [-L\,, L] \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[-L\,, L]$.

A série de funções (7.158) *(ou, equivalentemente, da série de funções* (7.159)*), onde os coeficientes* $\underline{a_m}$ *e* $\underline{b_k}$ *são dados por* (7.156) *e* (7.157), *respectivamente, será denominada* **série de Fourier associada à fun-ção** $\underline{f}$.

Os coeficientes $\underline{a_m}$ *e* $\underline{b_k}$, *dados por* (7.156) *e* (7.157), *respectivamente, serão ditos* **coeficientes de Fourier associados à função** $\underline{f}$.

A seguir faremos algumas observções sobre as considerações acima.

Observação 7.3.8

1. *Se* $f \in SC([-L\,, L]\,; \mathbb{R})$, *logo será uma função integrável em* $[-L\,, L]$.

   Portanto, existem os coeficientes de Fourier associados a função $\underline{f}$, *ou seja, os coeficientes* $\underline{a_m}$ *e* $\underline{b_k}$, *para cada* $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *dados por* (7.156) *e* (7.157), *respectivamente.*

2. *Do item 1. da Proposição* (7.3.2), *segue que cada termo da série de funções* (7.158) *(ou, equivalentemente, da série de funções* (7.159)*) será uma função* $2\,L$*-periódica.*

   Logo se a série de funções (7.158) *(ou, equivalentemente, da série de funções* (7.159)*) for convergente, ela será convergente para uma função que deverá ser* $2\,L$*-periódica em* $\mathbb{R}$.

   Em particular, se a função $f \in SC([-L\,, L]\,; \mathbb{R})$ *tem a propriedade*

$$f(-L) \neq f(L)\,, \tag{7.160}$$

   não poderemos esperar que a série de Fourier associada à função $\underline{f}$, *ou seja, a série de funções* (7.158) *(ou, equivalentemente, a série de funções* (7.159)*), venha a convergir para a função* $\underline{f}$, *em* $[-L\,, L]$, *pois a* $\underline{f}$ *deveria possuir uma extensão* $2\,L$*-periódica à* $\mathbb{R}$, *que denotatemos por* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *e esta deveria satisfazer*

$$\begin{aligned} f(-L) &\overset{F \text{ é extensão de } f}{=} F(-L) \\ &\overset{F \text{ é } 2\,L\text{-periódica}}{=} F(-L + 2L) \\ &= F(L) \\ &\overset{F \text{ é extensão de } f}{=} f(L)\,, \end{aligned}$$

contrariando (7.160).

Portanto, é natural estudarmos as séries de Fourier associadas à funções que estão definidas em $\mathbb{R}$ *e que sejam* $2\,L$*-periódicas, ou ainda, se a função* $f : [-L\,, L] \to \mathbb{R}$*, então deveremos ter*

$$f(-L) = f(L) \tag{7.161}$$

e assim, se a série de Fourier associada à função $\underline{f}$*, ou seja,* $\underline{S[f]}$*, for convergente para a função* $\underline{f}$*, em* $[-L\,, L]$*, então a série de funções* $\underline{S[f]}$ *irá convergir para uma função* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, de modo que a função* $\underline{F}$ *será a extensão* $2\,L$*-periódica da função* $\underline{f}$ *à* $\mathbb{R}$.

3. *Observemos que se a função* $f : [-L\,, L] \to \mathbb{R}$ *é uma função integrável em* $[-L\,, L]$ *e for uma* **função par***, então, para cada* $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, temos que a função*

$$x \mapsto f(x)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)$$

também será uma função par e, para cada $k \in \mathbb{N}$*, a função*

$$x \mapsto f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)$$

será uma função ímpar.

Logo, dos itens 2. e 3. da Observação (7.3.6), para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, teremos:*

$$\begin{aligned} a_m &\overset{(7.156)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)}_{\textit{função par}}\,dx \\ &\overset{(7.120)}{=} \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \end{aligned} \tag{7.162}$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$*, segue que*

$$\begin{aligned} b_k &\overset{(7.157)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)}_{\textit{função ímpar}}\,dx \\ &\overset{(7.125)}{=} 0\,. \end{aligned} \tag{7.163}$$

4. *Observemos que se a função* $f : [-L\,, L] \to \mathbb{R}$ *é uma função integrável em* $[-L\,, L]$ *e for uma* **função ímpar***, então, para cada* $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, a função*

$$x \mapsto f(x)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)$$

será uma função ímpar e, para cada $k \in \mathbb{N}$*, a função*

$$x \mapsto f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)$$

será uma função par.

Logo, dos itens 2. e 3. da Observação (7.3.6), para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, teremos:*

$$\begin{aligned} a_m &\overset{(7.156)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{f(x) \cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)}_{\textit{função ímpar}} dx \\ &\overset{(7.125)}{=} 0 \end{aligned} \tag{7.164}$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$*, segue que*

$$\begin{aligned} b_k &\overset{(7.157)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)}_{\textit{função par}} dx \\ &\overset{(7.120)}{=} \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right) dx\,. \end{aligned} \tag{7.165}$$

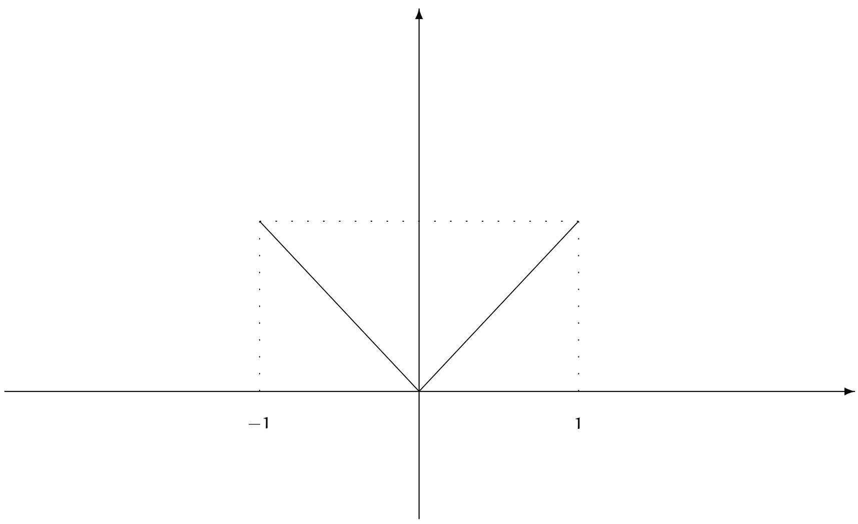
Apliquemos os conceitos desenvolvidos acima aos seguintes exemplos:

Exemplo 7.3.4 *Encontrar a série de Fourier, qua denotaremos por* $\underline{S[f]}$*, associada à função* $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -x\,, & \textit{para cada} \quad x \in [-1\,,0) \\ x\,, & \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1] \end{cases} . \tag{7.166}$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Onda Dente de Serra

Notemos que, neste caso, temos que

$$L \doteq 1$$

e a função $\underline{f}$ é contínua e par em $[-1\,,1]$.

Logo

$$
\begin{aligned}
a_o &\overset{(7.156)\text{ com } m=0}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\
&\overset{f \text{ é par, } (7.162) \text{ com } m=0}{=} 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx \\
&\overset{(7.166)}{=} 2\int_{0}^{1} x\,dx \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} 2\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}\right] \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 1\,.
\end{aligned}
\tag{7.167}
$$

Por outro lado, $m \in \mathbb{N}$ temos:

$$
\begin{aligned}
a_m &\overset{(7.156)\text{ com } m\in\mathbb{N}}{=} \int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\
&\overset{L=1}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\cos(m\,\pi\,x)\,dx \\
&\overset{f \text{ e cos são pares, } (7.162) \text{ com } m\in\mathbb{N}}{=} 2\int_{0}^{1} f(x)\,\cos(m\,\pi\,x)\,dx \\
&\overset{(7.166)}{=} 2\int_{0}^{1} x\,\cos(m\,\pi\,x)\,dx \\
&\left\langle \begin{array}{l} u \doteq x\,,\ \text{logo, } du = dx \\ dv \doteq \cos(m\,\pi\,x)\,dx\,,\ \text{logo, } v = \dfrac{\operatorname{sen}(m\,\pi\,x)}{m\,\pi} \end{array}\right\rangle \\
&= 2\left[x\,\frac{\operatorname{sen}(m\,\pi\,x)}{m\,\pi}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_{0}^{1}\frac{\operatorname{sen}(m\,n\,\pi\,x)}{m\,\pi}\,dx\right] \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} 2\left\{\left[\frac{\overbrace{\operatorname{sen}(m\,\pi)}^{=0}}{m\,\pi} - \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(m\,\pi\,0)}^{=0}}{m\,\pi}\right] + \frac{\cos(m\,\pi\,x)}{(m\,\pi)^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\right\} \\
&= \frac{\overbrace{\cos(m\,\pi)}^{=(-1)^m}}{(m\,\pi)^2} - \frac{\overbrace{\cos(m\,\pi\,0)}^{=1}}{(m\,\pi)^2} \\
&= \frac{2}{m^2\,\pi^2}\,[(-1)^m - 1] \\
&= \begin{cases} \dfrac{-4}{m^2\,\pi^2}\,, & \text{para cada } \ m \text{ ímpar} \\ 0\,, & \text{para cada } \ m \text{ par} \end{cases}\,.
\end{aligned}
\tag{7.168}
$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} b_k &\overset{(7.157)\text{ com } k\in\mathbb{N}}{=} \int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\ &\overset{L=1}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\,\text{sen}(k\,\pi\,x)\,dx \\ &\overset{f\text{ é par e sen é ímpar - }(7.163)}{=} 0\,. \end{aligned} \tag{7.169}$$

Portanto, de (7.167), (7.168) e (7.169), segue que

$$\begin{aligned} S[f](x) &\overset{(7.158)\text{ com } L=1}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\,\cos(n\,\pi\,x) + b_n\,\text{sen}(n\,\pi\,x)] \\ &\overset{(7.167)\text{ e }(7.169)}{=} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos(n\,\pi\,x) \\ &\overset{(7.168)}{=} \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\,\cos[(2\,n-1)\pi\,x)]\,. \end{aligned} \tag{7.170}$$

□

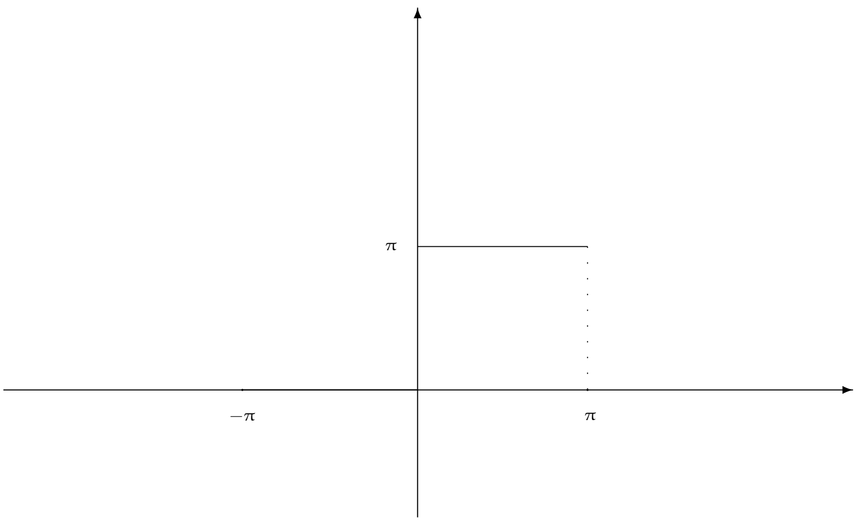
Temos também o:

Exemplo 7.3.5 *Encontrar a série de Fourier, que denotaremos por* $S[f]$*, associada à função* $f : [-\pi\,,\pi] \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \textit{para cada} \quad x \in [-\pi\,,0) \quad \textit{ou} \quad x = \pi \\ \pi\,, & \textit{para cada} \quad x \in [0\,,\pi) \end{cases}. \tag{7.171}$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dado pela figura abaixo.



Onda Quadrada

Notemos que, neste caso

$$L = \pi$$

e a função $\underline{f}$ é seccionalmente contínua em $[-\pi\,,\pi]$, logo é uma função integrável em $[-\pi\,,\pi]$.

Assim temos que

$$\begin{aligned}
a_o &\overset{(7.156)\ \underline{\text{com}}\ m=0}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\
&\overset{L=\pi}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right] \\
&\overset{(7.171)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\,dx \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[x\,\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right] \\
&= \pi\,.
\end{aligned} \tag{7.172}$$

Por outro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}
a_m &\overset{(7.156)\ \underline{\text{com}}\ m\in\mathbb{N}}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\
&\overset{L=\pi}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(m\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,\cos(m\,x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\cos(m\,x)\,dx\right] \\
&\overset{(7.171)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\,\cos(m\,x)\,dx \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[\frac{\operatorname{sen}(m\,x)}{\pi\,m}\,\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right] \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 0\,.
\end{aligned} \tag{7.173}$$

Finalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
b_k &\overset{(7.157)\ \underline{\text{com}}\ k\in\mathbb{N}}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\
&\overset{L=\pi}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen}(k\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,\operatorname{sen}(k\,x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen}(k\,x)\,dx\right] \\
&\overset{(7.171)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\,\operatorname{sen}(k\,x)\,dx \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[-\frac{\cos(k\,x)}{k}\,\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right] \\
&= \frac{1}{k}[-\overbrace{\cos(k\,\pi)}^{=(-1)^k}+1]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k}\left[1-(-1)^k\right]$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2}{k}, & \text{para cada} \quad k \text{ ímpar} \\ \\ 0, & \text{para cada} \quad k \text{ par} \end{cases}. \tag{7.174}$$

Portanto, de (7.172), (7.173) e (7.174), segue que:

$$\begin{aligned} S[f](x) &\overset{(7.158) \text{ com } L=\pi}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\,x) + b_n \operatorname{sen}(n\,x)] \\ &\overset{(7.173)}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\,x) \\ &\overset{(7.172) \text{ e } (7.174)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2\,n-1} \operatorname{sen}[(2\,n-1)x)]\,. \end{aligned} \tag{7.175}$$

□

Antes de prosseguirmos faremos algumas consideraçoes que serão importantes no estudo da convergência de series de Fourier associadas à certas funções.

Observação 7.3.9

1. *Utilizando variáveis complexas, vamos encontrar as expressões para os coeficientes de Fourier* $\underline{a_m}$ *e* $\underline{b_k}$*, para* $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{N}$*, dados por* (7.156) *e* (7.157)*, repectivamente, em uma forma diferente.*

   Para isto lembremos que

$$e^{i\,x} = \cos(x) + i\,\operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{7.176}$$

   onde

$$i^2 \doteq -1\,.$$

   Logo

$$\begin{aligned} e^{-i\,x} &= \cos(-x) + i\,\operatorname{sen}(-x) \\ &= \cos(x) - i\,\operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{7.177}$$

   Somando-se (7.176) *com* (7.177)*, obteremos*

$$\cos(x) = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{7.178}$$

   e subtraindo-se (7.177) *de* (7.176)*, obteremos*

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.179}$$

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, *teremos:*

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.180}$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$, *segue que*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) &= \frac{e^{i\frac{k\pi}{L}x} - e^{-i\frac{k\pi}{L}x}}{2i} \\ &= i\,\frac{e^{-i\frac{k\pi}{L}x} - e^{i\frac{k\pi}{L}x}}{2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{7.181}$$

Com isto, para cada $x \in \mathbb{R}$, *temos que*

$$\begin{aligned} S[f](x) &\overset{(7.158)}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] \\ &\overset{(7.180)\ e\ (7.181)}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} + b_n\,i\,\frac{e^{-i\frac{n\pi}{L}x} - e^{i\frac{n\pi}{L}x}}{2}\right] \\ &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - i\,b_n}{2}\,e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{a_n + i\,b_n}{2}\,e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right]. \end{aligned} \tag{7.182}$$

Defininamos a função $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, *dada por*

$$\widehat{f}\,(0) \doteq \frac{a_o}{2}, \tag{7.183}$$

$$e \quad \widehat{f}\,(n) \doteq \frac{a_n - i\,b_n}{2} \tag{7.184}$$

$$\widehat{f}\,(-n) \doteq \frac{a_n + i\,b_n}{2}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7.185}$$

segue, de (7.182), (7.183), (7.184) *e* (7.185), *que*

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \widehat{f}\,(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\widehat{f}\,(n)\,e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \widehat{f}\,(-n)\,e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right] \\ &= \widehat{f}\,(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\widehat{f}\,(n)\,e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \widehat{f}\,(-n)\,e^{i\frac{(-n)\pi}{L}x}\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\widehat{f}\,(m)\,e^{i\frac{m\pi}{L}x}, \end{aligned} \tag{7.186}$$

onde a última série de funções considerada em (7.186), *será encarada como uma série do tipo* <u>**valor principal**</u>, *isto é, para cada* $x \in \mathbb{R}$, *definimos*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widehat{f}\,(m)\,e^{i\frac{m\pi}{L}x} \doteq \lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}\widehat{f}\,(m)\,e^{i\frac{m\pi}{L}x}. \tag{7.187}$$

Para cada $m \in \mathbb{Z}$, *o coeficiente* $\widehat{f}\,(m)$, *dado por* (7.183), (7.184) *e* (7.185), *será denominado* **m-ésimo coeficiente de Fourier na forma complexa, associados a função f**.

A série de funções (7.186) *será denominada* **série de Fourier na forma complexa, associada à função f**.

2. *Estudar a convergência da série de Fourier associada à função* $f : [-L\,,L] \to \mathbb{R}$ *na forma* (7.182) *é equivalente a estudar a convergência da série de Fourier, na foma comexa, isto é, na forma* (7.186), *associada à função* $\underline{f}$ *(no sentido* (7.187)*).*

3. *Observemos que teremos:*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\,(0) &\overset{(7.183)}{=} \frac{a_o}{2} \\
&\overset{(7.156)\ \text{com } m=0}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\overbrace{e^{-i\frac{0\,\pi}{L}x}}^{=1}\,dx\,,
\end{aligned} \tag{7.188}$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, *segue que:*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\,(n) &\overset{(7.184)}{=} \frac{a_n - i\,b_n}{2} \\
&\overset{(7.156)\ e\ (7.157)}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\,dx - i\,\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\left[\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right) - i\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\right]\,dx, \\
&\overset{(7.180)\ e\ (7.181)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\left[\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} - i\,\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2\,i}\right]\,dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx\,,
\end{aligned} \tag{7.189}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\,(-n) &\overset{(7.185)}{=} \frac{a_n + i\,b_n}{2} \\
&\overset{(7.156)\ e\ (7.157)}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\,dx + i\,\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\left[\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\right]\,dx \\
&\overset{(7.180)\ e\ (7.181)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\left[\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} + i\,\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2\,i}\right]\,dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\frac{(-n)\,\pi}{L}x}\,dx\,.
\end{aligned} \tag{7.190}$$

Portanto, de (7.188), (7.189) e (7.190), segue que

$$\widehat{f}\,(m) = \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\,\frac{m\,\pi}{L}\,x}\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad m \in \mathbb{Z}\,. \tag{7.191}$$

4. *Mesmo para funções a valores reais, isto é, funções $f : [-L\,,L] \to \mathbb{R}$ (que foi o caso que estávamos tratando no problema da condução de calor no fio no início do capítulo), os coeficientes de Fourier, na forma complexa, associados à função $\underline{f}$ são, em geral, números complexos e não reais, excetuando-se o caso em que os*

$$b_n = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

isto é, o caso que função $\underline{f}$ é uma função par (veja o item 3. da Observação (7.3.8), ou ainda (7.163)).

7.4 Interpretação Geométrica dos Coeficientes de Fourier

Observemos que a maneira como obtivemos os coeficientes de Fourier associados à uma função $f : [-L\,,L] \to \mathbb{R}$ (isto é, $\underline{a_m}$, para $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $\underline{b_k}$, para $k \in \mathbb{N}$, dados por (7.156) e (7.157), respectivamente) é bastante natural olharmos os mesmos do modo que faremos a seguir.

Consideremos, no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ (onde $\underline{+}$ é a operação de adição usual de $\underline{n}$-uplas e $\underline{\cdot}$ é a mulplicação usual de número real por $\underline{n}$-uplas), o produto interno usual, a saber:

$$\langle \vec{x}\,,\vec{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\,y_j\,, \tag{7.192}$$

onde os vetores $\vec{u}\,,\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, são dados por:

$$\vec{x} = (x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \quad \text{e} \quad \vec{y} = (y_1\,,y_2\,,\cdots\,,y_n)\,. \tag{7.193}$$

Para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, definamos o seguinte vetor de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{e}_i \doteq (0\,,\cdots\,,0\,,\overset{\underline{i}\text{-ésima posição}}{\overset{\downarrow}{1}}\,,0\,,\cdots\,,0)\,. \tag{7.194}$$

Como foi visto na disciplina de Álgebra Linear, temos que o conjunto

$$\{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\cdots\,,\vec{e}_n\}$$

é uma base ortonormal do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$, relativamente ao produto interno (7.192).

Tal base é denominada <u>**base canônica de** $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$</u>, ou seja, para $i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, teremos:

$$\langle \vec{e}_i\,,\vec{e}_j\rangle = \begin{cases} 1\,, & \text{se} \quad i = j \\ 0\,, & \text{se} \ i \neq j \end{cases}\,. \tag{7.195}$$

Notemos que, se $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ é dado por (7.193), teremos:

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &\overset{(7.193)}{=} (x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \\
&= (x_1\,,0\,,\cdots\,,0) + (0\,,x_2\,,0\,,\cdots\,,0) + \cdots + (0\,,,\cdots\,,0\,,x_n) \\
&= x_1 \cdot (1\,,0\,,\cdots\,,0) + x_2 \cdot (0\,,1\,,0\,,\cdots\,,0) + \cdots + x_n \cdot (0\,,\cdots\,,0\,,1) \\
&= x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{e}_j\,. \qquad (7.196)
\end{aligned}
$$

Com isto, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{x}\,,\vec{e}_i \rangle &\overset{(7.196)}{=} \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{e}_j\,,\vec{e}_i \right\rangle \\
&\overset{\text{propriedades de produto interno}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j\ \langle \vec{e}_j\,,\vec{e}_i \rangle \\
&\overset{(7.195)}{=} x_i\,,
\end{aligned}
$$

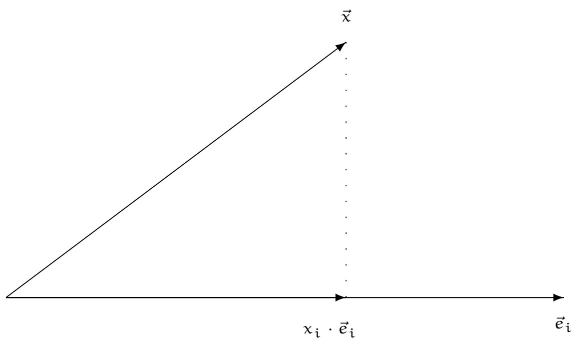
ou seja, $\quad x_i \cdot \vec{e}_i = \langle \vec{x}\,,\vec{e}_i \rangle \cdot \vec{e}_i\,,$

o que significa dizer que, geometricamente, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, temos que o vetor

$$x_i \cdot \vec{e}_i$$

é a projeção ortogonal do vetor $\underline{\vec{x}}$, na direção do vetor (unitário) $\underline{\vec{e}_i}$.

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Apliquemos as ideias acima para o caso de séries de Fourier:

Observação 7.4.1

1. *Notemos que*

$$C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,$$

o conjunto formado por todas as funções contínuas, a valores reais, definidas em $[-L\,,L]$*, é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*, quando munido das operações de soma de* *funções, indicada por* $\underline{+}$, *e multiplicação de número real por função, indicada por* $\underline{\cdot}$.

A verificação deste fato foi vista na disciplina de Álgebra Linear e será deixada como exercício para o leitor.

Com iso o espaço vetorial real $(C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, *poderá ser munido do seguinte produto interno*

$$\langle f\,,g\rangle \doteq \int_{-L}^{L} f(x)\,g(x)\,dx\,, \tag{7.197}$$

onde $f\,,g \in C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Do item 4. da Proposição (7.3.2), segue que o conjunto*

$$\{\psi_m\,;\, m \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \cup \{\phi_k\,;\, k \in \mathbb{N}\} \tag{7.198}$$

é um subconjunto do espaço vetorial real $(C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, *que é ortogonal, relativamente ao produto interno (7.197) (veja (7.137), (7.138) e (7.139)).*

Notemos que o conjunto (7.198) será ortonormal, relativamente ao produto interno (7.197), se

$$L = 1\,,$$

excetuando-se o caso de $m = 0$ *(veja (7.137), (7.138) e (7.139)).*

3. *Embora o conjunto (7.198)* **não** *seja uma base para o espaço vetorial real*

$$C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)\,,$$

no sentido algébrico, se uma função $f \in C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$ *puder ser expandida em série de Fourier (associada à mesma), se a série convergir para a função* $\underline{f}$, *em* $[-L\,,L]$, *e se a série de Fourier puder ser integrada, termo a termo, (por exemplo, se a convergência da série de Fourier for uniforme, em* $[-L\,,L]$*), então podemos justificar as contas formais (onde se vê: todo cuidado!) feitas na Observação (7.3.7), para obter as fórmulas de Euler-Fourier (7.156), (7.157) .*

4. *Para ilustrar consideraremos o caso em que* $L = 1$, *ou seja, o conjunto (7.198) é um conjunto ortonormal, relativamente ao produto interno (7.197), exceto quando* $m = 0$.

Neste caso, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *teremos:*

$$\begin{aligned} a_m &\overset{(7.156)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\ &\overset{(7.136)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\psi_m(x)\,dx \\ &\overset{L=1}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\,\psi_m(x)\,dx \\ &\overset{(7.197)}{=} \langle f\,,\psi_m\rangle\ , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &\overset{(7.157)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\
&\overset{(7.135)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\phi_n(x)\,dx \\
&\overset{L=1}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\,\phi_n(x)\,dx \\
&\overset{(7.197)}{=} \langle f\,,\phi_n\rangle\ ,
\end{aligned}
$$

ou seja, para cada $m \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *os vetores*

$$a_m \cdot \psi_m \quad e \quad b_n \cdot \phi_n$$

serão as projeções ortogonais da função $\underline{f}$, *na direção dos vetores* $\underline{\psi_m}$ *e* $\underline{\phi_n}$ *(neste caso, serão unitários), respectivamente, relativamente ao produto interno* (7.197).

5. *Observemos que se* $L \neq 1$ *então, para cada* $m \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *trocando-se as funções*

$$\psi_m \quad e \quad \phi_n$$

pelas funções

$$\Psi_m \quad e \quad \Phi_n\,,$$

respectivamente, dadas por:

$$\Psi_n(x) \doteq \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|} \quad e \quad \Phi_n(x) \doteq \frac{\phi_n(x)}{\|\phi_n\|}\,, \quad para\ cada \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{7.199}$$

onde, para cada $f \in C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$, *definimos*

$$\|f\| \doteq \sqrt{\langle f\,,f\rangle} \overset{(7.197)}{=} \left(\int_{-L}^{L} f^{\,2}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{7.200}$$

(que é uma norma no espaço vetorial real $(C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*), então o conjunto*

$$\{\Psi_m\,;\,m \in \{0\}\cup N\}\cup\{\Phi_n\,;\,n \in \mathbb{N}\} \tag{7.201}$$

será um conjunto ortonormal, relativamente ao produto interno (7.197), *e poderemos aplicar as mesma ideias do item 4. acima, utilizando o conjunto* (7.201), *para concluir que, para cada* $m \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *os vetores*

$$a_m \cdot \Psi_m \quad e \quad b_n \cdot \Phi_n$$

serão as projeções ortogonais da função $\underline{f}$, *na direção dos vetores (unitários)* $\underline{\Psi_m}$ *e* $\underline{\Phi_n}$, *respectivamente, relativamente ao produto interno* (7.197).

Notemos que, neste caso, teremos:

$$
\begin{aligned}
a_m &\overset{(7.156)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\
&\overset{(7.136)\ e\ (7.99)}{=} \frac{1}{L}\,\langle f\,,\psi_m\rangle\,, \\
&= \frac{1}{L}\,\langle f\,,\psi_m\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{7.202}
$$

e

$$
\begin{aligned}
b_n &\overset{(7.157)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\
&\overset{(7.135)\ e\ (7.99)}{=} \frac{1}{L}\,\langle f\,,\phi_n\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{7.203}
$$

para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Utilizaremos algumas das ideias acima para obter algumas propriedades da séries de Fourier associada a uma $f : [-L\,,L] \to \mathbb{R}$, que é função integrável em $[-L\,,L]$.

Consideraremos o espaço vetorial real $(SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ em vez do espaço vetorial real $(C([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ para o que faremos a seguir.

O primeiro resultado interessante é dado pela:

Proposição 7.4.1 *Para* $f \in SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$ *consideremos a série de Fourier associada à função* $\underline{f}$, *isto é,* (7.158) *(ou* (7.159)*).*

Então para $M \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *fixados, se considerarmos*

$$
c_m\,,d_n \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{para cada} \quad m \in \{0\,,1\,,\cdots\,,M\} \quad e \quad n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}
\tag{7.204}
$$

teremos:

$$
\left\| f - \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n\right]\right\| \leq \left\| f - \left[\frac{c_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} c_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} d_n\,\phi_n\right]\right\|\,,
\tag{7.205}
$$

onde as funções $\underline{\psi_m}$ *e* $\underline{\phi_n}$ *são dadas por* (7.136) *e* (7.135)*, respectivamente.*

Além disso, a ocorrerá igualdade em (7.205) *se, e somente se,*

$$
c_m = a_m \quad e \quad d_n = b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad m \in \{0\,,1\,,\cdots\,,M\} \quad e \quad n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}.
\tag{7.206}
$$

Demonstração:

Dados $M\,,N \in \mathbb{N}$ definamos o conjunto S_{MN}, como sendo o seguinte subconjunto de $SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$:

$$
S_{MN} \doteq \{\psi_m\,;\, m \in \{0\,,1\,,\cdots\,,M\}\} \cup \{\phi_n\,;\, n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\}\,.
\tag{7.207}
$$

Observemos que o conjunto S_{MN} é um conjunto finito de vetores de L.I., do espaço vetorial real $(SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

De fato, pois da Proposição (7.3.2) (veja (7.137), (7.138) e (7.139)), segue que o conjunto S_{MN} um conjunto ortogonal, relativamente ao produto interno (7.99), e formado por vetores não nulos.

Consideremos o subespaço vetorial gerado pelo conjunto S_{MN}, do espaço vetorial real $(SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, que indicaremos por $[S_{MN}]$, isto é, o conjunto formado por todas as combinções lineares de elementos do conjunto S_{MN}, do espaço vetorial real $(SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Mais precisamente:

$$[S_{MN}] \doteq \left\{ \frac{c_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} c_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} d_n\,\phi_n \;;\; c_m\,,d_n \in \mathbb{R}\,, \right.$$
$$\left. \text{para cada } \; m \in \{0\,,1\,,\cdots,M\} \;\text{ e } n \in \{1\,,\cdots,N\} \right\}. \tag{7.208}$$

Definamos a função $g:[-L\,,L] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x) \doteq f(x) - \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o(x) + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m(x) + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n(x) \right], \tag{7.209}$$

para cada $x \in [-L\,,L]$.

Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle g\,,\psi_o\rangle &\overset{(7.209)}{=} \left\langle f - \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n \right], \psi_o \right\rangle \\
&\overset{\text{item 1. da Proposição (7.3.1)}}{=} \underbrace{\langle f\,,\psi_o\rangle}_{\overset{(7.202)\ \text{com}\ m=0}{=} L\,a_o} - \frac{a_o}{2}\underbrace{\langle \psi_o\,,\psi_o\rangle}_{\overset{(7.137)\ \text{com}\ m=0}{=} 2L} - \sum_{n=1}^{N} a_n \underbrace{\langle \psi_n\,,\psi_o\rangle}_{\overset{(7.137)}{=} 0} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{M} b_m \underbrace{\langle \phi_m\,,\psi_o\rangle}_{\overset{(7.139)}{=} 0} \\
&= L\,a_o - \frac{a_o}{2}\,2L \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $k \in \mathbb{N}$ fixado, teremos:

$$\langle g\,,\psi_k\rangle = \left\langle f - \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n \right], \psi_k \right\rangle$$

$$\overset{\text{item 1. da Proposição (7.3.1)}}{=} \underbrace{\langle f\,,\psi_k\rangle}_{\overset{(7.202)}{=} L\,a_k} - \frac{a_o}{2}\underbrace{\langle\psi_o,\psi_k\rangle}_{(7.137)\ \underset{=}{\text{com}}\ k\neq 1\ 0} - \sum_{m=1}^{M} a_m \underbrace{\langle\psi_m\,,\psi_k\rangle}_{\overset{(7.139)}{=}\begin{cases}0\,, & \text{se } m\neq k\\ L\,, & \text{se } m=k\end{cases}}$$

$$+\sum_{n=1}^{N} b_n \underbrace{\langle\phi_n\,,\psi_k\rangle}_{\overset{(7.137)}{=} 0}$$

$$= L\,a_k - L\,a_k$$

$$= 0\,,$$

e

$$\langle g\,,\phi_k\rangle = \left\langle f - \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n\right]\,,\phi_k\right\rangle$$

$$\overset{\text{item 1. da Proposição (7.3.1)}}{=} \underbrace{\langle f\,,\phi_k\rangle}_{\overset{(7.203)}{=} L\,b_k} - \frac{a_o}{2}\underbrace{\langle\psi_o\,,\phi_k\rangle}_{(7.137)\ \underset{=}{\text{com}}\ k\neq 1\ 0} - \sum_{m=1}^{M} a_m \underbrace{\langle\psi_m\,,\phi_k\rangle}_{\overset{(7.139)}{=} 0}$$

$$+\sum_{n=1}^{N} b_n \underbrace{\langle\phi_n\,,\phi_k\rangle}_{\overset{(7.139)}{=}\begin{cases}0\,, & \text{se } n\neq k\\ L\,, & \text{se } n=k\end{cases}}$$

$$= L\,b_k - L\,b_k$$

$$= 0\,,$$

isto é, a função $\underline{g}$, dada por (7.209), é ortogonal a cada um dos elementos do conjunto S_{MN}.

Logo, como os elementos do conjunto S_{MN} são geradores do subsepaço vetorial gerado pelo vetores do conjunto S_{MN}, segue que a função $\underline{g}$ será ortogonal a todos elementos do subespaço vetorial $[S_{NM}]$ (a ortogonalidade é relativa ao produto intermo (7.99)), ou seja,

$$g \perp [S_{MN}]\,. \tag{7.210}$$

Definamos a função $h : [-L\,,L] \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) \doteq \frac{a_o - c_o}{2}\,\psi_o(x) + \sum_{m=1}^{M}(a_m - c_m)\,\psi_m(x) + \sum_{n=1}^{N}(b_n - d_n)\,\phi_n(x)\,, \tag{7.211}$$

para cada $x \in [-L\,,L]$.

Notemos que a função $\underline{h}$ é uma combinação linear dos elementos do conjunto S_{MN}, ou seja,

$$h \in [S_{NM}]\,. \tag{7.212}$$

Logo, de (7.210) e (7.212), segue que a função $\underline{g}$ será ortogonal à função $\underline{h}$, relativamente ao produto intermo (7.99), ou seja,

$$g \perp h\,. \tag{7.213}$$

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras (isto é, o item 4. da Observação (7.3.5), ou ainda, (7.110)), segue que

$$
\begin{aligned}
&\left\| f - \left[\frac{c_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} c_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} d_n\,\phi_n \right] \right\|^2 \\
&= \left\| \underbrace{f - \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n \right]}_{\overset{(7.209)}{=} g} + \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n \right] \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \left[\frac{c_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} c_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} d_n\,\phi_n \right] \right\|^2 \\
&= \left\| g + \left[\underbrace{\frac{a_o - c_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} (a_m - c_m)\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} (b_n - d_n)\,\phi_n}_{\overset{(7.211)}{=} h} \right] \right\|^2 \\
&= \|g + h\|^2 \\
&\overset{g \perp h \text{ e } (7.110)}{=} \|g\|^2 + \underbrace{\|h\|^2}_{\geq 0} \overset{(*)}{\geq} \|g\|^2 \qquad (7.214) \\
&\overset{(7.209)}{=} \left\| f - \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n \right] \right\|^2 ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\left\| f - \left[\frac{c_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} c_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} d_n\,\phi_n \right] \right\|^2 \leq \left\| f - \left[\frac{a_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\phi_n \right] \right\|^2
$$

mostrando a desigualdade (7.205).

Observemos que se

$$
c_m = a_m \quad \text{e} \quad d_n = b_n\,, \quad \text{para cada} \quad m \in \{0\,,1\,,\cdots\,,M\} \;\text{ e }\; n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}
$$

então vale a igualdade em (7.205).

Reciprocamente, se vale a igualdade em (7.205), de (*) em (7.214), teremos:

$$
\|g\|^2 + \|h\|^2 \overset{\text{Pitágoras}}{=} \|g + h\|^2 \overset{\text{vale a igualdade em } (*)}{=} \|g\|^2 \,,
$$

ou seja,

$$
\|h\|^2 = 0\,,
$$

isto é, de (7.99), deveremos ter: $\displaystyle\int_{-L}^{L} |h(x)|^2\,dx = 0\,.$ (7.215)

Como a função $\underline{h}$ é uma função contínua em $[-L\,,L]$ (veja (7.211)) e

$$|h(x)| \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-L\,,L] \quad \text{e vale (7.215)}\,,$$

segue que que

$$h(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x[-L\,,L]\,,$$

que, de (7.211), é equivalente a:

$$\frac{a_o - c_o}{2}\,\psi_o + \sum_{m=1}^{M}(a_m - c_m)\,\psi_m + \sum_{n=1}^{N}(b_n - d_n)\,\phi_n = 0\,, \quad \text{em} \quad [-L\,,L]\,. \tag{7.216}$$

Como o conjunto S_{MN} é um conjunto L.I. no espaço vetorial real $(SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, segue que todos os coeficientes da combinação linear (7.216) devem ser iguais a zero, ou seja,

$$c_m = a_m \quad \text{e} \quad d_n = b_n\,,$$

para $m \in \{0\,,1\,,\cdots\,,N\}$ e $m \in \{1\,,2\,,\cdots\,,M\}$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 7.4.2 *A Proposição (7.4.1) acima, nos diz que a soma parcial da série de Fourier de uma função que pertence à $SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$, nos fornece a melhor aproximação possível entre todas as aproximações, por combinações lineares envolvendo senos e cossenos, relativamente à norma que provém do produto interno (7.99).*

Uma outra propriedade importante das séries de Fourier associada a uma função "bem comportada", é dado pela:

Proposição 7.4.2 (Desigualdade de Bessel, na forma real)

Seja $f \in SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$ e consideremos a série de Fourier associada à função $\underline{f}$, isto é, (7.158) (ou (7.159)).

Então as séries numéricas

$$\sum_{m=1}^{\infty} {a_m}^2 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} {b_m}^2\,,$$

são convergentes e além disso, vale

$$L\left(\frac{{a_o}^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} {a_m}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2\right) \leq \|f\|^2\,, \tag{7.217}$$

onde

$$\|f\| \doteq \left[\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.218}$$

é a semi-norma que provém do "quase" produto interno (7.99).

Demonstração:

Notemos que, para cada $M, N \in \mathbb{N}$, teremos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\| f - \left[\frac{a_o}{2}\, \psi_o + \sum_{m=1}^{M} a_m\, \psi_m + \sum_{n=1}^{N} b_n\, \phi_n \right] \right\|^2 \\
&\overset{(7.107)}{=} \left\langle f - \frac{a_o}{2}\, \psi_o - \sum_{k=1}^{M} a_k\, \psi_k - \sum_{l=1}^{N} b_l\, \phi_l \,,\, f - \frac{a_o}{2} \psi_o - \sum_{m=1}^{M} a_m\, \psi_m - \sum_{n=1}^{N} b_n\, \phi_n \right\rangle \\
&\overset{\text{item 1. da Proposição (7.3.1)}}{=} \underbrace{\langle f, f \rangle}_{\overset{(7.218)}{=} \|f\|^2} - \frac{a_o}{2} \underbrace{\langle f, \psi_o \rangle}_{\overset{(7.202)\ \text{com}\ m=0}{=} L\, a_o} - \sum_{m=1}^{M} a_m \underbrace{\langle f, \psi_m \rangle}_{\overset{(7.202)\ \text{com}\ m \neq 0}{=} L\, a_m} - \sum_{n=1}^{N} b_n \underbrace{\langle f, \phi_n \rangle}_{\overset{(7.203)}{=} L\, b_n} \\
&\quad - \frac{a_o}{2} \underbrace{\langle \psi_o, f \rangle}_{\overset{(7.202)\ \text{com}\ m=0}{=} L\, a_o} + \frac{{a_o}^2}{4} \underbrace{\langle \psi_o, \psi_o \rangle}_{\overset{(7.137)\ \text{com}\ k=m=0}{=} 2\, L} + \sum_{m=1}^{M} \frac{a_o}{2}\, a_m \underbrace{\langle \psi_o, \psi_m \rangle}_{\overset{(7.137)\ \text{com}\ m \neq 0}{=} 0} + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_o}{2}\, b_n \underbrace{\langle \psi_o, \phi_n \rangle}_{\overset{(7.138)}{=} 0} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{M} a_k \underbrace{\langle \psi_k, f \rangle}_{\overset{(7.202)}{=} L\, a_k} + \sum_{k=1}^{M} a_k \frac{a_o}{2} \underbrace{\langle \psi_k, \psi_o \rangle}_{\overset{(7.137)\ \text{com}\ k \neq 0}{=} 0} + \sum_{k=1}^{M} \sum_{m=1}^{M} a_k\, a_m \underbrace{\langle \psi_k, \psi_m \rangle}_{\overset{(7.137)}{=} \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq k \\ L, & \text{se } m = k \end{cases}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_k\, b_n \underbrace{\langle \psi_k, \phi_n \rangle}_{\overset{(7.138)}{=} 0} - \sum_{l=1}^{N} b_l \underbrace{\langle \phi_l, f \rangle}_{\overset{(7.203)}{=} L\, b_l} + \sum_{l=1}^{N} b_l \frac{a_o}{2} \underbrace{\langle \phi_l, \psi_o \rangle}_{\overset{(7.138)}{=} 0} + \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} b_l\, a_m \underbrace{\langle \phi_l, \psi_m \rangle}_{\overset{(7.138)}{=} 0} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} b_l\, b_n \underbrace{\langle \phi_l, \phi_n \rangle}_{\overset{(7.137)}{=} \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq l \\ L, & \text{se } n = l \end{cases}} \\
&= \|f\|^2 - \frac{L}{2}\, {a_o}^2 - L \sum_{m=1}^{M} {a_m}^2 - L \sum_{n=1}^{N} {b_n}^2 - \frac{L}{2}\, {a_o}^2 + \frac{L}{2}\, {a_o}^2 - L \sum_{k=1}^{M} {a_k}^2 + L \sum_{k=1}^{M} {a_k}^2 \\
&\qquad - L \sum_{l=1}^{N} {b_l}^2 + L \sum_{l=1}^{N} {b_l}^2 \\
&= \|f\|^2 - L \left(\frac{{a_o}^2}{2} + \sum_{m=1}^{M} {a_m}^2 + \sum_{n=1}^{N} {b_n}^2 \right), \qquad (7.219)
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
0 \leq \|f\|^2 - L \left(\frac{{a_o}^2}{2} + \sum_{m=1}^{M} {a_m}^2 + \sum_{n=1}^{N} {b_n}^2 \right),
$$

ou seja,

$$
0 \leq \frac{{a_o}^2}{2} + \sum_{m=1}^{M} {a_m}^2 + \sum_{n=1}^{N} {b_n}^2 \leq \frac{1}{L}\, \|f\|^2, \qquad (7.220)
$$

para todo $M, N \in \mathbb{N}$ fixado.

Assim, segue de (7.220), que as sequências das somas parcias das séries numéricas

$$\sum_{m=1}^{\infty} {a_m}^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2\,, \tag{7.221}$$

são limitadas em $\mathbb{R}$.

Como

$${a_m}^2,\, {b_n}^2 \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad n, m \in \mathbb{N}\,,$$

segue que as sequências das somas parcias das séries numéricas (7.221) serão crescentes em $\mathbb{R}$.

Logo as sequências das somas parcias das séries numéricas (7.221) serão monótonas (crescentes) e limitadas em $\mathbb{R}$, de um resultado de Análise I, temos que elas serão convergentes em $\mathbb{R}$.

Portanto podemos passar os limites, quando

$$M, N \to \infty\,,$$

em (7.220), e com isto obteremos a desigualdade (7.217), completando a demosntração do resultado.

□

Temos uma versão na forma complexa para ao resultado acima, a saber:

Corolário 7.4.1 (Desigualdade de Bessel, na forma complexo)

Suponhamos que $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ *e*

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-L, L]\,, \tag{7.222}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, *o número complexo* $\widehat{f}\,(n)$ *é o* $\underline{n}$*-ésimo coeficiente de Fourier na forma complexa, dado por* (7.191).

Então a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^2$$

será convergente e vale

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^2 \leq \frac{1}{2L}\, \|f\|^2\,, \tag{7.223}$$

onde

$$\|f\| \doteq \left[\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.224}$$

é a semi-norma que provém do "quase" produto interno (7.100).

<u>**Demonstração:**</u>

Segue, de (7.183), (7.184) e (7.185), que:

$$\left|\widehat{f}\,(0)\right|^2 \overset{(7.183)}{=} \frac{a_o{}^2}{4}\,, \tag{7.225}$$

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}\,(n)\right|^2 &\overset{(7.184)}{=} \left|\frac{a_n - i\,b_n}{2}\right|^2\\ &= \frac{1}{4}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)\end{aligned} \tag{7.226}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}\,(-n)\right|^2 &\overset{(7.185)}{=} \left|\frac{a_n + i\,b_n}{2}\right|^2\\ &= \frac{1}{4}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.\end{aligned} \tag{7.227}$$

Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}\,(n)\right|^2 &= \left|\widehat{f}\,(0)\right|^2 + \sum_{n=1}^{N}\left|\widehat{f}\,(-n)\right|^2 + \sum_{n=1}^{N}\left|\widehat{f}\,(n)\right|^2\\ &\overset{(7.225),(7.226),(7.227)}{=} \frac{a_o{}^2}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)\\ &= \frac{a_o{}^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n{}^2 + \sum_{n=1}^{N} b_n{}^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_o{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n{}^2 + \sum_{n=1}^{N} b_n{}^2\right).\end{aligned} \tag{7.228}$$

Logo, de um critério da comparação, na versão complexa e da Proposição (7.4.2), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}\,(n)\right|^2$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Lembremos que o sentido da convergência da série acima será

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}\,(n)\right|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}\,(n)\right|^2\,.$$

Além disso, passando o limite, quando

$$N \to \infty$$

em (7.228), obteremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \\
&\overset{(7.228)}{=} \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a_o{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n{}^2 + \sum_{n=1}^{N} b_n{}^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_o{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n{}^2\right) \\
&\overset{(7.217))}{\leq} \frac{1}{2L}\|f\|^2,
\end{aligned}$$

completando a demonstração.

□

Observação 7.4.3

1. *Seja* $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ *então*

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{f}(0)} &\overset{(7.184)}{=} \overline{\frac{a_o}{2}} \\
&\overset{a\in\mathbb{R}}{=} \frac{a_o}{2} \\
&\overset{(7.184)}{=} \widehat{f}(-0).
\end{aligned}$$

Se $n \in \mathbb{N}$, *teremos:*

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{f}(n)} &\overset{(7.184)}{=} \overline{\frac{a_n - i\,b_n}{2}} \\
&= \frac{\overline{a_n} - \overline{i\,b_n}}{2} \\
&= \frac{\overline{a_n} - \overline{i}\,\overline{b_n}}{2} \\
&\overset{a_n, b_n\in\mathbb{R}}{=} \frac{a_n + i\,b_n}{2} \\
&\overset{(7.184)}{=} \widehat{f}(-n) \\
\overline{\widehat{f}(-n)} &\overset{(7.184)}{=} \overline{\frac{a_n + i\,b_n}{2}} \\
&= \frac{\overline{a_n} + \overline{i\,b_n}}{2} \\
&= \frac{\overline{a_n} + \overline{i}\,\overline{b_n}}{2} \\
&\overset{a_n, b_n\in\mathbb{R}}{=} \frac{a_n - i\,b_n}{2} \\
&\overset{(7.184)}{=} \widehat{f}(n) \\
&= \widehat{f}[-(-n)],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{\widehat{f}\,(n)} = \widehat{f}\,(-n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{7.229}$$

2. *Seja* $f \in SC(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *uma função* $2\,L$*-periódica e consideremos a função* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$h(x) \doteq f(-x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.230}$$

Então, teremos que $h \in SC(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *e também será uma função* $2\,L$*-periódica.*

Além disso, para $n \in \mathbb{Z}$*, temos que:*

$$\begin{aligned}
\widehat{h}\,(n) &\overset{(7.191)}{=} \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} h(x)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx \\
&\overset{(7.230)}{=} \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(-x)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx \\
&\left\langle \begin{array}{l} y = -x\,,\ \textit{logo: } dy = -dx \\ x = -L\,,\ \textit{logo: } y = L \\ x = L\,,\ \textit{logo: } y = -L \end{array} \right\rangle = \frac{1}{2\,L}\int_{L}^{-L} f(y)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,(-y)}\,(-dy) \\
&= \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(y)\,e^{-i\,\frac{(-n)\,\pi}{L}\,y}dy \\
&\overset{(7.191)}{=} \widehat{f}\,(-n)\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\widehat{h}\,(n) = \widehat{f}\,(-n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{7.231}$$

3. *Sejam* $f\,,g \in SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então, para cada $n \in \mathbb{Z}$*, teremos*

$$\widehat{(f+g)}\,(n) = \widehat{f}\,(n) + \widehat{g}\,(n)\,, \tag{7.232}$$

$$\widehat{(\alpha\,f)}\,(n) = \alpha\,\widehat{f}\,(n)\,. \tag{7.233}$$

De fato pois, para cada $n \in \mathbb{Z}$*, teremos:*

$$\begin{aligned}
\widehat{(f+g)}\,(n) &\overset{(7.191)}{=} \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} (f+g)(x)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} [f(x)+g(x)]\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx + \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} +g(x)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx \\
&\overset{(7.191)}{=} \widehat{f}\,(n) + \widehat{g}\,(n)\,.
\end{aligned}$$

De modo semelhante, , para cada $n \in \mathbb{Z}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{(\alpha f)}(n) &\overset{(7.191)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}(\alpha f)(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}[\alpha f(x)]\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\
&= \alpha\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx\right] \\
&\overset{(7.191)}{=} \alpha\,\widehat{f}\,(n)\,.
\end{aligned}
$$

4. *As conclusões do Corolário (7.4.1) permanece válido se a função $\underline{f}$ é a valores complexos, isto é, se $f \in SC([-L\,,L]\,;\mathbb{C})$.*

De fato, se $f : [-L\,,L] \to \mathbb{C}$ é seccionalmente contínua em $[-L\,,L]$, então existem funções $u\,,v \in SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$, de modo que

$$
f(x) = u(x) + i\,v(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-L\,,L]\,. \tag{7.234}
$$

Com isto, para $n \in \mathbb{Z}$, segue que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}\,(n) &\overset{(7.191)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\
&\overset{(7.234)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}[u(x) + i\,v(x)]\; e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\
&\overset{\textit{propriedade da integral definida}}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx + i\,\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} v(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\
&\overset{(7.191)}{=} \widehat{u}\,(n) + i\,\widehat{v}\,(n)\,.
\end{aligned} \tag{7.235}
$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{f}\,(n)\right|^2 &= \widehat{f}\,(n)\,\overline{\widehat{f}\,(n)} \\
&\overset{(7.234)}{=} [\widehat{u}\,(n) + i\,\widehat{v}\,(n)]\,\left[\overline{\widehat{u}\,(n) + i\,\widehat{v}\,(n)}\right] \\
&= [\widehat{u}\,(n) + i\,\widehat{v}\,(n)]\left[\overline{\widehat{u}\,(n)} + \overline{i\,\widehat{v}\,(n)}\right] \\
&= [\widehat{u}\,(n) + i\,\widehat{v}\,(n)]\,\left[\overline{\widehat{u}\,(n)} + \overline{i}\,\overline{\widehat{v}\,(n)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(7.229)}{=} [\widehat{u}\,(n) + i\,\widehat{v}\,(n)]\,\left[\overline{\widehat{u}\,(n)} - \overline{i}\,\overline{\widehat{v}\,(-n)}\right] \\
&= \widehat{u}\,(n)\,\widehat{u}\,(-n) - i\,\widehat{u}\,(n)\,\widehat{v}\,(-n)) + i\,\widehat{v}\,(n)\,\widehat{u}\,(-n) + \widehat{v}\,(n)\,\widehat{v}\,(-n) \\
&\overset{(7.229)}{=} \widehat{u}\,(n)\,\overline{\widehat{u}\,(n)} + i\,[\widehat{u}\,(-n)\,\widehat{v}\,(n) - \widehat{u}\,(n)\,\widehat{v}\,(-n)] + \widehat{v}\,(n)\,\overline{\widehat{v}\,(n)} \\
&= |\widehat{u}\,(n)|^2 + i\,[\widehat{u}\,(-n)\,\widehat{v}\,(n) - \widehat{u}\,(n)\,\widehat{v}\,(-n)] + |\widehat{v}\,(n)|^2\,.
\end{aligned} \tag{7.236}
$$

Portanto, para $N \in \mathbb{N}$*, segue que*

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^2 &\overset{(7.236)}{=} \sum_{n=-N}^{N} \left\{|\widehat{u}\,(n)|^2 + |\widehat{v}\,(n)|^2 + i\,[\widehat{u}\,(-n)\,\widehat{v}\,(n) - \widehat{u}\,(n)\,\widehat{v}\,(-n)]\right\} \\
&\overset{\text{somas finitas}}{=} \sum_{n=-N}^{N} \left[|\widehat{u}\,(n)|^2 + |\widehat{v}\,(n)|^2\right] + i \sum_{n=-N}^{N} [\widehat{u}\,(-n)\,\widehat{v}\,(n) - \widehat{u}\,(n)\,\widehat{v}\,(-n)] \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \left[|\widehat{u}\,(n)|^2 + |\widehat{v}\,(n)|^2\right] + i \left(\sum_{n=-N}^{N} \widehat{u}\,(-n)\,\widehat{v}\,(n) - \overbrace{\sum_{n=-N}^{N} \widehat{u}\,(n)\,\widehat{v}\,(-n)}^{(*)} \right) \\
&\overset{m=-n,\ \text{em } (*)}{=} \sum_{n=-N}^{N} \left[|\widehat{u}\,(n)|^2 + |\widehat{v}\,(n)|^2\right] + i \left[\sum_{n=-N}^{N} \widehat{u}\,(-n)\,\widehat{v}\,(n) - \sum_{m=-N}^{N} \widehat{u}\,(-m)\,\widehat{v}\,(m) \right] \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \left[|\widehat{u}\,(n)|^2 + |\widehat{v}\,(n)|^2\right] . \qquad (7.237)
\end{aligned}
$$

Como, $u, v \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$*, do Corolário* (7.4.1)*, segue que as séries numéricas*

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} |\widehat{u}\,(n)|^2 \quad e \quad \sum_{n-\infty}^{\infty} |\widehat{v}\,(n)|^2$$

serão convergentes.

Logo, deste fato e de (7.237)*, segue que a série numérica*

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^2$$

é convergente e, além disso:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^2 &\overset{(7.237)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|\widehat{u}\,(n)|^2 + |\widehat{v}\,(n)|^2\right] \\
&\overset{(7.223)\ \text{para } u \text{ e } v)}{\leq} \frac{1}{2L} \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \\
&\overset{(7.234)}{=} \frac{1}{2L} \|f\|^2 ,
\end{aligned}
$$

ou seja, vale uma **desigualdade de Bessel** *para o caso da função* f *ser a valores complexos, isto é, se* $f \in SC([-L, L]; \mathbb{C})$*, temos que:*

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^2 \leq \frac{1}{2L} \|f\|^2 , \qquad (7.238)$$

Como consequência da desiguladade de Bessel temos o:

Corolário 7.4.2 (Lema de Riemann-Lebesgue, na forma real) *Seja* $f \in SC[-L, L]; \mathbb{R})$ *e consideremos a série de Fourier associada à função* $\underline{f}$*, isto é,* (7.158) *(ou* (7.159)*).*

Então:

$$\lim_{m \to \infty} a_m = \lim_{n \to \infty} b_n = 0\,, \tag{7.239}$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, os números reais* $\underline{a_m}$ *e* $\underline{b_n}$*, são dados por* (7.156) *e* (7.157)*, respectivamente.*

Demonstração:

Notemos que, da Proposição (7.4.2), segue que as séries numérica

$$\sum_{m=1}^{\infty} {a_m}^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} {b_m}^2$$

são convergentes em $\mathbb{R}$.

Logo, do critério da divergência para séries numéricas, segue que

$$\lim_{m \to \infty} {a_m}^2 = \lim_{n \to \infty} {b_n}^2 = 0\,,$$

o que implicará que:

$$\lim_{m \to \infty} a_m = \lim_{n \to \infty} b_n = 0\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Na forma complexa o resultado acima torna-se-á:

Corolário 7.4.3 (Lema de Riemann-Lebesgue, na forma complexa)

Seja $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ *(respectivamete,* $f \in SC([-L, L]; \mathbb{C})$*) e consideremos a série de Fourier associada à função* $\underline{f}$*, na forma complexa, isto é, dados por* (7.222)*.*

Então

$$\lim_{|n| \to \infty} \widehat{f}\,(n) = 0\,, \tag{7.240}$$

ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{f}\,(n) = \lim_{n \to -\infty} \widehat{f}\,(n) = 0\,. \tag{7.241}$$

Demonstração:

Observemos que, do Corolário (7.4.1) (ou do item 3. da Observação (7.4.3)), temos que as séries numérica

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^2$$

é convergente em $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$).

Logo, como consequência do critério da divergência para séries numéricas, visto em Análise I, segue que

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{f}\,(n) = \lim_{n \to -\infty} \widehat{f}\,(n) = 0\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

7.5 Convergência Pontual da Série de Fourier

A seguir iniciaremos o estudo da convergência da série de Fourier associada a uma função $f \in SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$.

Nesta seção estudaremos a convergência pontual da série de Fourier e na próxima seção a convergência uniforme.

Antes porém, vale observar que dada uma função $f \in SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$, que satisfaz

$$f(-L) = f(L)\,,$$

podemos estendê-la a uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é $2\,L$-periódica e que seja seccionalmente contínua em cada intervalo $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$, da seguinte forma:

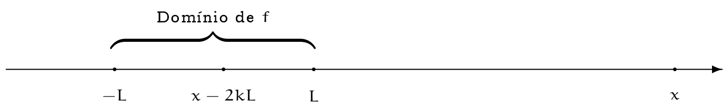
Consideremos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = f(x - 2\,k\,L), \tag{7.242}$$

onde

$$x - 2\,k\,L \in [-L\,,L]\,,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.



Com isto temos a:

Definição 7.5.1 *Definamos*

$$SC_{per}(2L) \doteq \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, F \text{ é } 2\,L\text{-periódica e seccional}/_e \text{ contínua em qualquer } [a\,,b] \subseteq \mathbb{R}\}$$

e

$$C_{per}(2L) \doteq \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, F \text{ é } 2\,L\text{-periódica e contínua } \mathbb{R}\}\,.$$

Observação 7.5.1

1. *Observemos que os conjunto*

$$SC_{per}(2\,L) \quad e \quad C_{per}(2\,L)$$

tornam-se espaços vetorias sobre $\mathbb{R}$, quando munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por uma função.

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

2. *Se $f \in SC_{per}(2L)$, para cada $x_o \in \mathbb{R}$, denotaremos por*

$$f\,(x_o^+) \doteq \lim_{x \to x_o^+} f(x) \quad e \quad f\,(x_o^-) \doteq \lim_{x \to x_o^-} f(x)\,. \tag{7.243}$$

3. *Podemos indentificar de maneira natural, o espaço vetorial* $SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$ *com* $SC_{per}(2\,L)$.

   Para isto dado $f \in SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$, *redefinimos , se necessário,*

$$f(L) \doteq f(-L)\,,$$

   para que a função $\underline{f}$ *assuma o mesmo valor nos extremos do intervalo* $[-L\,,L]$.

   Com isto podemos considerar sua extensão $2\,L$*-periódica à* $\mathbb{R}$, *que pertencerá à* $SC_{per}(2\,L)$, *como vimos em* (7.242).

   Analogamente, se $F \in SC_{per}(2\,L)$, *então sua restrição ao intervelo* $[-L\,,L]$, *pertencerá à* $SC([-L\,,L]\,;\mathbb{R})$.

4. *Se* $f \in SC_{per}(2\,L)$, *então a série de Fourier de* $\underline{f}$ *estará bem definida (ou seja, os coeficientes de Fourier estarão bem definidos).*

   Logo,

$$S[f](x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,, \tag{7.244}$$

   onde

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \tag{7.245}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{7.246}$$

   ou

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\,e^{i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,, \tag{7.247}$$

   onde

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{7.248}$$

Iniciaremos o nosso estudo da convergência pontual da série de Fourirer estabelecendo o seguinte resultado:

Lema 7.5.1 *Seja* $f \in SC_{per}(2\,L)$, *diferenciável em* $[-L\,,L]$, *exceto em um número finito de pontos, e de modo que que* $f\,' \in SC_{per}(2\,L)$.

Suponhamos também que a função $\underline{f}$ *seja contínua em* $x = 0$ *e que*

$$f(0) = 0\,. \tag{7.249}$$

Então a série de Fourier da função $\underline{f}$, *converge para* $\underline{0}$, *no ponto* $x = 0$, *isto é,* *fazendo* $x = 0$ *em* (7.244), *respectivamente* (7.247), *teremos:*

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 = f(0)\,, \tag{7.250}$$

respectivamente,
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n) = 0 = f(0)\,. \tag{7.251}$$

Demonstração:

Demonstraremos a identidade para a forma complexa da série de Fourier, isto é, provaremos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}\,(n) = 0\,.$$

Para isto consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1}\,, & \text{para } x \in [-L\,,0) \cup (0\,,L] \\[2ex] -i\,L\,\dfrac{f\,'(0^+)}{\pi}\,, & \text{para } x = 0 \end{cases} \tag{7.252}$$

e de modo que

$$g(x + 2\,L) = g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.253}$$

Observemos que existem

$$g\,(0^+) \quad \text{e} \quad g\,(0^-)\,.$$

De fato, pois:

$$\begin{aligned} g\,(0^+) &\overset{(7.243)}{=} \lim_{x \to 0^+} g(x) \\ &\overset{x \neq 0 \text{ e } (7.252)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1} \\ &\overset{f(0) \overset{(7.249)}{=} 0}{=} \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \, \frac{1}{\dfrac{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1}{x - 0}} \right]. \end{aligned} \tag{7.254}$$

Notemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(7.243)}{=} f\,'(0^+)\,, \quad \text{que existe pois } f\,' \in SC_{-\text{per}}(2\,L) \tag{7.255}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\dfrac{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1}{x - 0}} &= \frac{1}{\dfrac{d}{dx}\left[e^{i\frac{\pi}{L}x} \Big|_{x=0} \right]} \\ &= \frac{L}{i\,\pi}\,. \end{aligned} \tag{7.256}$$

Logo, de (7.255), (7.256) e (7.254), segue que

$$\begin{aligned} g(0^+) &= f\,'(0^+)\,\frac{L}{i\,\pi} \\ &= -i\,\frac{L}{\pi}\,f\,'(0^+) \\ &\overset{(7.252)}{=} g(0)\,, \end{aligned}$$

portanto existe $g(0^+)$ e é igual a $g(0)$.

De modo semelhante, teremos:

$$\begin{aligned} g\,(0^-) &\overset{(7.243)}{=} \lim_{x\to 0^-} g(x) \\ &\overset{(7.253)}{=} \lim_{x\to 0^-} g(x+2\,L) \\ &\overset{x+2\,L\in(-L\,,L)\text{ e }(7.252)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x+2L)}{e^{i\,\frac{\pi}{L}\,(x+2\,L)}-1} \\ &\overset{f(x+2L)=f(x)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{e^{i\,\frac{\pi}{L}\,x}\,e^{i\,2\,\pi}-1} \\ &\overset{e^{i\,2\,\pi}=1}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{e^{i\,\frac{\pi}{L}\,x}-1} \\ &= \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\,\frac{1}{\frac{e^{i\,\frac{\pi}{L}\,x}-1}{x-0}}\right] \\ &\overset{(7.255)\text{ e }(7.256)}{=} f\,'(0^-)\,\frac{L}{i\,\pi} \\ &= -i\,\frac{L}{i\,\pi}\,f\,'(0^-)\,, \end{aligned}$$

isto é, existe $g(0^-)$.

Observemos que $f \in SC_{per}(2\,L)$ e a função

$$x \to e^{i\,\frac{\pi}{L}\,x} - 1$$

é contínua e $2\,L$-periódica em $\mathbb{R}$, e só se anula em $x=0$, no intervalo $[-L\,,L]$.

Afirmamos que $g \in SC_{per}(2\,L)$.

De fato, pois, devido a observação acima, além dos pontos onde a função $\underline{f}$ tem uam descontinuidade de 1.a espécie em $[-L\,,L]$ (que são, no máximo, um número de pontos do intervalo $[-L\,,L]$), o único "problema" da função $\underline{g}$ no intervalo $[-L\,,L]$ seria $x=0$, mas nesse ponto existem os limites laterais, como vimos acima.

Logo, do Lema de Riemman-Lebesgue, na forma complexa, (isto é, do Corolário 7.4.3)) segue que

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g}\,(n) = \lim_{n\to-\infty} \widehat{g}\,(n) = 0\,. \tag{7.257}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}\,(n) &\overset{(7.248)}{=} \frac{1}{2\,L} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\, dx \\
&\overset{(7.252)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} g(x)\, \left(e^{i\,\frac{\pi}{L}\,x} - 1\right)\, e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\, dx \\
&\overset{\text{propriedades da integral definida}}{=} \frac{1}{2\,L} \int_{-L}^{L} g(x)\, e^{-i\,\frac{(n-1)\,\pi}{L}\,x}\, dx - \frac{1}{2\,L} \int_{-L}^{L} g(x)\, e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\, dx \\
&\overset{(7.248)\text{ com } n-1 \text{ e } n}{=} \widehat{g}\,(n-1) - \widehat{g}\,(n)\,.
\end{aligned}
\tag{7.258}
$$

Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}\,(n) &= \widehat{f}\,(-N) + \widehat{f}\,(-N+1) + \cdots + \widehat{f}\,(N-1) + \widehat{f}\,(N) \\
&\overset{(7.258)}{=} [\widehat{g}\,(-N-1) - \widehat{g}\,(-N)] + [\widehat{g}\,(-N) - \widehat{g}\,(-N+1)] + \cdots \\
&\quad + [\widehat{g}\,(N-2) - \widehat{g}\,(N-1)] + [\widehat{g}\,(N-1) - \widehat{g}\,(N)] \\
&= \widehat{g}\,(-N-1) - \widehat{g}\,(N)\,.
\end{aligned}
\tag{7.259}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}\,(n) \\
&\overset{(7.259)}{=} \lim_{n\to\infty} [\widehat{g}\,(-N-1) - \widehat{g}\,(N)] \overset{(7.257)}{=} 0\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n) = 0 \overset{(7.249)}{=} f(0).
$$

Portanto a série de Fourier associada à função $\underline{f}$, em $x = 0$, converge para $0 = f(0)$, como queríamos demonstrar.

□

Observação 7.5.2

1. *A demonstração do Lema (7.5.1) acima mostra, na verdade, que a convergência da série de Fourier, na forma complex, a* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)$, *ocorre em um sentido mais forte, a saber,*

$$
\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \sum_{n=-N}^{M} \widehat{f}\,(n) = 0
$$

e não apenas no sentido de valor principal, isto é,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}\,(n) = 0\,.$$

De fato, pelo que vimos da demonstração do Lema (7.5.1) *acima (veja a identidade* (7.259)*) temos que:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{M} \widehat{f}\,(n) &= \widehat{f}\,(-N) + \widehat{f}\,(-N+1) + \cdots + \widehat{f}\,(M-1) + \widehat{f}\,(M) \\
&\overset{(7.258)}{=} [\widehat{g}\,(-N-1) - \widehat{g}\,(-N)] + [\widehat{g}\,(-N) - \widehat{g}\,(-N+1)] + \cdots \\
&\quad + [\widehat{g}\,(M-2) - \widehat{g}\,(M-1)] + [\widehat{g}\,(M-1) - \widehat{g}\,(M)] \\
&= \widehat{g}\,(-N-1) - \widehat{g}\,(M) \overset{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}}{\to} 0, \ \textit{devido a } (7.257).
\end{aligned} \tag{7.260}$$

Portanto, de (7.260)*, segue que*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \sum_{n=-N}^{M} \widehat{f}\,(n) = 0\,.$$

2. *A soma* (7.259) *é dita* **soma telescópica**.

Podemos agora tratar do resultado principal, a saber:

Teorema 7.5.1 *Suponhamos que* $f \in SC_{per}(2\,L)$ *é uma função diferenciável em* $[-L\,,L]$, *exceto em um número finito de pontos, que* $f\,' \in SC_{per}(2\,L)$ *e* $x_o \in \mathbb{R}$.

Então a série de Fourier associada à função $\underline{f}$, *em* $\underline{x_o}$, *converge, para* $\dfrac{f\,(x_o^+) + f\,(x_o^-)}{2}$, *isto é,*

$$\frac{f\,(x_o^+) + f\,(x_o^-)}{2} = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x_o\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x_o\right)\,, \tag{7.261}$$

onde,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,, \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,
\end{aligned}$$

ou

$$\frac{f\,(x_o^+) + f\,(x_o^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\,e^{i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x_o}\,, \tag{7.262}$$

onde,

$$\widehat{f}\,(n) = \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{7.263}$$

Demonstração:

Consideremos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(x\,,y) \doteq \left(x - x_o\,, y - \frac{f\,(x_o^+) + f\,(x_o^-)}{2}\right), \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{7.264}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} T\left(x_o\,, \frac{f\,(x_o^+) + f\,(x_o^-)}{2}\right) &\overset{(7.264)}{=} \left(x_o - x_o\,, \frac{f\,(x_o^+) + f\,(x_o^-)}{2} - \frac{f\,(x_o^+) + f\,(x_o^-)}{2}\right) \\ &= (0\,,0) \quad \text{e} \\ T(x\,,f(x)) &\overset{(7.264)}{=} \left(x - x_o\,, f(x) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}\right). \end{aligned}$$

Definamos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) \doteq f(x + x_o) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.265}$$

Então os pontos do gráfico da função g, são da forma:

$$\begin{aligned} (x\,,g(x)) &\overset{(7.265)}{=} \left(x\,, f(x + x_o) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}\right) \\ &\overset{z \doteq x + x_o}{=} \left(z - x_o\,, f(z) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}\right) \\ &\overset{(7.264)}{=} T(z\,,f(z)) \\ &\overset{z = x + x_o}{=} T(x + x_o, f(x + x_o))\,, \end{aligned} \tag{7.266}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Observemos que

$$\begin{aligned} g(0^+) &= \lim_{x \to 0^+} g(x) \\ &\overset{(7.265)}{=} \lim_{x \to 0^+} \left[f(x + x_o) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}\right] \\ &= f(x_o^+) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2} \\ &= \frac{f(x_o^+) - f(x_o^-)}{2}, \end{aligned} \tag{7.267}$$

$$\begin{aligned} g(0^-) &= \lim_{x \to 0^-} g(x) \\ &\overset{(7.265)}{=} = \lim_{x \to 0^-} \left[f(x + x_o) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}\right] \\ &= f(x_o^-) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2} \\ &= \frac{f(x_o^-) - f(x_o^+)}{2}\,. \end{aligned} \tag{7.268}$$

Logo, de (7.267) e (7.268), segue que

$$\frac{g(0^+)+g(0^-)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_o^+)-f(x_o^-)}{2}+\frac{f(x_o^-)-f(x_o^+)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[f(x_o^+)-f(x_o^-)+f(x_o^-)-f(x_o^+)\right]$$
$$= 0. \tag{7.269}$$

Observemos que como $f\,,f\,' \in SC_{per}(2\,L)$, de (7.265), segue que $g\,,g\,' \in SC_{per}(2\,L)$.
A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.
Definamos a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{g(x)+g(-x)}{2}\,, & \text{para } x \in [-L\,,0) \cup (0\,,L] \\ 0\,, & \text{para } x = 0 \end{cases}\,, \tag{7.270}$$

e

$$h(x+2\,L) = h(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Com isto teremos que $h\,,h\,' \in SC_{per}(2\,L)$.
A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.
Além disso, a função $\underline{h}$ é contínua em $x = 0$.
De fato, pois

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) \overset{x\neq 0 \text{ e } (7.270)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)+g(-x)}{2}$$
$$= \frac{g(0^+)+g(0^-)}{2}$$
$$\overset{(7.269)}{=} 0 \overset{(7.270)}{=} h(0)\,;$$
$$\lim_{x\to 0^-} h(x) \overset{x\neq 0 \text{ e } (7.270)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)+g(-x)}{2}$$
$$= \frac{g(0^-)+g(0^+)}{2}$$
$$\overset{(7.269)}{=} 0 \overset{(7.270)}{=} h(0)\,.$$

Logo

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0 \overset{(7.270)}{=} h(0)\,,$$

mostrando a continuidade da função $\underline{h}$, em $x = 0$.

Aplicando o Lema (7.5.1) para a função $\underline{h}$ (notemos que a função $\underline{h}$ satisfaz todas as hipótese do Lema, verifique!), teremos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}\,(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}\,(n)$$
$$= 0 = h(0). \tag{7.271}$$

Mas, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\widehat{h}(n) \overset{(7.232) \text{ e } (7.231)}{=} \frac{\widehat{g}(n) + \widehat{g}(-n)}{2}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7.272}$$

Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$, fixado, teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} \widehat{h}(n) &\overset{(7.272)}{=} \sum_{n=-N}^{N} \frac{\widehat{g}(n) + \widehat{g}(-n)}{2} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \frac{\widehat{g}(n)}{2} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{\widehat{g}(-n)}{2} \\
&\left\langle \text{temos que: } \sum_{n=-N}^{N} \widehat{g}(n) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{g}(-n) \right\rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{g}(n).
\end{aligned} \tag{7.273}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$, segue que:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(n) &\overset{(7.263)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} g(x)\, e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx \\
&\overset{(7.265)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \left[f(x + x_o) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2} \right] e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx \\
&\overset{\text{propriedades da integral definida}}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x + x_o)\, e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx - \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}\, e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx \\
&= \left\langle \text{na 1.a integral fazendo: } \begin{array}{l} y = x + x_o, \text{ logo: } dy = dx \\ x = -L, \text{ logo: } y = -L + x_o \\ x = L, \text{ logo: } y = L + x_o \end{array} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L+x_o}^{L+x_o} f(y)\, e^{-i \frac{n\pi}{L} (y - x_o)}\, dx - \frac{1}{2L} \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2} \int_{-L}^{L} e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx \\
&\overset{y \mapsto f(y)\, e^{-i \frac{n\pi}{L} (y - x_o)} \text{ é } 2L\text{-per, e } (7.115)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y)\, e^{-i \frac{n\pi}{L} y}\, e^{i \frac{n\pi}{L} x_o}\, dx \\
&\qquad - \frac{1}{2L} \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2} \int_{-L}^{L} e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx \\
&= e^{i \frac{n\pi}{L} x_o} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y)\, e^{-i \frac{n\pi}{L} y}\, dx \right] - \frac{1}{2L} \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2} \int_{-L}^{L} e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx \\
&\overset{(7.263)}{=} \widehat{f}(n)\, e^{i \frac{n\pi}{L} x_o} - \frac{1}{2L} \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2} \int_{-L}^{L} e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx.
\end{aligned} \tag{7.274}$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}$ fixado, temos que:

$$\int_{-L}^{L} e^{-i \frac{n\pi}{L} x}\, dx = \begin{cases} 2L, & \text{para } n = 0 \\ \left. \dfrac{e^{-i \frac{n\pi}{L} x}}{-i \frac{n\pi}{L}} \right|_{x=-L}^{x=L} = \dfrac{L}{-i n \pi} \underbrace{[e^{-i n \pi} - e^{+i n \pi}]}_{=0} = 0, & \text{para } n \neq 0 \end{cases}. \tag{7.275}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$, de (7.274) e (7.275), segue que

$$\widehat{g}\,(n) = \begin{cases} \widehat{f}\,(0) - \dfrac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}, & \text{para } = 0 \\ \widehat{f}(n)\, e^{i \frac{n\pi}{L} x_o}, & \text{para } n \neq 0. \end{cases} \tag{7.276}$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}\,(n)\, e^{i \frac{n\pi}{L} x_o} - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2} &= \sum_{n=-N, N\neq 0}^{N} \underbrace{\widehat{f}\,(n)\, e^{i \frac{n\pi}{L} x_o}}_{\overset{(7.276)\ \text{com } n\neq 0}{=} \widehat{g}(0)} + \underbrace{\widehat{f}\,(0) - \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2}}_{\overset{(7.276)\ \text{com } n=0}{=} \widehat{g}(n)} \\ &\overset{(7.276)}{=} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{g}\,(n) \\ &\overset{(7.273)}{=} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{h}\,(n) \overset{N\to\infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

devido a (7.271), ou seja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, e^{i \frac{n\pi}{L} x_o} = \frac{f(x_o^+) + f(x_o^-)}{2},$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 7.5.3

1. *A demonstração do Teorema* (7.5.1) *acima é devido a P.R.Chernoff (1980).*

2. *O Teorema* (7.5.1) *acima, nos diz que nas hipótese do Teorema* (7.5.1), *a série de Fourier associada a função* $\underline{f}$, *converge para a média do valor do salto da função* $\underline{f}$, *em* $\underline{x_o}$.

3. *Se além de satisfazer as hipóteses do Teorema* (7.5.1) *acima, a função* $\underline{f}$ *for contínua em* $\underline{x_o}$, *então teremos que*

$$f(x_o^+) = f(x_o^-) = f(x_o)\,.$$

Logo, de (7.261), respectivamente, (7.262), segue que

$$f(x_o) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x_o\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x_o\right), \tag{7.277}$$

ou

$$f(x_o) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, e^{i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x_o}\,. \tag{7.278}$$

onde,

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad m \in \{0\}\cup\mathbb{N}\,, \tag{7.279}$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{N}\,, \tag{7.280}$$

ou

$$\frac{f\,(x_o^+) + f\,(x_o^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, e^{i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x_o}\,, \tag{7.281}$$

onde,

$$\widehat{f}\,(n) = \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{7.282}$$

4. *Em particular, se $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ é uma função $2\,L$-periódica então, do Teorema (7.5.1) acima, a série de Fourier associada à função $\underline{f}$ converge, pontualmente, para a função $\underline{f}$, em $\mathbb{R}$, isto é, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos*

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \tag{7.283}$$

ou

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, e^{i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,, \tag{7.284}$$

onde, para cada $m \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ e $n \in Z$, os coeficientes $\underline{a_m}$, $\underline{b_k}$ e $\underline{\widehat{f}\,(n)}$, são dados por (7.279), (7.281) e (7.282), respectivamente.

Aplicaremos, a seguir, as ideias e resultados acima a dois exemplos os quais já foram calculados os coeficientes de Fourier anteriormente.

Exemplo 7.5.1 *Consideremos a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -x\,, & \textit{para} \quad x \in [-1\,,0) \\ x\,, & \textit{para} \quad x \in [0\,,1) \end{cases}\,, \tag{7.285}$$

satisfazendo

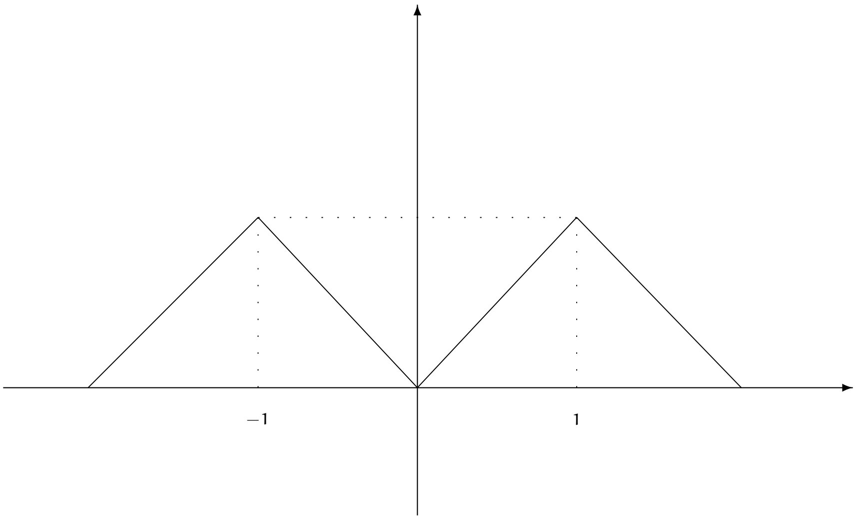
$$f(x+2) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.286}$$

Estude a convergência da série de Fourier associada à função $\underline{f}$.

Resolução:

Neste caso, temos
$$L = 1$$
e
$$f(x) = |x|\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-1\,,1]$$
e satisfaz (7.286).

A representação geométrica do gráfico da função f, é dada pela figura abaixo.



Onda Dente de Serra

Vimos, no Exemplo (7.3.4), para cada $n \in \mathbb{N}$, vimos que
$$b_n \overset{(7.169)}{=} 0\,,$$
$$a_o \overset{(7.168)}{=} \frac{1}{2}\,,$$
$$a_{2n} \overset{(7.168)}{=} 0\,,$$
$$a_{2n+1} \overset{(7.168)}{=} \frac{-4}{(2n+1)^2\,\pi^2}\,,$$
ou seja, a série de Fourier associada à função f será dada por:
$$S[f](x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left[(2n+1)\,\pi\,x\right]\,. \tag{7.287}$$

Observemos que $f \in C_{per}(2)$ e a função f' é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$, pois, de (7.285), temos que
$$f'(x) = -1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1\,,0) \quad \text{e} \quad f'(x) = 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0\,,1)\,.$$

Logo, do Teorema (7.5.1) e do item 2. da Observação (7.5.3), segue que a série de Fourier associada à função f (isto é, (7.287)) converge para a função f, pontualmente em $\mathbb{R}$, isto é,
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left[(2n+1)\,\pi\,x\right]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.288}$$

$\square$

Observação 7.5.4 *Em particular, segue que*

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(7.285)}{=} f(0) \\ &\overset{(7.288)\ com\ x=0}{=} \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\underbrace{\cos\left[(2n+1)\pi\cdot 0\right]}_{=1,\ para\ todo\ n\in\mathbb{N}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

isto é, $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemplo 7.5.2 *Conisderemos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & para\ cada \quad x \in [\pi, 0) \quad ou \quad x = \pi \\ \pi, & para\ cada \quad x \in [0, \pi) \end{cases}, \tag{7.289}$$

satisfazendo

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad para\ cada \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.290}$$

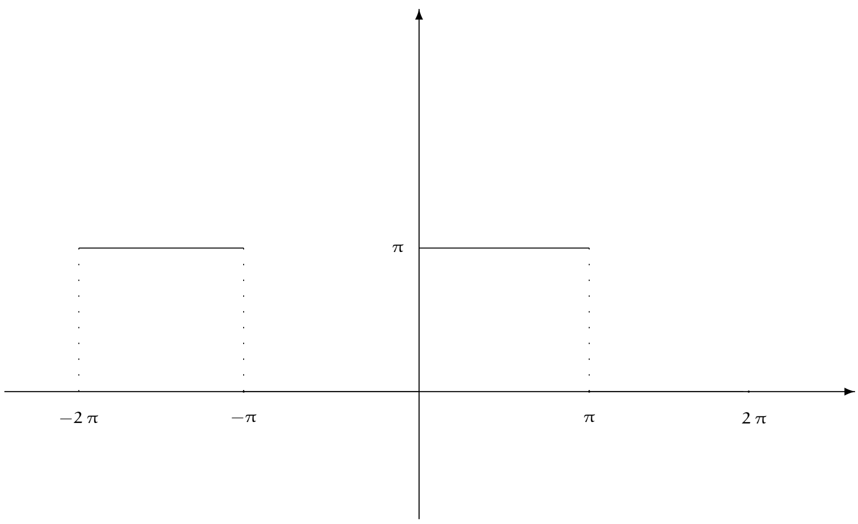
Estude a convergência da série de Fourier associada a função f.

Resolução:

Neste caso, temos que

$$L = \pi.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$*, é dada pela figura abaixo.*



Onda Quadrada

Vimos, no Eexemplo (7.3.5), que a série de Fourier associada à função $\underline{f}$ *é dada por:*

$$S[f](x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\,\mathrm{sen}\left[(2n+1)x\right]. \tag{7.291}$$

Observemos que $f \in SC_{per}(2\pi)$ *e a função* f' *é seccionalmente contínua em qualquer intervalo* $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$.

De fato, pois

$$f'(x) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-\pi\,,0) \cup (0\,,\pi)\,.$$

Logo, do Teorema (7.5.1) *e do item 3. da Observação* (7.5.3), *segue que a série de Fourier associada à função* f, *converge para função* f, *pontualmente em* $\mathbb{R}$, *exceto nos pontos da forma*

$$x = k\pi\,, \quad \textit{para cada} \quad \in \mathbb{Z}\,,$$

pois a função f *não é contínua, somente, neste pontos de* $\mathbb{R}$, *ou seja,*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\,\mathrm{sen}[(2n+1)\,x]\,, \tag{7.292}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ *com* $x \neq k\pi$, *para cada* $k \in \mathbb{Z}$.

Notemos que, do Teorema (7.5.1), *em* $x = 0$ *teremos:*

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &\overset{(7.289)}{=} \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \\
&\overset{(7.261)\ e\ (7.291)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \underbrace{\mathrm{sen}[(2n+1)\cdot 0]}_{=0\,,\ \textit{para todo}\ n \in \mathbb{N}} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Notemos que, do Teorema (7.5.1), *em* $x = \pi$ *teremos:*

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &\overset{(7.289)}{=} \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} \\
&\overset{(7.261)\ e\ (7.291)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \underbrace{\mathrm{sen}[(2n+1)\,\pi]}_{=0\,,\ \textit{para todo}\ n \in \mathbb{N}} \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Notemos que, do Teorema (7.5.1), *em* $x = -\pi$ *teremos:*

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &\overset{(7.289)}{=} \frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} \\
&\overset{(7.261)\ e\ (7.291)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \underbrace{\mathrm{sen}[(2n+1)\,(-\pi)]}_{=0\,,\ \textit{para todo}\ n \in \mathbb{N}} \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Como a função f *é contínua em* $x = \dfrac{\pi}{2}$, *pelo do Teorema* (7.5.1) *e do item 3. da Observação* (7.5.3), *temos que a série de Fourier associada à função* f *será convergente* *para* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *isto é,*

$$\begin{aligned}
\pi &\overset{(7.289)}{=} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&\overset{(7.261)\ e\ (7.291)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \underbrace{\operatorname{sen}\left[(2n+1)\,\frac{\pi}{2})\right]}_{=(-1)^n\,,\ para\ todo\ n \in \mathbb{N}} \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\,(-1)^n \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,(-1)^n}{2n+1}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

7.6 Convergência Uniforme da Série de Fourier

O objetivo desta seção é apresentar um resultado que garanta a convergência uniforme da série de Fourier associada a uma função periódica "bem comportada".

Para a demonstração desse resultado precisaremos de alguns outros, entre eles da:

Proposição 7.6.1 *Consideremos* $f \in SC_{per}(2\,L)$ *que seja uma função diferenciável em* $[-L\,,L]$*, exceto em um número finito de pontos, e de modo que* $f\,' \in SC_{per}(2\,L)$*.*

Então os coeficientes de Fourier, na forma complexa, da função $\underline{f}$ *e da função* $\underline{f\,'}$*, se relacionam da seguinte forma:*

$$\widehat{f\,'}(n) = \frac{i\,n\,\pi}{L}\,\widehat{f}\,(n)\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{7.293}$$

ou seja, se

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\,e^{i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x} \tag{7.294}$$

então

$$S\,[f\,']\,(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i\,n\,\pi}{L}\,\widehat{f}\,(n)\,e^{i\,\frac{n\,\pi}{L}\,x}\,. \tag{7.295}$$

Em relação aos coeficientes de Fourier, na forma real, associados à função $\underline{f}$*, teremos que:*

$$\begin{aligned}
a_o{}' &= 0\,, \\
a_n{}' &= \frac{n\,\pi}{L}\,b_n\,, \\
b_n{}' &= -\frac{n\,\pi}{L}\,a_n\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}\,,;
\end{aligned} \tag{7.296}$$

onde

$$
\begin{aligned}
S[f] &= \frac{a_o}{2}\psi_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\psi_n + b_n\,\phi_n \\
S[f\,'] &= \frac{a_o{}'}{2}\,\psi_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'\,\psi_n + b_n{}'\,\phi_n\,,
\end{aligned}
$$

com, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *as funções* $\underline{\psi_m}$ *e* $\underline{\phi_n}$, *dadas por* (7.136) *e* (7.135), *respectivamente.*

Demonstração:

Observemos que se a identidade (7.293) ocorrer, então as identidades em (7.296), também ocorrerão.

De fato, pois:

$$
\begin{aligned}
a_o{}' &\overset{(7.183)}{=} 2\,\widehat{f\,'}\,(0) \\
&\overset{(7.293)\ \text{com}\ n=0)}{=} 2\left(0 \cdot \hat{f}\,(0)\right) \\
&= 0\,, \\
\frac{a_n{}' - i\,b_n{}'}{2} &\overset{(7.184)}{=} \widehat{f\,'}\,(n) \\
&\overset{(7.293)}{=} \frac{i\,n\,\pi}{L}\,\hat{f}\,(n) \\
&\overset{(7.184)}{=} \frac{i\,n\,\pi}{L}\left(\frac{a_n - i\,b_n}{2}\right) \\
&= \frac{\dfrac{n\,\pi}{L} b_n + i\,\dfrac{n\pi}{L}\,a_n}{2}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
a_n{}' = \frac{n\,\pi}{L}\,b_n \quad \text{e} \quad b_n{}' = -\frac{n\,\pi}{L}a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N},
$$

isto é, vale as identidades em (7.296).

Mostremos que a identidade (7.293) ocorre.

Para isto notemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, teremos, por integração por partes para a integral definida, que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f'}(n) &\overset{(7.282)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f'(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\
&\left\langle \begin{array}{l} u \doteq e^{-i\frac{n\pi}{L}x}, \text{ logo: } du = -i\frac{n\pi}{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\ dv \doteq f'(x)\, dx, \text{ logo: } v = f(x) \end{array} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2L}\left[\underbrace{f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\Big|_{x=-L}^{x=L}}_{f(\cdot) \text{ e } e^{-i\frac{n\pi}{L}\cdot} \text{ são } 2L\text{-periódicas } = 0} - \int_{-L}^{L} f(x)\left(-i\frac{n\pi}{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right) dx \right] \\
&= i\frac{n\pi}{L}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x})\, dx\right] \\
&\overset{(7.282)}{=} i\frac{n\pi}{L}\widehat{f}(n),
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 7.6.1

1. *Observemos que a identidade (7.293), nos diz que quanto mais derivadas a função $\underline{f}$ tiver, mais rápido a sequência dos coeficientes de Fourier decai a zerom quando $\underline{n}$, tende a $\underline{+\infty}$ (ou quando $\underline{n}$, tende a $\underline{\pm\infty}$ para os coeficientes complexos de Fourier associados À função $\underline{f}$).*

   Para ver isto, observemos que se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função $2L$-periódica que é duas vezes diferenciável, exceto em um número finito de pontos do intervalo $[-L, L]$, e $f'' \in SC_{per}(2L)$ então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f''}(n) &= \widehat{(f')'}(n) \\
&\overset{(7.293)}{=} \frac{i\,n\,\pi}{L}\widehat{f'}(n) \\
&\overset{(7.293)}{=} \frac{(i\,n\,\pi)^2}{L^2}\widehat{f}(n).
\end{aligned} \tag{7.297}
$$

   Em geral, para $k \in \mathbb{N}$ fixado, se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função $2L$-periódica é $\underline{k}$-vezes diferenciável e $f^{(k)} \in SC_{per}(2L)$, podemos mostrar, por indução, que que

$$
\widehat{f^{(k)}}(n) = \left(\frac{i\,n\,\pi}{L}\right)^k \widehat{f}(n), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}.
$$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Observemos que se $f, f' \in C_{per}(2L)$ e $\underline{f''}$ existe, exceto em um número finito de pontos de $[-L, L]$, e satisfas $f'' \in SC_{per}(2L)$ então, podemos afirmar que a série de Fourier associada à função $\underline{f}$, converge uniformemente para a função $\underline{f}$, em $\mathbb{R}$.*

De fato, do Lema de Riemann-Lebesgue (isto é, do Corolário (7.4.3)) aplicado à função $\underline{f''}$, segue que

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f''}(n) = 0 .$$

Logo, da Proposição (2.3.2), segue que a sequência numérica $\left(\widehat{f''}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ *será limitada, ou seja, exite* $M > 0$ *tal que*

$$\left|\widehat{f''}(n)\right| \leq M , \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z} . \tag{7.298}$$

Mas, para cada $n \in \mathbb{Z}$*, com* $n \neq 0$*, temos que:*

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}\right| &= \left|\widehat{f}(n)\right| \underbrace{\left|e^{i\frac{n\pi}{L}x}\right|}_{=1} \\
&\overset{(7.297)}{=} \left|\left(\frac{L}{i\,n\,\pi}\right)^2 \widehat{f''}(n)\right| \\
&= \frac{L^2}{\pi^2 n^2} \left|\widehat{f''}(n)\right| \\
&\overset{(7.298)}{\leq} \frac{M\,L^2}{\pi^2}\,\frac{1}{n^2} , \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R} .
\end{aligned} \tag{7.299}$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente (é uma* p*-série, com* $p > 1$ *- veja (3.203)) segue, de (7.299) e do Teste M.de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1)), que a série de funções*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

(a série de Fourier, na forma complexa, associada à função $\underline{f}$*) será uniformemente convergente, em* $\mathbb{R}$ *para alguma função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*

Notemos que, do Teorema (7.5.1), segue que a série de Fourier associada à função $\underline{f}$ *converge pontualmente para a função* $\underline{f}$*, em* $\mathbb{R}$*, pois a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$*.*

Portanto, das duas conclusões acima segue que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x} , \tag{7.300}$$

para $x \in \mathbb{R}$*, onde a convergência da série de funções (7.300), será a uniforme em* $\mathbb{R}$*, isto é,*

$$\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(x) , \quad \textit{unifomemente em } \mathbb{R}. \tag{7.301}$$

Na verdade temos um resultado um pouco mais geral, a saber:

Teorema 7.6.1 *Consideremos* $f \in C_{per}(2L)$ *que seja uma função diferenciável em* $[-L, L]$, *exceto em um número finito de pontos deste intervalo, e satisfazendo* $f' \in SC_{per}(2L)$.

Então a série de Fourier associada à função $\underline{f}$, *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$, *em* $\mathbb{R}$, *isto é,*

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]=f(x)\,,\quad \textit{uniformemente em } \mathbb{R}\,, \tag{7.302}$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *temos que:*

$$a_m \doteq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx\,,\quad e \quad b_k \doteq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\,dx\,, \tag{7.303}$$

ou

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}\,(n)\,e^{i\,\frac{n\pi}{L}x}=f(x)\,,\qquad \textit{uniformemente em } \mathbb{R}\,, \tag{7.304}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, *temos que:*

$$\widehat{f}\,(n) \doteq \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\,\frac{n\pi}{L}x}\,dx\,. \tag{7.305}$$

Demonstração:

Faremos a demonstração de (7.304).

A demonstração de (7.302) é consequência da demonstração de (7.304) e seus detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

Notemos que, para cada $N \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}\,(n)\right| &= \left|\widehat{f}\,(0)\right|+\sum_{1\leq|n|\leq N}\left|\widehat{f}\,(n)\right| \\
&\overset{(7.293)}{=} \left|\widehat{f}\,(0)\right|+\sum_{1\leq|n|\leq N}\left|\frac{L}{i\,n\,\pi}\,\widehat{f'}\,(n)\right| \\
&\overset{|i|=1}{=} \left|\widehat{f}\,(0)\right|+\frac{L}{\pi}\sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{1}{|n|}\left|\widehat{f'}\,(n)\right| \\
&\overset{(7.106)}{\leq} \left|\widehat{f}\,(0)\right|+\frac{L}{\pi}\left(\sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{1\leq|n|\leq N}\left|\widehat{f'}\,(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left|\widehat{f}\,(0)\right|+\frac{L}{\pi}\left(\sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f'}\,(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{f'\in SC_{per}(2L) \text{ e Corolário (7.4.1) - veja (7.223)}}{\leq} \left|\widehat{f}\,(0)\right|+\frac{L}{\pi}\left(\sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2L}\,\|f'\|
\end{aligned}$$

$$\le \left|\widehat{f}(0)\right| + \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2}\,\pi}\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|f'\|$$

$$= \left|\widehat{f}(0)\right| + \frac{\sqrt{L}}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|f'\| \,. \tag{7.306}$$

Como $f' \in SC_{per}(2L)$ segue

$$\|f'\| = \left(\int_{-L}^{L} f(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \,. \tag{7.307}$$

Logo, de (7.306) e (7.307) segue que a sequência das somas parciais

$$\left(\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

é limitada.

Como ela também é monótona, do Teorema (2.4.1), segue que será convergente, ou seja, existe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\right| = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right| \,.$$

Como a série numérica $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\right|$ é convergente segue, do Teste M.de Weierstrass (isto é, do Teorema (5.3.1), que a série de funções

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\,e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

(a série de Fourier, na forma complexa, associada à função f) será uniformemente convergente para uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, em $\mathbb{R}$.

Notemos que, do Teorema (7.5.1), temos que a série de Fourier associada à função f, converge para a função f, pontualmente em $\mathbb{R}$, pois a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

Portanto, das conclusões acima, segue que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\,e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \tag{7.308}$$

para $x\in\mathbb{R}$, onde a convergência da série de funções (7.308), será a uniforme em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)\,e^{i\frac{n\pi}{L}x} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\,, \quad \text{unifomemente em } \mathbb{R},,$$

completando a demonstração.

$\square$

Nas condições do Teorema (7.6.1), podemos mostrar que a desigualdade de Bessel, isot é, (7.4.1) é, na verdade, uma igualdade, isto é:

Teorema 7.6.2 *Consideremos* $f, g \in C_{per}(2L)$ *daus funções que são diferenciáveis em* $[-L, L]$*, exceto em um número finito de pontos deste intevalo, satisfazenod* $f', g' \in SC_{per}(2L)$.

Então

$$\frac{1}{2L}\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}. \tag{7.309}$$

Em particular

$$\frac{1}{2L}\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2, \tag{7.310}$$

que é conhecida como a **Identidade de Parseval**.

Demonstração:

Notemos que, do Teorema (7.6.1), segue que sa séries de Fourier associadas às funções f e g, convergem uniformemente para a função f e g, em $\mathbb{R}$, respectivamente.

Em particular, teremos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x} \tag{7.311}$$

e

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \tag{7.312}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Logo, do item 2. do Corolário (5.3.1), segue que:

$$\frac{1}{2L}\langle f, g\rangle \overset{(7.100)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

$$\overset{(7.311)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left[\sum_{n-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}\right]\overline{g(x)}\,dx$$

$$\overset{\text{convergência uniforme de (7.311) e o item 2. do Corolário (5.3.1)}}{=} \frac{1}{2L}\sum_{n-\infty}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} \widehat{f}(n)\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}\,\overline{g(x)}\,dx\right]$$

$$= \sum_{n-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{i\frac{n\pi}{L}x}\overline{g(x)}\,dx$$

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \overline{g(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx}\right]$$

$$= \sum_{n-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\left[\overline{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx}\right]$$

$$\overset{(7.305) \text{ com } f \doteq g}{=} \sum_{n-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)},$$

completando a demonstração da identidade (7.309).

Para obtermos a identidade (7.310), basta considerarmos $g \doteq f$ em (7.309) e obteremos a mesma, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 7.6.2

1. *O Teorema (7.6.2) pode ser generalizado para situações mais gerais, como por exemplo, se $f, g \in SC_{per}(2L)$, ou até $f \in L^2([-L, L]; \mathbb{R})$, o conjunto formado pelas funções definidas em $[-L, L]$, a valores reais (ou complexos) que tenham quadrado Lebesgue-integrável em $[-L, L]$.*

2. *Em termos dos coeficientes de Fourier, na forma real, associados a uam função $\underline{f}$ que satisfaça as hipótese do Teorema (7.6.2), as relações (7.309) e (7.310) tornar-se-ão:*

$$\frac{1}{L}\langle f, g\rangle = \frac{a_o A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n A_n + b_n B_n) \tag{7.313}$$

e

$$\frac{1}{L}\|f\|^2 = \frac{a_o{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right), \tag{7.314}$$

onde

$$S[f] = \frac{a_o}{2}\psi_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\psi_n + b_n\phi_n$$

e

$$S[g] = \frac{A_o}{2}\psi_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\psi_n + B_n\,\phi_n\,,$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup N$ e $k \in \mathbb{N}$, as funções $\underline{\psi_m}$ e $\underline{\phi_k}$, são dadas por (7.136) e (7.135), respectivamente.

Para mostrar isso basta notar que, para:

$$n = 0 \;:\; \widehat{f}\,(0)\,\overline{\widehat{g}\,(0)} \overset{(7.183)}{=} \frac{a_o}{2}\,\overline{\frac{A_o}{2}} \overset{A_o \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_o\,A_o}{4}\,; \tag{7.315}$$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \;:\; \widehat{f}\,(n)\,\overline{\widehat{g}\,(n)} &\overset{(7.184)}{=} \frac{a_n - i\,b_n}{2}\,\overline{\frac{A_n - i\,B_n}{2}} \overset{A_n, B_n \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_n - i\,b_n}{2}\,\frac{A_n + i\,B_n}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left[a_n\,A_n + b_n\,B_n + i\,(a_n\,B_n - b_n\,A_n)\right]\,; \end{aligned} \tag{7.316}$$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \;:\; \widehat{f}\,(-n)\,\overline{\widehat{g}\,(-n)} &\overset{(7.185)}{=} \frac{a_n + i\,b_n}{2}\,\overline{\frac{A_n + i\,B_n}{2}} \overset{A_n, B_n \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_n + i\,b_n}{2}\,\frac{A_n - i\,B_n}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left[a_n\,A_n + b_n\,B_n + i\,(-a_n\,B_n + b_n\,A_n)\right]. \end{aligned} \tag{7.317}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{L}\langle f, g\rangle &\overset{(7.309)}{=} 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}\\
&= 2\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}\\
&= 2\lim_{N\to\infty}\left[\widehat{f}(0)\overline{\widehat{g}(0)}+\sum_{n=1}^{N}\widehat{f}(-n)\overline{\widehat{g}(-n)}+\sum_{n=1}^{N}\widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(7.315),(7.316)\ e\ (7.317)}{=} 2\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{a_o\,A_o}{4}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4}\left[a_n\,A_n+b_n\,B_n+i\,(-a_n\,B_n+b_n\,A_n)\right]\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4}\left[a_n\,A_n+b_n\,B_n+i\,(a_n\,B_n-b_n\,A_n)\right]\right\}\\
&= \frac{a_o\,A_o}{2}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n\,A_n+b_n\,B_n)\\
&= \frac{a_o\,A_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,A_n+b_n\,B_n)\,,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

3. *No caso real, a indentidade de Parseval, tornar-se-á:*

$$
\frac{1}{L}\|f\|^2=\frac{{a_o}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2+{b_n}^2\right)\,. \tag{7.318}
$$

4. *A identidade de Parseval pode ser muito útil, tanto na forma complexa, isto é,* (7.310)*, como na forma real, o seja,* (7.318)*, para, por exemplo, encontrarmos a soma de certas séries numéricas que sabemos são convergentes, como veremos em alguns exemplos a seguir.*

Apliquemos as ideias acima aos seguintes exemplos:

Exemplo 7.6.1 *Consideremos a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por e*

$$
f(x)\doteq\begin{cases}-x\,, & \textit{para cada}\quad x\in[-1\,,0)\\ x\,, & \textit{para cada}\quad x\in[0\,,1)\end{cases}\,, \tag{7.319}
$$

satisfazendo

$$
f(x+2)=f(x)\,,\quad \textit{para cada}\quad x\in\mathbb{R}\,.
$$

Estudar a convergência da série de Fourier associada à função $\underline{f}$*.*

Resolução:

Vimos no Exemplo (7.5.1), que

$$f(x) \overset{(7.287)}{=} \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi x], \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

onde a conververgência da série de funções acima é pontual em $\mathbb{R}$.

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, vimos que

$$\begin{aligned} b_n &\overset{(7.169)}{=} 0, \\ a_o &\overset{(7.167)}{=} 1, \\ a_{2n} &\overset{(7.168)}{=} 0, \\ a_{2n+1} &\overset{(7.168)}{=} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}. \end{aligned} \tag{7.320}$$

Como $f \in C_{per}(2\pi)$ e $f' \in SC_{per}(2\pi)$ segue, do Teorema (7.6.1), que a convergência da série de Fourier associada à função f, será uniforme em $\mathbb{R}$.

Logo, da identidade de Parseval, para o caso real, (isto é, do item 2. da Observação (7.6.2)), segue que (com $L = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{1^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}\right]^2 &\overset{(7.320)}{=} \frac{{a_o}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) \\ &\overset{(7.314)}{=} \|f\|^2 \\ &\int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx \\ &\overset{\text{f é função par}}{=} 2\int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx \\ &\overset{(7.319)}{=} 2\int_{0}^{1} x^2 \, dx \\ &= 2\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1}\right] \\ &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

□

Exemplo 7.6.2 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \text{sen}(10x) + 5\cos(5x) - 2\,\text{sen}(20x) - 4\cos(11x), \tag{7.321}$$

para cada $x \in [-\pi, \pi)$, *e satisfazendo*

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Estudar a série de Fourier associada à função $\underline{f}$.

Resolução:

Observemos que, neste caso,

$$L = \pi.$$

Notemos que cada funções que são as parcelas da função $\underline{f}$ tem 2π como um de seus períodos.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto segue que

$$f(x) = \operatorname{sen}(10x) + 5\cos(5x) - 2\operatorname{sen}(20x) - 4\cos(11x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo teremos $f \in C^\infty_{per}(2\pi)$ e, do Teorema (7.6.1), segue que a série de Fourier associada à função $\underline{f}$ irá convergir uniformemente para a função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(10x) + 5\cos(5x) - 2\operatorname{sen}(20x) - 4\cos(11x) &\overset{(7.321)}{=} f(x)\\ &\overset{(7.302)\text{ com } L=\pi}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),\end{aligned} \tag{7.322}$$

para $x \in \mathbb{R}$, onde a convergência da série de funções acima é uniformemente em $\mathbb{R}$.

Comparando, na identidade (7.322), o lado direito como o lado esquerdo, observamos que:

$$\begin{aligned}&b_n = 0 \ \text{ para } \ n \neq 10, 20,\\ &b_{10} = 1, \ b_{20} = -2,\\ &a_n = 0, \ \text{ para } \ n \neq 5, 11,\\ &a_5 = 5, \ \text{ para } \ a_{11} = -4,\end{aligned}$$

isto é, $S[f](x) = \operatorname{sen}(10x) + 5\cos(5x) - 2\operatorname{sen}(20x) - 4\cos(11x), \,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$

ou seja, é a expresssão da função $\underline{f}$ é a expansão da função $\underline{f}$ em série de Fourier, em $[-\pi, \pi]$.

□

Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 7.6.1 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq x, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-\pi, \pi), \tag{7.323}$$

satisfazendo

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

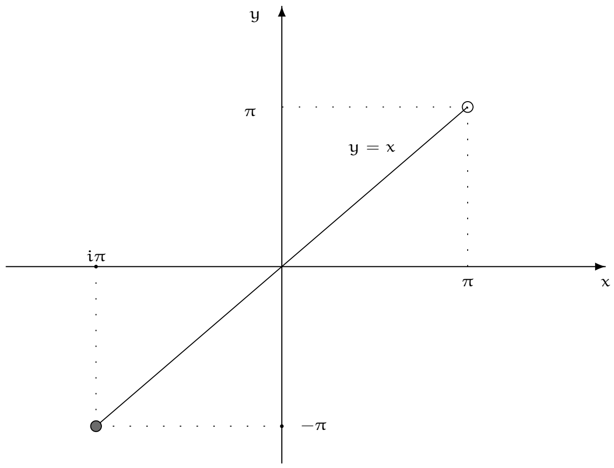
Estude a série de Fourier associada à função $\underline{f}$.

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que, neste caso,

$$L = \pi .$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, no período fundamental, é dado pela figura abaixo.



Notemos que $f \in SC_{per}(2\pi)$ e a função $\underline{f'}$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Observemos que

$$f'(x) = 1 , \quad \text{para cada} \quad x \in (-\pi, \pi) .$$

Logo, teremos que $f' \in SC_{per}(2\pi)$ e assim, do Teorema (7.5.1), segue que a série de Fourier associada à função $\underline{f}$, converge pontualemnte, para

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} ,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Notemos que a função $\underline{f}$ é uma função ímpar em $(-\pi, \pi)$.

Logo, do item 4. da Observação (7.3.8) (veja (7.164)), segue que

$$a_n = 0 , \quad \text{para cada} \quad n = \in \{0\} \cup \mathbb{N} . \tag{7.324}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
b_n &\overset{(7.157) \text{ com } L=\pi}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\text{sen}\,(n\,x)\, dx \\
&\overset{f \text{ é função ímpar}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \,\text{sen}(nx)\, dx \\
&\left\langle \begin{array}{l} u = x , \text{ logo } du = dx \\ dv = \text{sen}(n\,x) , \text{ logo } v = -\dfrac{\cos(n\,x)}{n} \end{array} \right\rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(n\,x)}{n} \Bigg|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(n\,x)}{n}\, dx \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\pi\,\frac{\overbrace{\cos(n\,\pi)}^{=(-1)^n \text{ para cada } n\in\mathbb{N}}}{n} + \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(n\,x)}^{=0 \text{ para todo } n\in\mathbb{N}}}{n^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\,\frac{2}{n}\,. \tag{7.325}$$

Portanto, substituindo (7.325) em (7.324), obteremos:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,2}{n}\operatorname{sen}(n\,x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Observemos que se

$$x_o \neq k\,\pi\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

então a função $\underline{f}$ será contínua em x_o.

Logo, nesses pontos, a série de Fourier associada à função $\underline{f}$, no ponto $\underline{x_o}$, convergirá para a $f(x_o)$, isto é

$$f(x_o) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,2}{n}\operatorname{sen}(n\,x_o)\,.$$

$\square$

7.7 Notas Históricas

A seguir vamos fornecer um breve relato do desenvolvimento da teria associada as séries de Fourier.

1. d'Almbert (1747) e Euler (1748) encontraram solução geral para a equação da onda em $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t\,,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{7.326}$$

dada por:

$$u(t\,,x) \doteq F(x+t) + G(x-t)\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{7.327}$$

onde $F\,,G \in C^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.

2. D.Bernoulli (1753) afirmou que a equação da onda (7.326), deveria ter solução da forma (caso $L \doteq \pi$) :

$$u(t\,,x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\,x)\cos(n\,t)\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,\pi]\,. \tag{7.328}$$

3. Lagrange (1759) afirmou que a equação da onda em $[0\,,1]$ (caso $L \doteq 1$), com dado inicial dado pela função $\underline{f}$, e velocidade inicial dada pela função $\underline{g}$, deveria ser dada por:

$$u(t\,,x) = 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\, \text{sen}(n\,\pi\,y)\ \text{sen}(n\,\pi\,x)\ \cos(n\,\pi\,t)\Big]\ f(y)\,dy$$
$$+\,2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\ \text{sen}(n\,\pi\,y)\ \text{sen}(n\,\pi\,x)\ \text{sen}(n\,\pi\,t)\right]\ g(y)\,dy\,, \tag{7.329}$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,1]$.

Ovservação:

Se fizermos $t = 0$ em (7.329) e trocarmos a integral com a série de funções (precisaríamos garantir que podemos fazer isso), obteremos:

$$f(x) = u(0\,,x) \overset{t=0 \text{ em } (7.329)}{=} 2\,,\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\, \text{sen}(n\,\pi\,y)\ \text{sen}(n\,\pi\,x)\ \ \overbrace{\cos(n\,\pi\,0)}^{=1\,,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}}\,\right]\ f(y)\,dy$$
$$+\,2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\ \text{sen}(n\,\pi\,y)\ \text{sen}(n\,\pi\,x)\ \ \underbrace{\text{sen}(n\,\pi\,0)}_{=0\,,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}}\right]\ g(y)\,dy$$
$$= 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\, \text{sen}(n\,\pi\,y)\ \text{sen}(n\,\pi\,x\Big]\ f(y)\,dy$$
$$\overset{\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1}{=} 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\int_0^1 \text{sen}(n\,\pi\,y)\,f(y)\,dy}_{n\text{-ésimo coeficiente de Fourier}}\right]\ \text{sen}(n\,\pi\,x)\,,$$

para cada $x \in [0\,,1]$.

4. Fourier (1811) obteve os coeficientes de Fourier associado à algumas funções e escreveu as séries de senos e cossenos de várias funções.

   Segundo consta, ele dizia que qualquer função periódica poderia ser expressa por uma tal série.

   Mais tarde foi mostrado que isso, em geral, **não** é verdade !

5. Dirichlet (1829 e 1837) foi um dos primeiros a reconhecer que nem toda função periódica poderia ser representada por uma série de Fourier.

   Produziu os primeiros critérios de convergência das séries de Fourier.

6. Riemann (século XIX) propôs econtrar condições necessárias e suficientes para que uma função pudesse ser representada por uma série de Fourier.

   Como estas questões estavam ligadas a integração de funções, neste instante, começa o desenvolvimento mais profundo da teoria de integração de Riemann.

7. de Bois e Reymond (1876) construiram uma função contínua, cuja série de Fourier divergia em um ponto.

   Mais tarde, construiram uma outra para o qual a série de Fourier divergia num conjunto denso de $\mathbb{R}$.

   Féjér (1909) exibiu exemplos, relacionados o problema acima, mais simples.

8. Dini (1880) obteve critérios para a convergência da série de Fourier, conhecio como **teste ou critério de Dini**.

9. Jordan (1881) demostrou outro critério de convergência da série de Fourier, denominado **teste ou critério de Jordan**.

   Observação: Todos estes trabalhos, e muitos outros, conduziram a uma melhor compreensão das funções descontínuas e propiciaram os trabalhos de Harnack, Hankel, Borel e Lebesgue, culminando com a introdução de um novo conceito de integração, a saber, a **integral de Lebesgue**.

   Assim começa a teoria moderna das séries de Fourier.

10. Riesz e Fischer (1907) mostraram a convergência da séire de Fourier na norma $\|\cdot\|_2$, para funções, cujo módulo, ao quadrado, são Lebesgue-integráveis em $[0, L]$.

11. Carleson (1966) mostrou que para uma função, cujo módulo ao quadrado é Lebesgue-integrável em $[0, L]$, a série de Fourier associadada à mesma converge, exceto num conjunto de medida de Lebesgue zero, para a própria função.

7.8 Exercícios

Capítulo 8

Aplicação de Série de Fourier às EDP's

Faremos uso da teoria das séries de Fourier desenvolvida no capítulo anterior, para resolver alguns problemas aplicados relacionados com algumas EDP's importantes.

Na verdade trataremos de alguns problemas físicos que envolvem EDP's (Equações Diferenciais Parciais).

8.1 O Problema da Condução do Calor em um Fio

O objetivo é encontrar a temperatura em cada ponto de um fio finito, cujo comprimento é igual

$$L \in (0\,,\infty)\,,$$

os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo no instante inicial $t = 0$, sendo o que o fio está isolado termicamente (imagine que o fio está dentro de um isopor) e cujas extremidades são mantidas a 0^{o} C, ao longo de todo o processo.

Se imaginarmos que o fio é o intervalo

$$[0\,,L] \subseteq \mathbb{R}$$

e que $u = u(t\,,x)$, nos fornece a temperatura no ponto $\underline{x}$ do fio, no instante $\underline{t}$, para cada $x \in [0\,,L]$ e $t \in [0\,,\infty)$, então, matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar uma função

$$u = u(t\,,x)\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]\,,$$

que satisfaz:

Matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar um função

$$u = u(t,x)\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]\,,$$

que venha satisfazer o seguinte problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t\,,x) = \alpha^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x)\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x) \in (0\,,\infty) \times (0\,,L) \tag{8.1}$$

$$u(0\,,x) = f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,L]\,, \tag{8.2}$$

$$u(t\,,0) = u(t\,,L) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0\,,\infty)\,. \tag{8.3}$$

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,\infty) \times (0\,,L)\,;\mathbb{R})\,. \tag{8.4}$$

A condição (8.1) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, a temperatura no ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $f(x)\,^{o}$C.

A condição (8.2) nos diz que a temperatura nos extremos do fio igual a $0\,^{o}$C, ao longo de todo o processo, isto é, para $t \in [0, \infty)$.

A Equação Diferencial Parcial (8.1) é denominada **Equação do Calor**.

A constante $\alpha \in (0, \infty)$ está relacionada com a condutibilidade térmica do fio, isto é, depende do material que o fio é feito.

No nosso caso, vamos supor que

$$\alpha = 1\,,$$

para facilitarmos as contas que iremos tratar.

Aplicando o método da separação de variáveis desenvolvido no início do Capítulo anterior (veja (7.10)) obtemos que a função $u = u(t, x)$, deverá ter a seguinte forma (veja (7.43)):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\, t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\, x\right)\,, \tag{8.5}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Fazendo $t = 0$ em (8.5) e utilizando (8.2), obteremos:

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(8.2)}{=} u(0, x) \\ &\overset{(8.5)\text{ com } t=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\, x\right)\,, \end{aligned} \tag{8.6}$$

para cada $x \in [0, L]$, isto é, precisamos saber expandir a função f (o dado inicial) em uma série de Fourier (em senos), em $[0, L]$.

Observemos que o lado direito de (8.6) (ou seja, a série de Fourier), caso seja convergente, definirá uma função ímpar e $2\,L$-periódica.

Logo, precisamos estender a função f, de modo ímpar e $2\,L$-periódicamente, a $\mathbb{R}$.

Notemos que para estender, de modo ímpar, a função f ao intervalo $[-L, L]$, basta considerarmos a função, que denotaremos por, $F : [-L, L] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$F(x) \doteq \begin{cases} f(x)\,, & \text{para cada} \quad x \in [0, L] \\ -f(-x)\,, & \text{para cada} \quad x \in [-L, 0] \end{cases}\,. \tag{8.7}$$

Notemos que (condições de compatibilidade):

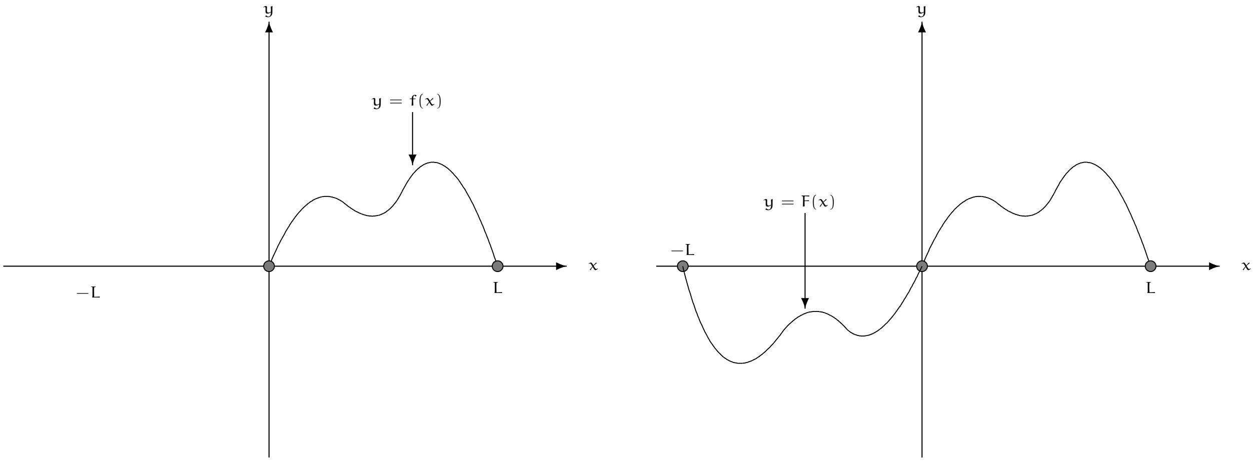
$$\begin{aligned} f(0) &\overset{x=0 \text{ em } (8.2)}{=} u(0, 0) \\ &\overset{t=0 \text{ em } (8.3)}{=} 0 \\ &\overset{t=0 \text{ em } (8.3)}{=} u(0, L) \\ &\overset{x=L \text{ em } (8.2)}{=} f(L)\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(0) = f(L) = 0\,. \tag{8.8}$$

Logo como a função $\underline{f}$ é contínua em $[0\,,L]$ e satisfaz (8.8), temos que a extensão ímpar da mesma ao intervalo $[-L\,,L]$, isto é, a função $\underline{F}$, dada por (8.7), será uma função contínua em $[-L\,,L]$.

À esquerda, na figura abaixo, temos ilustrado a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, e à direitatemos ilustrado a representação geométrica do gráfico da função $\underline{F}$.



Notemos que

$$\begin{aligned} F(-L) &\overset{(8.7)}{=} -f[-(-L)] \\ &= -f(L) \\ &\overset{(8.7)}{=} F(L)\,. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} F(-L) &= F(L) \\ &\overset{(8.7)}{=} f(L) \\ &\overset{(8.8)}{=} 0\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(-L) = F(L) = 0\,. \tag{8.9}$$

Portanto, de (8.9), podemos considerar uma extensão (na verdade, será única) $2\,L-$periódica da função $\underline{F}$ à $\mathbb{R}$, que indicaremos também por $\underline{F}$, ou seja, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, será dada por

$$F(x) = F(x + 2\,k\,L)\,, \tag{8.10}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ é escolhido de modo que

$$x + 2\,k\,L \in [-L\,,L]\,. \tag{8.11}$$

Como $f \in C([0\,,L]\,;\mathbb{R})$ e satisfaz (8.8), então teremos que sua extensão ímpar e $2\,L$-periódica à $\mathbb{R}$, isto é, a função $\underline{F}$, definida por (8.7) e (8.10), satisfaz $F \in C_{per}(2\,L\,;\mathbb{R})$ e será uma função ímpar.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo a série de Fourier associada à função F (e portanto da função f) terá a seguinte forma:

$$S[f](x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{8.12}$$

onde

$$a_m = 0, \quad \text{para cada} \quad m \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

pois a função F é uma função ímpar (veja o item 4. da Observação (7.3.8), ou ainda, (7.164) e, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
b_n &\overset{(7.157)}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{e \underbrace{F(x)}_{\text{é ímpar}} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{é ímpar}}}_{\text{será par}} dx \\
&\overset{\text{item 4. da Observação (7.3.8), ou ainda, (7.165)}}{=} \frac{2}{L}\int_{0}^{L} F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&\overset{(8.7)}{=} \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$a_m = 0, \quad \text{para cada} \quad m \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \tag{8.13}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{8.14}$$

Logo, substituindo (8.13) em (8.12), segue que a série de Fourier, associada à função f, terá a seguinte forma:

$$S[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{8.15}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que o coeficientes b_n será dado por (8.14).

Portanto, voltando a (8.5), segue que, uma candidata a solução do problema (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), será dada por:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{8.16}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$b_n \doteq \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \tag{8.17}$$

Para completar precisamos mostrar que a função $u = u(t, x)$, dada por (8.16), é realmente solução do problema (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), isto é:

i. a série de funções (8.16) converge, para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]$;

ii. a série de funções (8.16) pode ser derivada, termo a termo, duas vezes em relação à $\underline{x}$ e uma vez, relação à $\underline{t}$, em $(0\,,\infty) \times (0\,,L)$;

iii. a função $u = u(t\,,x)$, dada por (8.16), satisfaz (8.1), (8.2), (8.3) e (8.4).

Na verdade mostraremos que

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^{\infty}((0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})$$

e que a série de funções (8.16), pode ser derivada, termo a termo, quantas vezes precisarmos, tanto em relação à $\underline{t}$, quanto em relação à $\underline{x}$, em

$$(0\,,\infty) \times [0\,,L]\,,$$

se $f \in C([0\,,L)]\,;\,)$ satisfaz (8.8), é diferenciável em $[0\,,L]$, exceto em um número finito de pontos de $[0\,,L]$, de modo que $f\,' \in SC([0\,,L]\,;\mathbb{R})$.

Notemos que, neste caso, a extensão ímpar e $2\,L$-periódica da função $\underline{f}$, à $\mathbb{R}$, isto é, função $\underline{F}$, dada por (8.7) e (8.10), irá satisfazer as seguintes condições: $F \in C_{per}(2\,L)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, exceto um número finito de pontos de $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$, e $F\,' \in SC_{per}(2\,L)$.

Mais especificamente, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 8.1.1 *Suponhamos que* $f \in C([0\,,L)]\,;\mathbb{R})$*, satisfaz* (8.8)*, é diferenciável em* $[0\,,L]$*, exceto um número finito de pontos de* $[0\,,L]$*, e* $f\,' \in SC([0\,,L]\,;\mathbb{R})$*.*

Então a série de funções (8.16)*, converge uniformemente em* $[0,\infty)\times[0,L]$*, para uma função* $\underline{u}$*, de modo que*

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^{\infty}((0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})\,, \tag{8.18}$$

e é solução de (8.1)*,* (8.2)*,* (8.3)*) onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, o coeficiente* $\underline{b_n}$*, será dado por* (8.17)*), ou seja,*

$$u(t\,,x) \doteq \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^L f(y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,y\right)\,dy\right]\,e^{-\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,, \tag{8.19}$$

Demonstração:

Mostremos, primeiramente que a série de funções (8.16) (ou (8.19)) converge uniformemente em $[0\,,\infty) \times [0\,,L]$.

Para isto, observemos que, do Teorema (7.6.1), segue que a série de Fourier associada à função $\underline{f}$ (na verdade, à sua extensão ímpar e $2L$-periódica à $\mathbb{R}$), converge uniformemente para a função $\underline{f}$, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,, \qquad \text{uniformemente em } \mathbb{R},$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, o coeficiente $\underline{b_n}$ é dados por (8.17).

Logo, fazendo $t = 0$ em (8.16), segue que a série de funções (8.16) (ou (8.19)) converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$, em particular,

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [0, L],$$

ou seja, a função $\underline{u}$, dada por (8.16) (ou (8.19)), satisfaz (8.2).

Notemos também que, do Lema de Riemann-Lebesgue (isto é, do Corolário (7.4.2)) segue que

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Em particular, (veja a Proposição (2.3.2)) a sequência numérica $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será limitada, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|b_n| \leq M, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.20}$$

Para cada $t_o \in (0, \infty)$ fixado, mostremos que a série de funções (8.16) (ou (8.19)), converge uniformemente em

$$[t_o, \infty) \times [0, L].$$

Para isso, observemos que para

$$(t, x) \in [t_o, \infty) \times [0, L]$$

temos:

$$\begin{aligned} \left| b_n\, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right| &= \underbrace{|b_n|}_{\overset{(8.20)}{\leq} M} \; \underbrace{e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}}_{\leq e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_o}} \; \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right|}_{\leq 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}} \\ &\leq M\, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_o}. \end{aligned} \tag{8.21}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$c_n \doteq M\, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_o} > 0. \tag{8.22}$$

Afirmamos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} M\, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_o} \tag{8.23}$$

é convergente em $\mathbb{R}$.

De fato, considerando-se a sequência numérica $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde

$$d_n \doteq \frac{1}{n^2}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{8.24}$$

temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{d_n} &\overset{(8.22) \text{ e } (8.24)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{M\, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_o}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= M \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{e^{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_o}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Teorema (2.3.2)}}{=} M \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}} \\
&\overset{\text{L'Hôpital, caso } \frac{\infty}{\infty}}{=} M \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}x^2}{\frac{d}{dx}e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}} \\
&= M \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\frac{2x\pi^2}{L^2}t_o\, e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}} \\
&= \frac{M L^2}{2\pi^2} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente em $\mathbb{R}$ (veja o Exemplo (3.5.12) , ou ainda, (3.203)) segue, do critério da razão por limites, para séries numéricas cujos termos são não negativos (veja o Teorema (3.5.5)), segue que série numérica (8.23) é convergente em $\mathbb{R}$.

Logo, (8.21), (8.23) e do teste M.de Weierstrass (na verdade da Observação (5.3.3)), segue que a série de funções (8.16) (ou (8.19)), converge uniformemente em

$$[t_o\,,\infty)\times[0\,,L]\,,$$

para cada $t_o \in (0\,,\infty)$ fixado.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$(t\,,x) \mapsto b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)$$

é contínua em $[0\,,\infty)\times[0\,,L]$.

Logo, do item 1. do Corolário (5.3.1) (na verdade, do item 3. da Observação (5.3.2)), segue que, que

$$u \in C([0\,,\infty)\times[0\,,L]\,;\mathbb{R})\,. \tag{8.25}$$

Afirmamos que

$$u \in C^\infty((0\,,\infty)\times[0\,,L]\,;\mathbb{R})$$

e que a série de funções (8.16) (ou (8.19)), pode ser derivada parcialmente (a qualquer ordem), em relação à $\underline{t}$ ou, em relação à $\underline{x}$, termo a termo, em

$$(0\,,\infty)\times[0\,,L]\,.$$

Para isto, notemos que para $t_o \in (0\,,\infty)$ fixado, e para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a função $u_n : [t_o\,,\infty)\times[0\,,L] \to \mathbb{R}$, dada por

$$u_n(t\,,x) \doteq b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,, \tag{8.26}$$

para cada $(t\,,x) \in [t_o\,,\infty)\times[0\,,L]$.

Com isto temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$u_n \in C^\infty([t_o\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})\,.$$

Observemos também que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_n}{\partial t}(t\,,x) &\overset{(8.26)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left[b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right] \\
&= b_n\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\
&= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \qquad (8.27)
\end{aligned}$$

para cada $(t\,,x) \in [t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, e $(t\,,x) \in [t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$, teremos:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}(t\,,x)\right| &\overset{(8.27)}{=} \left|-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right| \\
&= \frac{n^2\pi^2}{L^2}\,\underbrace{|b_n|}_{\overset{(8.20)}{\leq} M}\;\underbrace{e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}}_{\leq e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o},\ \text{para todo } t\in[t_o\,,\infty)}\;\underbrace{\left|\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right|}_{\leq 1,\ \text{para todo } x\in\mathbb{R}} \\
&\leq M\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o} = s_n\,, \qquad (8.28)
\end{aligned}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$s_n \doteq M\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o}\,. \qquad (8.29)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{d_n} &\overset{(8.29)\text{ e }(8.24)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{M\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= M\,\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}}{e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o}} \\
&= \frac{M\,\pi^2}{L^2}\,\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o}} \\
&\overset{\text{Teorema }(2.3.2)}{=} \frac{M\,\pi^2}{L^2}\,\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}} \\
&\overset{\text{L'Hôpital, caso }\frac{\infty}{\infty}:}{=} \frac{M\,\pi^2}{L^2}\,\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}x^4}{\frac{d}{dx}e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}} \\
&= \frac{M\,\pi^2}{L^2}\,\lim_{x\to\infty}\frac{3\,x^3}{\frac{2\,x\,\pi^2}{L^2}\,t_o\, e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}}
\end{aligned}$$

(8.30)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3\,M}{2\,t_o} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}\,t_o}} \\
&\overset{\text{L'Hôpital, caso } \frac{\infty}{\infty}:}{=} \frac{3\,M}{2\,t_o} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\,x^2}{\frac{d}{dx}\,e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}\,t_o}} \\
&= \frac{3\,M}{2\,t_o} \lim_{x\to\infty} \frac{2\,x}{\frac{2\,x\,\pi^2}{L^2}\,t_o\,e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}\,t_o}} \\
&= \frac{3\,M\,L^2}{2\,\pi^2\,t_o^2} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}\,t_o}} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 0\,.
\end{aligned}
$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (veja o Exemplo (3.5.12) , ou ainda, (3.203)) segue, do critério da razão por limites, para séries numéricas cujos termos são não negativos (veja o Teorema (3.5.5)), que série numérica

$$
\sum_{n=1}^{\infty} s_n \overset{(8.29)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} M\,\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,t_o} \tag{8.31}
$$

é convergente em $\mathbb{R}$.

Logo, de (8.28), (8.31) e do teste M.de Weierstrass (na verdade da Observação (5.3.3)), segue que a série de funções

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(t\,,x) \overset{(8.27)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,b_n\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)
$$

converge uniformemente em

$$
[t_o\,,\infty)\times[0\,,L]\,.
$$

Como a série de funções

$$
\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t\,,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)
$$

converge em cada ponto de $[0\,,\infty)\times[0\,,L]$ segue, do item 3. do Corolário (5.3.1) (na verdade, do item 3. da Observação (5.3.2)), que a série de funções (8.16) (ou (8.19)), pode ser derivada parcialmente, em relação à $\underline{t}$, termo a termo, em $[t_o\,,\infty)\times[0\,,L]$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t\,,x) &\overset{(8.16)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right] \\
&\overset{(5.25)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left[b_n\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\right) b_n\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \tag{8.32}$$

para cada $(t\,,x) \in [t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$.

Em particular, notemos que, (8.32), implicará que a função $\frac{\partial u}{\partial t}$ é contínua em $[t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$, para cada $t_o \in (0\,,\infty)$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C((0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})\,. \tag{8.33}$$

De modo semelhante, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado e $(t\,,x) \in [t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$, temos $[t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$, para cada $t_o \in (0\,,\infty)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_n}{\partial x}(t\,,x) &\overset{(8.26)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right]\\
&= b_n\left(\frac{n\,\pi}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\\
&= \frac{n\,\pi}{L}\, b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right),
\end{aligned} \tag{8.34}$$

assim

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(t\,,x)\right| &\overset{(8.34)}{=} \left|-\frac{n\,\pi}{L}\, b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right|\\
&= \frac{n\,\pi}{L}\,\underbrace{|b_n|}_{\overset{(8.20)}{\leq} M}\;\underbrace{e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}}_{\leq e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o}}\;\underbrace{\left|\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right|}_{\leq 1,\ \text{para todo}\ x\in\mathbb{R}}\\
&\leq \frac{M\,\pi\,n}{L}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o} = r_n\,,
\end{aligned} \tag{8.35}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$r_n \doteq \frac{M\,\pi\,n}{L}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o}\,. \tag{8.36}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{d_n} &\overset{(8.36)\ \text{e}\ (8.24)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{M\,\pi\,n}{L}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o}}{\dfrac{1}{n^2}}\\
&= \frac{M\,\pi}{L}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_o}}\\
&\overset{\text{Teorema }(2.3.2)}{=} \frac{M\,\pi}{L}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}}\\
&\overset{\text{L'Hôpital, caso }\frac{\infty}{\infty}:}{=} \frac{M\,\pi}{L}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}x^3}{\dfrac{d}{dx}e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_o}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{M\,\pi}{L} \lim_{x\to\infty} \frac{3\,x^2}{\dfrac{2\,x\,\pi^2}{L^2}\,t_o\,e^{\frac{x^2\,\pi^2}{L^2}\,t_o}} \\
&= \frac{3\,M\,L}{2\,\pi\,t_o} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2\,\pi^2}{L^2}\,t_o}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{L'Hôpital, caso } \frac{\infty}{\infty}:}{=} \frac{3\,M\,L}{2\,\pi\,t_o} \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}x}{\dfrac{d}{dx}\,e^{\frac{x^2\,\pi^2}{L^2}\,t_o}} \\
&= \frac{3\,M\,L}{2\,\pi\,t_o} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\,x\,\dfrac{\pi^2}{L^2}\,t_o\,e^{\frac{x^2\,\pi^2}{L^2}\,t_o}} \\
&= \frac{3\,M\,L^3}{4\,\pi^3\,t_o^2} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\,e^{\frac{x^2\,\pi^2}{L^2}\,t_o}} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 0\,.
\end{aligned}
$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente segue, do critério da razão por limites, para séries numéricas cujos termos são não negativos (veja o Teorema (3.5.5)), segue que série numérica

$$
\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t_o}
$$

é convergente em $\mathbb{R}$.

Logo, do teste M.de Weierstrass (na verdade da Observação (5.3.3)), segue que a série de funções

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial\,u_n}{\partial x}(t\,,x) \overset{(8.34)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,\pi}{L}\,b_n\,e^{-\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)
$$

converge uniformemente em

$$
[t_o\,,\infty) \times [0\,,L]\,.
$$

Como a série de funções

$$
\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t\,,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x)
$$

converge em $[0\,,\infty) \times [0\,,L]$ segue, do item do Corolário (5.3.1) (na verdade, do item 3. da Observação (5.3.2)), que a série de funções (8.16) (ou (8.19)), pode ser derivada parcial, em relação a $\underline{x}$, termo a termo, em $[t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(t\,,x) &\overset{(8.16)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,e^{-\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right] \\
&\overset{(5.25)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left[b_n\,e^{-\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,\pi}{L} b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right), \tag{8.37}$$

para cada $(t\,,x) \in (t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$.

Em particular, notemos que, (8.37), implicará que a função $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ é contínua em $[t_o\,,\infty) \times [0\,,L]$, para cada $t_o \in (0\,,\infty)$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \in C((0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})\,. \tag{8.38}$$

Logo, de (8.25), (8.33) e (8.38) , segue que

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^1((0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \tag{8.39}$$

e que a série de funções (8.16) (ou (8.19)), pode ser derivada parcialmente, em relação à $\underline{t}$ ou, em relação à $\underline{x}$, termo a termo, em

$$(0\,,\infty) \times [0\,,L]\,.$$

De modo análogo mostra-se que

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^\infty((0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})$$

e que a série de funções (8.16) (ou (8.19)), pode ser derivada parcialmente, em relação à $\underline{t}$ ou, em relação à $\underline{x}$, a qualquer ordem, termo a termo, em

$$(0\,,\infty) \times [0\,,L]\,,$$

isto é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k+m} u}{\partial t^k x^m}(t\,,x) &\overset{(8.16)}{=} \frac{\partial^{k+m} u}{\partial t^k x^m}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right)\right] \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial t^k x^m}\left[b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right)\right],\end{aligned}$$

para $(t\,,x) \in (0\,,\infty) \times [0\,,L]$ e $k\,,m \in \mathbb{N}$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Finalmente, para cada $(t\,,x) \in (0\,,\infty) \times [0\,,L]$, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x) &\overset{(8.16)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x2}\left[b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \left(\frac{n\,\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2 \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right)\right] \\ &= -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, n^2\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right).\end{aligned} \tag{8.40}$$

Utilizando-se (8.32) e (8.40), obteremos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &\overset{(8.32)\text{ e }(8.40)}{=} -\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, n^2\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\
&\quad - \left[-\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, n^2\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right] \\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

para cada $(t,x) \in (0,\infty) \times [0,L]$, isto é, a função $u : [0,\infty) \times [0,L] \to \mathbb{R}$, dada por (8.16) (ou (8.19)), satisfaz a EDP (8.1), em $(0,\infty) \times [0,L]$.

Além disso, para cada $t \in [0,\infty)$, temos:

$$
\begin{aligned}
u(t,0) &\overset{(8.16))\text{ com } x=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\underbrace{\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,0\right)}_{=0} \\
&= 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\underbrace{\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,L\right)}_{=0} \\
&\overset{(8.16))\text{ com } x=L}{=} u(t,L)\,,
\end{aligned}
$$

isto é, a função $u = u(t,x)$, dada por (8.16) (ou (8.19)), satisfaz a condição (8.3)).

<u>**Conclusão:**</u> A função $u : [0,\infty) \times [0,L] \to \mathbb{R}$, dada por

$$
u(t,x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,, \quad \text{para cada} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,L] \tag{8.41}
$$

é uma solução do problema (8.1), (8.2), (8.3) e, além disso,

$$
u \in C([0,\infty) \times [0,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^{\infty}((0,\infty) \times [0,L]\,;\mathbb{R})\,,
$$

onde os coeficientes

$$
b_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,
$$

são os coeficientes de Fourier da expansão ímpar e $2\,L$-periódica da função $\underline{f}$ à $\mathbb{R}$.

□

Observação 8.1.1

1. *Pode-se mostrar que a solução, dada por (8.41), é a única solução do problema na classe (8.4).*

2. *De modo semelhante podemos tratar do problema de encontrar a temperatura em cada ponto de um fio finito, de comprimento*

$$
L \in (0,\infty)\,,
$$

os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo, no instante inicial, isto é, quando $t = 0$*, supondo que as extremidades do mesmo não trocam calor com o meio ambiente, ao longo de todo o processo.*

Se imaginarmos que o fio é o intervalo $[0\,,L] \subseteq \mathbb{R}$ *e que a função* $u = u(t\,,x)$ *nos fornece a temperatura no ponto* $\underline{x}$ *do fio, no instante* $t \in (0\,,\infty)$ *então, matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar uma função* $u = u(t\,,x)$*, para* $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]$*, que satisfaça:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t\,,x) = \alpha^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad (t\,x) \in (0\,,\infty) \times (0\,,L)\,, \tag{8.42}$$

$$u(0\,,x) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,L]\,, \tag{8.43}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t\,,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t\,,L) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0\,,\infty)\,, \tag{8.44}$$

$$u \in C^1([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,\infty) \times (0\,,L)\,;\mathbb{R})\,. \tag{8.45}$$

A condição (8.43) *nos diz que a temperatura no ponto* $x \in [0\,,L]$ *do fio é igual a* $f(x)^{o}\,C$*.*

A condição (8.44) *nos diz que os extremos não trocam calor com o meio ambiente.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

No nosso caso, vamos supor que

$$\alpha = 1\,,$$

para facilitarmos as contas.

Aplicando o método da separação de variáveis (como fizemos no item 2. da Observação (7.2.2) *- veja* (7.76)*), podemos mostrar que uma candidata a solução do problema acima é a função* $u : [0\,,\infty) \times [0\,,L] \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$u(t\,,x) \doteq \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,e^{-\frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\,t}\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \tag{8.46}$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]$*, onde*

$$a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

são os coeficientes da extensão par, $2\,L$*-periódica da função* $\underline{f}$ *à* $\mathbb{R}$*.*

Neste caso, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, teremos (veja o item 2 da Observação* (7.3.8)*, ou ainda,* (7.162)*):*

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,. \tag{8.47}$$

Com isto podemos provar o seguinte resultado, cuja demosntração é análoga ao caso tratado acima e será deixada como exercício para o leitor.

Teorema 8.1.2 *Suponhamos que* $f \in C([0\,,L)]\,;\mathbb{R})$ *é uma função diferenciável, exceto um número finito de pontos* $[0\,,L]$*, e além disso* $f' \in SC([0\,,L]\,;\mathbb{R})$*.*

Então a série de funções (8.46) *converge uniformemente em*

$$[0\,,\infty) \times [0\,,L]$$

para uma função

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^{\infty}((0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})$$

que é solução de (8.42)*,* (8.43)*,* (8.44)*, onde os coeficientes*

$$a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,,$$

são dados por (8.47)*.*

Observação 8.1.2 *Pode-se mostrar que, como no caso anterior, que a solução* (8.46) *é única.*

A seguir aplicaremos as ideias acima a um exemplo onde a temperatura inicial no fio, $\underline{f}$, é dada.

Exemplo 8.1.1 *Determine uma solução* $u = u(t\,,x)$ *do problema:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t\,,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x), \quad (t\,,x) \in (0\,,\infty) \times (0\,,\pi)\,, \tag{8.48}$$

$$u(0\,,x) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,\pi]\,, \tag{8.49}$$

$$u(t\,,0) = u(t\,,\pi) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0\,,\infty)\,, \tag{8.50}$$

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,\pi]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,\infty) \times (0\,,\pi)\,;\mathbb{R})\,, \tag{8.51}$$

onde $f : [0\,,\pi] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

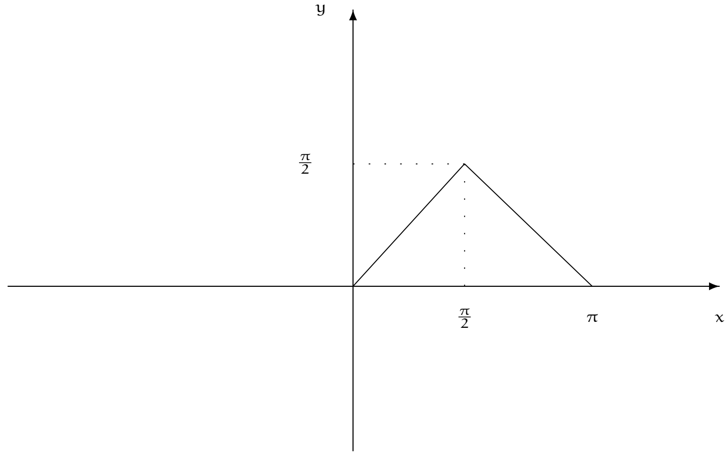
$$f(x) \doteq \begin{cases} x\,, & \textit{para cada} \quad x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x\,, & \textit{para cada} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}\,,\pi\right] \end{cases}\,. \tag{8.52}$$

<u>**Resolução:**</u>

Neste caso temos que

$$L \doteq \pi\,.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Consideremos a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como sendo a extensão ímpar, 2π-periódica da função $\underline{f}$ à $\mathbb{R}$.

Como

$$f(0) = f(\pi) = 0\,,$$

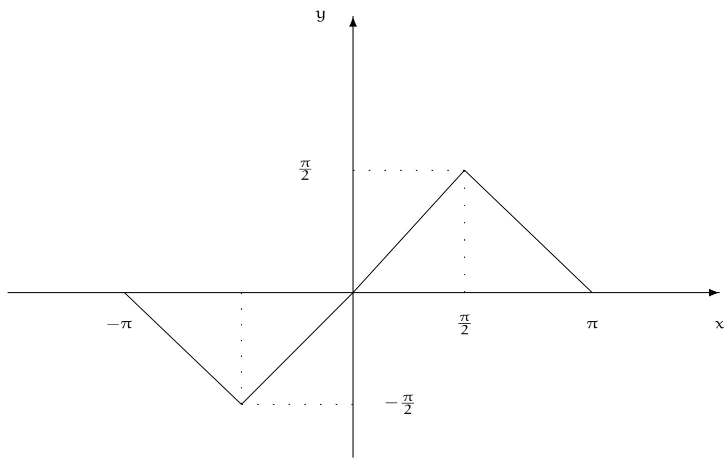
das observações feitas anteriormente (veja (8.7) e o que segue a esta) segue que a função $\underline{F}$ será contínua $\mathbb{R}$.

Observemos que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, será dada por:

$$F(x) = \begin{cases} -x-\pi\,, & \text{para cada} \quad x \in \left[-\pi\,, -\dfrac{\pi}{2}\right] \\ -x\,, & \text{para cada} \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,, 0\right) \\ x\,, & \text{para cada} \quad x \in \left[0\,, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x\,, & \text{para cada} \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,, \pi\right) \end{cases} \tag{8.53}$$

e satisfazendo $F(x + 2\pi) = F(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{F}$, no período fundamental $[\pi\,, \pi]$, é dada pela figura abaixo.



Como vimos anteriormente (veja (8.41)), uma candidata a solução a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ &\overset{L=\pi}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{\pi^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\pi} x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(n x), \end{aligned} \tag{8.54}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned} b_n &\overset{(8.17)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ &\overset{L=\pi}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\pi} x\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(n x)\, dx \\ &0 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx\right] \\ &\overset{(8.52)}{=} \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(n x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen}(n x)\, dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(n x)\, dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(n x)\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \operatorname{sen}(n x)\, dx\right]. \end{aligned} \tag{8.55}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen}(n x)\, dx &\overset{\text{integração por partes}}{=} \left\langle \begin{array}{l} u = x, \text{ logo: } du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(n x)\, dx, \text{ logo: } v = -\frac{\cos(n x)}{n} \end{array} \right\rangle \\ &= -x \frac{\cos(n x)}{n} - \int -\frac{\cos(n x)}{n}\, dx \\ &= -x \frac{\cos(n x)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(n x)}{n^2}. \end{aligned} \tag{8.56}$$

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo, segue que:

$$
\begin{aligned}
b_n &\overset{(8.55)}{=} \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx + \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{sen}(n\,x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right] \\
&\overset{(8.56)}{=} \frac{2}{\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos(n\,x)}{n} + \frac{\mathrm{sen}(n\,x)}{n^2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \left[-\pi\frac{\cos(n\,x)}{n}\right]\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}\right. \\
&\qquad \left. + \left[-x\frac{\cos(n\,x)}{n} + \frac{\mathrm{sen}(n\,x)}{n^2}\right]\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} + \frac{\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} - \left[-0\frac{\cos(n\,0)}{n} + \frac{\mathrm{sen}(n\,0)}{n^2}\right]\right]\right. \\
&\qquad -\pi\left[\frac{\cos(n\,\pi)}{n} - \frac{\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{n}\right] \\
&\qquad \left. + \left[-\pi\frac{\cos(n\,\pi)}{n} + \frac{\mathrm{sen}(n\,\pi)}{n^2} - \left[-\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{n} + \frac{\mathrm{sen}\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}\right]\right]\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\pi\left[\frac{\cos(n\,\pi)}{n} - \frac{\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{n}\right] - \pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right\} \\
&= \frac{2}{n}\left\{-2\,(-1)^n + \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)\right\}. \qquad (8.57)
\end{aligned}
$$

Observemos que:

$$
\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{para cada} \quad n \text{ par} \\ 0, & \text{para cada} \quad n \text{ ímpar} \end{cases}. \qquad (8.58)
$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (8.57) e (8.58), segue que

$$
\begin{aligned}
b_{2\,n} &= \frac{1}{n}\left[-2 - (-1)^n\right] \\
b_{2\,n+1} &= \frac{4}{n}. \qquad (8.59)
\end{aligned}
$$

Com isto, segue que uma candidata a solução do problema (8.48), (8.49), (8.50) e (8.51), será:

$$
u(t\,,x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,e^{-n^2\,t}\,\mathrm{sen}(n\,x) \qquad (8.60)
$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]$, onde os coeficientes $\underline{b_n}$ são dados por (8.59).

Observemos que $f \in C([0\,,\pi]\,;\mathbb{R})$ é uam função diferenciável, exceto um número finito de pontos de $[0\,,L]$ e que $f\,' \in SC([0\,,\pi]\,;\mathbb{R})$, pois

$$
f\,'(x) = \begin{cases} 1, & \text{para cada} \quad x \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) \\ -1, & \text{para cada} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}\,,0\right) \end{cases}
$$

e

$$f(0) = f(\pi) = 0 .$$

Logo, do Teorema (8.1.1), segue que a função $u = u(t, x)$, dada por (8.60), será a (única) solução do problema (8.48), (8.49), (8.50) e (8.51).

□

Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 8.1.1 *Determine uma função* $u : [0, \infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *que seja solução do problema:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \textit{para cada} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi), \tag{8.61}$$

$$u(0, x) = x, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, \pi], \tag{8.62}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, \infty), \tag{8.63}$$

$$u \in C^1([0, \infty) \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, \pi); \mathbb{R}) . \tag{8.64}$$

Resolução:

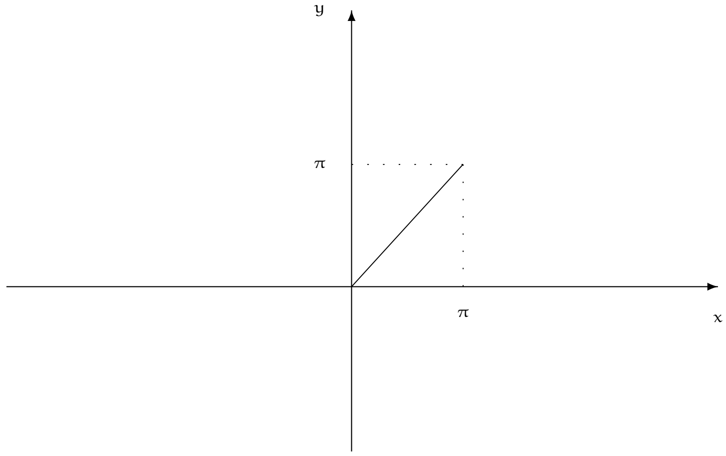
Neste caso, temos que

$$L \doteq \pi .$$

Notemos que o dado incial (veja (8.62), será a função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq x, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, \pi] . \tag{8.65}$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Consideremos a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sendo a extensão par, 2π-periódica da função $\underline{f}$ à $\mathbb{R}$.

Logo, das observações feitas anteriormente (veja (8.7) e o que segue a esta) segue que a função $\underline{F}$ será contínua $\mathbb{R}$.

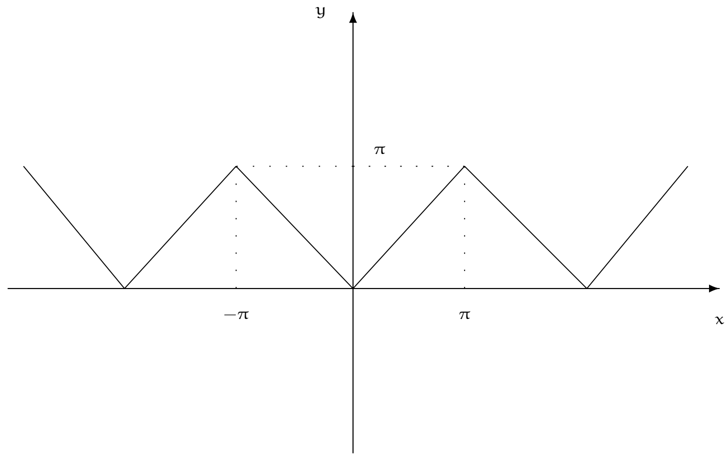
Observemos que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, será dada por:

$$F(x) = |x|, \quad \text{para cada} \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{8.66}$$

satisfazendo

$$F(x + 2\pi) = F(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{F}$, no período fundamental $[\pi, \pi]$, é dada pela figura abaixo.



Como vimos anteriormente (veja (8.46)), uma candidata a solução a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ &\overset{L=\pi}{=} \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-\frac{n^2 \pi^2}{\pi^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{\pi} x\right) \\ &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-n^2 t} \cos(n x), \end{aligned} \tag{8.67}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$, onde, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\underline{a_n}$ é o $\underline{n}$-éismo coeficiente da extensão par, 2π-periódica da função $\underline{f}$ à $\mathbb{R}$, ou seja, da função $\underline{F}$.

Logo para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(8.47)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ &\overset{L=\pi}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\pi} x\right) dx \\ &\overset{(8.65)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(n x) \, dx. \end{aligned} \tag{8.68}$$

Notemos que, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, segue que:

$$
\begin{aligned}
\int x\,\cos(n\,x)\,dx &\overset{\text{integração por partes}}{=} \left\langle \begin{array}{l} u = x\,,\ \text{logo: } du = dx \\ dv = \cos(n\,x)\,dx\,,\ \text{logo: } v = \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n} \end{array} \right\rangle \\
&= x\,\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n} - \int \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n}\,dx \\
&= x\,\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n} + \frac{\cos(n\,x)}{n^2}\,. \qquad (8.69)
\end{aligned}
$$

Logo, de (8.68), (8.69) e do Teorema Fundamental do Cálculo, teremos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\cos(n\,x)\,dx \\
&\overset{(8.69)}{=} \frac{2}{\pi}\left[x\,\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n} + \frac{\cos(n\,x)}{n^2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\pi\,\frac{\overbrace{\operatorname{sen}(n\,\pi)}^{=0 \text{ para todo } n\in\{0\}\cup\mathbb{N}}}{n} + \frac{\cos(n\,\pi)}{n^2} - \left[0\,\frac{\overbrace{\operatorname{sen}(n\,0)}^{=0 \text{ para todo } n\in\{0\}\cup\mathbb{N}}}{n} + \frac{\overbrace{\cos(n\,0)}^{=1 \text{ para todo } n\in\{0\}\cup\mathbb{N}}}{n^2}\right]\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\overbrace{\cos(n\,\pi)}^{=(-1)^n}}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] \\
&= \frac{2\,[(-1)^n - 1]}{n^2\,\pi}\,. \qquad (8.70)
\end{aligned}
$$

Substituindo (8.70) em (8.67), obteremos

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left[\overbrace{(-1)^n - 1}^{0\,,\ \text{para } n \text{ par} \ \text{ e } \ -2\,,\ \text{para } n \text{ ímpar}}\right]}{n^2\,\pi}\, e^{-n^2\,t}\,\cos(n\,x) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4}{(2\,m+1)^2\,\pi}\, e^{-(2\,m+1)^2\,t}\,\cos[(2\,m+1)\,x]\,, \qquad (8.71)
\end{aligned}
$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,\pi]$.

Observemos que $f \in C([0\,,\pi]\,;\mathbb{R})$ é uma função diferenciável em $(0\,,\pi)$, pois

$$f\,'(x) = 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0\,,\pi)\,,$$

logo $f\,' \in SC([0\,,\pi]\,;\mathbb{R})$.

Logo, do Teorema (8.1.1), segue que a função $u : [0\,,\infty) \times [0\,,\pi] \to \mathbb{R}$, dada por (8.71) é a (única) solução do nosso problema (8.61), (8.62), (8.63) e (8.64).

Na verdade

$$u \in C([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^\infty((0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})\,,$$

como afirma (8.18).

□

8.2 O Problema da Corda Vibrante

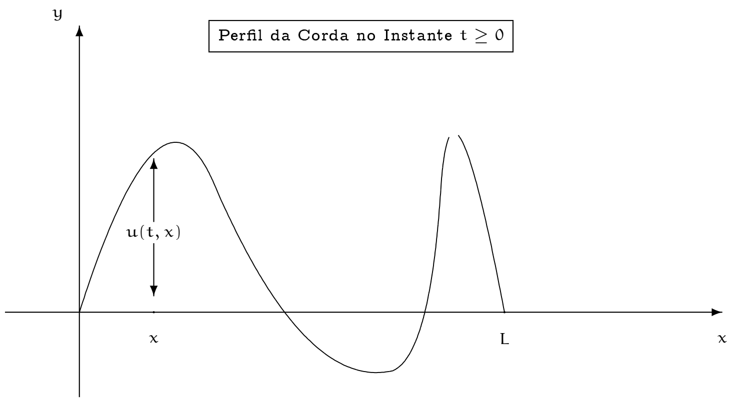
Consideraremos dois problemas associados às vibrações de uma corda finita num plano, a saber:

8.2.0.1 Corda Vibrante com as Extremidades Fixas

Trataremos a seguir do problema de encontrar a posição, em cada instante, de cada ponto de uma corda de comprimento L, que vibra num plano, cujas extremidades da mesma estão presas.

Denotemos a amplitude da vibração em cada instante, $t \in [0, \infty)$, em cada ponto, $x \in [0, L]$, da corda por $u = u(t, x)$.

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Então, um modelo matemático que está associado a esse problema será o de encontrar uma função $u : [0, \infty) \times [0, L] \to \mathbb{R}$ que satisfaça:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada} \quad (t\, x) \in (0, \infty) \times [0, L], \tag{8.72}$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [0, L], \tag{8.73}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [0, L], \tag{8.74}$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty), \tag{8.75}$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, \pi); \mathbb{R}), \tag{8.76}$$

onde a constante c^2, é uma constante que está relacionada com a tensão e a densidade da corda.

A condição (8.73) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, o deslocamento do ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $f(x)$.

A condição (8.74) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, a velocidade do deslocamento do ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $g(x)$.

A condição (8.75) nos diz que as extremidades do fio igual estão presas, ao longo de todo o processo, isto é, para $t \in [0, \infty)$.

A Equação Diferencial Parcial (8.72) é denominada **Equação da Onda**.

Esta equação é um exemplo importante de uma classe de EDP's do tipo hiperbólica.

Para simplificarmos as contas, consideraremos o caso em que

$$c = 1 .$$

O caso geral será deixado como exercício para o leitor.

Aplicaremos o método da separação de variáveis ao problema (8.72)), (8.73), (8.74), (8.75) e (8.76), isto é, tentaremos soluções de (8.72), (8.73), (8.74) e (8.75) e (8.76), do tipo

$$u(t, x) = \psi(t)\,\phi(x) , \quad \text{para cada} \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L] , \tag{8.77}$$

onde $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $\phi : [0, L] \to \mathbb{R}$.

Notemos que, supondo que as funções ψ e ϕ são duas vezes diferenciáveis em $(0, \infty)$ e $(0, L)$, respectivamente, então, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &\overset{(8.77)}{=} \frac{\partial}{\partial t}[\psi(t)\,\phi(x)] \\
&= \psi'(t)\,\phi(x) , && (8.78)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right] \\
&\overset{(8.78)}{=} \frac{\partial}{\partial t}[\psi'(t)\,\phi(x)] \\
&= \psi''(t)\,\phi(x) , && (8.79)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &\overset{(8.77)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[\psi(t)\,\phi(x)] \\
&= \psi(t)\,\phi'(x) , && (8.80)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right] \\
&\overset{(8.80)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[\psi(t)\,\phi'(x)] \\
&= \psi(t)\,\phi''(x) , && (8.81)
\end{aligned}$$

Substituindo (8.79) e (8.81) em (8.72), obteremos:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\
&\overset{(8.79)\text{ e }(8.81)}{=} \psi''(t)\,\phi(x) - \psi(t)\,\phi''(x) , && (8.82)
\end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$.

Supondo que

$$u \neq O ,$$

ou seja, a solução trivial não nos interessará, deveremos ter

$$\psi(t), \phi(x) \neq 0 ,$$

para algum $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$.

Logo, dividindo (8.82), por

$$\psi(t)\,\phi(x)\,,$$

obteremos:

$$\frac{\psi\,''(t)\,\phi(x) - \psi(t)\,\phi\,''(x)}{\psi(t)\,\phi(x)} = 0$$

$$\text{ou seja,}\quad \frac{\psi\,''(t)}{\psi(t)} - \frac{\phi\,''(x)}{\phi(x)} = 0\,,$$

$$\text{ou ainda,}\quad \frac{\psi\,''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi\,''(x)}{\phi(x)}\,.$$

Portanto, deveremos ter:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$$

para cada $(t\,,x) \in (0\,,\infty) \times (0\,,L)$, ou seja, teremos:

$$\psi\,''(t) = -\lambda\,\psi(t)\,,\quad \text{para cada}\quad t \in (0\,,\infty)\,, \tag{8.83}$$

$$\phi\,''(x) = -\lambda\,\phi(x)\,,\quad \text{para cada}\quad x \in (0\,,L)\,. \tag{8.84}$$

Notemos que, para cada $t \in [0\,,\infty)$, de (8.75), segue:

$$\begin{aligned} \psi(t)\,\phi(0) &\overset{(8.77)}{=} u(t\,,0) \\ &\overset{(8.74)}{=} 0 \\ &\overset{(8.74)}{=} u(t\,,L) \\ &\overset{(8.77)}{=} \psi(t)\,\phi(L)\,, \end{aligned} \tag{8.85}$$

Como $\psi(t) \neq 0$, para algum $t \in [0\,,\infty)$ (pois caso contrário, teríamos $u(t\,,x) = 0$, para todo $(t\,,x) \in [0\,,\infty)\times \in [0\,,L]$), dividindo ambos os membros da identidade (8.85), por $\psi(t)$, obteremos

$$\phi(0) = 0 = \phi(L)\,. \tag{8.86}$$

Portanto, de (8.84) e (8.86), segue quea função $\underline{\phi}$, deverá satisfazer o seguinte problema (dito problema de valor de contorno):

$$\phi\,''(x) = -\lambda\,\phi(x)\,,\quad \text{para cada}\quad x \in (0\,,L) \tag{8.87}$$

$$\phi(0) = \phi(L) = 0\,, \tag{8.88}$$

$$\phi \in C([0\,,L]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,L)\,;\mathbb{R})\,, \tag{8.89}$$

que já foi tratado anteriormente (veja (7.21), (7.22) e (7.23)).

Vimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda = \lambda_n \doteq \frac{n^2\,\pi^2}{L^2}$$

e que

$$\phi(x) = \phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \tag{8.90}$$

para cada $x \in [0\,, L]$.

Temos também que, a solução geral da EDO (8.83) (com $\lambda = \lambda_n \doteq \dfrac{n^2\,\pi^2}{L^2}$) será dada por

$$\psi_n(t) = A\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) + B\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \tag{8.91}$$

para cada $t \in [0\,, \infty)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (veja (7.34), com $x = t$ e $\underline{\lambda}$ como acima).

Assim, do método da separação de variáveis, para cada $n \in \mathbb{N}$, , de (8.91) e (8.90), temos que a função $u_n : [0\,, \infty) \times [0\,, L] \to \mathbb{R}$, dada por

$$u_n(t\,, x) \doteq \psi_n(t)\,\phi_n(x)\,,$$

para cada $(t\,, x) \in [0\,, \infty) \times [0\,, L]$ será da forma:

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &= \psi_n(t)\,\phi_n(x) \\ &\overset{(8.91)\text{ e }(8.90)}{=} \left[A_n\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) + B_n\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right)\right]\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\ &= A_n\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + B_n\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \end{aligned} \tag{8.92}$$

para cada $(t\,, x) \in [0\,, \infty) \times [0\,, L]$, será um solução de (8.72) e (8.75).

Logo, formalmente, temos que a função $u : [0\,, \infty) \times [0\,, L] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t\,, x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)\,\phi_n(x) \\ &\overset{(8.92)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + B_n\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right], \end{aligned} \tag{8.93}$$

para cada $(t\,, x) \in [0\,, \infty) \times [0\,, L]$, será uma candidata a solução para o problema (8.72), (8.73), (8.74) e (8.75)) e (8.76).

Para que a função $\underline{u}$, dada por (8.93), seja solução do problema, ela deverá satisfazer a condição (8.73)), ou seja:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(0\,, x) \\ &\overset{t=0\text{ em }(8.93)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\overbrace{\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,0\right)}^{=1\,,\text{ para todo } n\in\mathbb{N}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + A_n\,\overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,0\right)}^{=0\,,\text{ para todo } n\in\mathbb{N}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \end{aligned}$$

para cada $x \in [0, L]$, isto é, a função $\underline{f}$ (ou melhor, sua extensão ímpar e $2L$-periódica à $\mathbb{R}$) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso, uma série em senos), ou seja:

$$A_n \overset{(7.165)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.94}$$

Por outro lado, para a função $\underline{u}$, dada por (8.93), satisfazer (8.74) (supondo que possamos derivar parcialmente, a série de funções, termo a termo, em relação a $\underline{t}$), deveremos ter:

$$\begin{aligned}
g(x) &\overset{(8.74)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) \\
&\overset{(8.93)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right]\right\}\Bigg|_{t=0} \\
&\overset{\text{cuidado !}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right]\Bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \frac{n\pi}{L}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \frac{n\pi}{L}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[-A_n \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} 0\right)}^{=0,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}} \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n \overbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L} 0\right)}^{=1,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}} \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right),
\end{aligned} \tag{8.95}$$

para cada $x \in [0, L]$, isto é, a função $\underline{g}$ (ou melhor, sua extensão ímpar e $2L$-periódica à $\mathbb{R}$) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso, uma série em senos), ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, deveremos ter:

$$B_n \frac{n\pi}{L} \overset{(7.165)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2L}{L n\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,
\end{aligned} \tag{8.96}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$

Portanto uma candidata $u : [0, \infty) \times [0, L] \to \mathbb{R}$, a solução do problema dado inicialmente, será:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right], \tag{8.97}$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,L]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que os coeficientes A_n e B_n, são dados por:

$$A_n \doteq \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,. \tag{8.98}$$

$$B_n \doteq \frac{2}{n\,\pi}\int_0^L g(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx\,, \tag{8.99}$$

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demostração será deixada como exercício para o leitor:

Teorema 8.2.1 *Suponhamos que* $f \in C^2([0\,,L]\,;\mathbb{R})$ *e* $g \in C^1([0\,,L]\,;\mathbb{R})$*,*

$$f(0) = f(L) = f\,''(0) = f\,''(L) = g(0) = g(L) = 0\,. \tag{8.100}$$

Então a série de funções (8.97)*, converge uniformemente em* $[0\,,\infty)\times[0\,,L]$ *para uma função*

$$u \in C^2([0\,,\infty) \times [0\,,L]\,;\mathbb{R})\,,$$

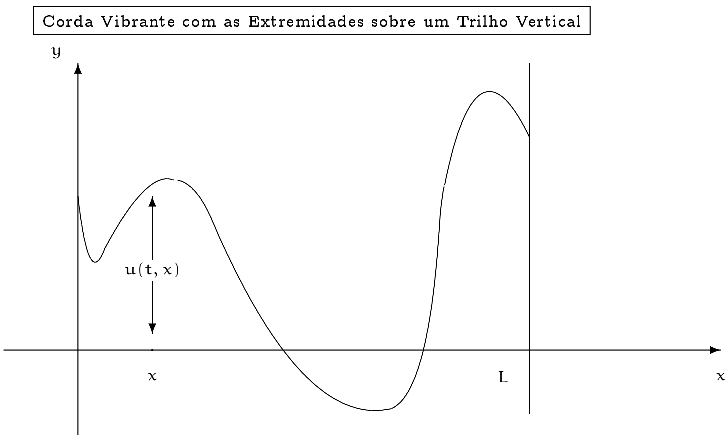
que é solução de (8.72)*,* (8.73)*,* (8.74) (8.75) *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, os coeficientes* $\underline{A_n}$ *e* $\underline{B_n}$*, são dados por* (8.98) *e* (8.99)*, respectivamente .*

Observação 8.2.1 *Pode-se mostrar que a solução, dada por* (8.97)*), acima é única na classe* (8.76).

8.2.0.2 Corda Vibrante com as Extremidades num Trilho Vertical

Podemos tratar, de modo semelhante, o problema de encontrar a posição, em cada instante, de uma corda de comprimento $\underline{L}$, que vibra num plano, cujas extremidades estão variando em um trilho vertical.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima



Se denotarmos a amplitude da vibração em cada instante $t \in [0\,,\infty)$, em cada ponto $x \in [0\,,L]$ da corda pela função $u : [0\,,\infty) \times [0\,,L] \to \mathbb{R}$ (veja a figura aciam), então um modelo matemático que está associado a esse problema é que a função $\underline{u}$ que satisfaça as seguinte condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t\,,x) = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x)\,, \quad \text{para cada} \quad [0\,,\infty)\times[0\,,L]\,, \tag{8.101}$$

$$u(0\,,x) = f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in[0\,,L]\,, \tag{8.102}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0\,,x) = g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in[0\,,L]\,, \tag{8.103}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t\,,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t\,,L) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad t\in[0\,,\infty)\,, \tag{8.104}$$

$$u\in C([0\,,\infty)\times[0\,,\pi]\,;\mathbb{R})\cap C^2((0\,,\infty)\times(0\,,\pi)\,;\mathbb{R})\,, \tag{8.105}$$

onde $\underline{c^2}$ é uma constante que está relacionada com a tensão e a densidade da corda.

A condição (8.102) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t=0$, o deslocamento do ponto $x\in[0\,,L]$ do fio é igual a $f(x)$.

A condição (8.103) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t=0$, a velocidade do deslocamento do ponto $x\in[0\,,L]$ do fio é igual a $g(x)$.

A condição (8.129) nos diz que as extremidades do fio igual estão variando em um trilho vertical, ao longo de todo o processo, isto é, para $t\in[0\,,\infty)$.

Trataremos, como anteriormente, o caso em que

$$c = 1\,.$$

O caso geral será deixado como exercício pra o leitor.

Aplicaremos o método da separação de variáveis ao problema (8.101), (8.102), (8.103), (8.129) e (8.105), isto é, tentaremos soluções de (8.101), (8.102), (8.103) e (8.129) e (8.105), do tipo

$$u(t\,,x) = \psi(t)\,\phi(x)\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x)\in[0\,,\infty)\times[0\,,L]\,, \tag{8.106}$$

onde $\psi:[0\,,\infty)\to\mathbb{R}$ e $\phi:[0\,,L]\to\mathbb{R}$.

Notemos que, supondo que as funções $\underline{\psi}$ e $\underline{\phi}$ são duas vezes diferenciáveis em $(0\,,\infty)$ e

$(0\,,L)$, respectivamente, então, para cada $(t\,,x) \in (0\,,\infty) \times (0\,,L)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t\,,x) &\overset{(8.106)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\,[\psi(t)\,\phi(x)] \\
&= \psi\,'(t)\,\phi(x)\,, \qquad (8.107)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t\,,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(t\,,x)\right] \\
&\overset{(8.107)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\,[\psi\,'(t)\,\phi(x)] \\
&= \psi\,''(t)\,\phi(x)\,, \qquad (8.108)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t\,,x) &\overset{(8.106)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\,[\psi(t)\,\phi(x)] \\
&= \psi(t)\,\phi\,'(x)\,, \qquad (8.109)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(t\,,x)\right] \\
&\overset{(8.109)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\,[\psi(t)\,\phi\,'(x)] \\
&= \psi(t)\,\phi\,''(x)\,, \qquad (8.110)
\end{aligned}$$

Substituindo (8.108) e (8.110) em (8.101), obteremos:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t\,,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x) \\
&\overset{(8.108)\text{ e }(8.110)}{=} \psi\,''(t)\,\phi(x) - \psi(t)\,\phi\,''(x)\,, \qquad (8.111)
\end{aligned}$$

para cada $(t\,,x) \in (0\,,\infty) \times (0\,,L)$.

Supondo que

$$u \neq O\,,$$

ou seja, a solução trivial não nos interessará, deveremos ter

$$\psi(t)\,,\phi(x) \neq 0\,,$$

para algum $(t\,,x) \in (0\,,\infty) \times (0\,,L)$.

Logo, dividindo (8.111), por

$$\psi(t)\,\phi(x)\,,$$

obteremos:

$$\frac{\psi\,''(t)\,\phi(x) - \psi(t)\,\phi\,''(x)}{\psi(t)\,\phi(x)} = 0$$

$$\text{ou seja,} \quad \frac{\psi\,''(t)}{\psi(t)} - \frac{\phi\,''(x)}{\phi(x)} = 0\,,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \frac{\psi\,''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi\,''(x)}{\phi(x)}\,.$$

Portanto, deveremos ter:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$$

para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, ou seja, teremos:

$$\psi''(t) = -\lambda\, \psi(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in (0, \infty)\,, \tag{8.112}$$

$$\phi''(x) = -\lambda\, \phi(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, L)\,. \tag{8.113}$$

Notemos que, para cada $t \in [0, \infty)$, de (8.108), segue:

$$\begin{aligned}
\psi(t)\, \phi'(0) &\overset{(8.109)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \\
&\overset{(8.129)}{=} 0 \\
&\overset{(8.129)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) \\
&\overset{(8.109)}{=} \psi(t)\, \phi'(L)\,.
\end{aligned} \tag{8.114}$$

Como $\psi(t) \neq 0$, para algum $t \in [0, \infty)$, (pois caso contrário, teríamos $u(t, x) = 0$, para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times \in [0, L]$), dividindo ambos os membros da identidade (8.114), por $\psi(t)$, obteremos

$$\phi'(0) = 0 = \phi'(L)\,,$$

ou seja, $\phi : [0, L] \to \mathbb{R}$, deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:

$$\phi''(x) = -\lambda\, \phi(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, L) \tag{8.115}$$

$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0\,, \tag{8.116}$$

$$\phi \in C([0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, L); \mathbb{R})\,. \tag{8.117}$$

cuja solução será, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, dada por (teremos $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$):

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi_n(x) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, L]\,.
\end{aligned} \tag{8.118}$$

A verificaçao destes fatos será diexada como exercício para o leitor.

Como no caso anterior (veja (8.91)), a solução geral da EDO (8.112) será :

$$\psi_n(t) = A\, \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\, t\right) + B\, \text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\, t\right) \tag{8.119}$$

para cada $t \in [0, \infty)$.

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a função $u_n : [0, \infty) \times [0\, L] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned}
u_n(t, x) &\doteq \psi_n(t) \phi_n(x) \\
&\overset{(8.118) \text{ e } (8.119)}{=} A_n\, \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\, t\right)\, \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\, x\right) + B_n\, \text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\, t\right)\, \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\, x\right)
\end{aligned} \tag{8.120}$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,L]$, será uam solução de (8.101) e (8.129).

Logo, formalmente, a função $u : [0\,,\infty) \times [0\,L] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} u(t\,,x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t\,,x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)\,\phi_n(x) \\ &\overset{(8.118)\text{ e }(8.119)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\ &\qquad + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \Big]\,, \end{aligned} \tag{8.121}$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty)\times[0\,L]$, será a candidata a solução para o problema dado inicialmente.

Suponnhamos que a série de funções em (8.121) seja convergente, ou seja, que a função $\underline{u}$, dada por (8.121), esteja bem definida.

Para que a função $\underline{u}$, dada por (8.121), seja solução do problema dado inicialmente, ela deverá satisfazer (8.102), ou seja:

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(8.102)}{=} u(0\,,x) \\ &\overset{t=0 \text{ em } (8.121)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \overbrace{\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,0\right)}^{=1\,,\text{ para todo } n\in\mathbb{N}} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + B_n \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,0\right)}^{=0\,,\text{ para todo } n\in\mathbb{N}} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,L]\,, \end{aligned}$$

isto é, a função $\underline{f}$ (ou melhor, sua extensão par e $2\,L$-periódica à $\mathbb{R}$) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso, uma série em cossenos), ou seja:

$$A_n \overset{(7.162)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) dx\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{8.122}$$

Por outro lado, para que a função $\underline{u}$, dada por (8.121), satisfaça a condição (8.103), deveremos ter (derivando parcialmente a série de funções , termo a termo, em relação à $\underline{t}$):

$$\begin{aligned} g(x) &\overset{(8.103)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(0\,,x) \\ &\overset{(8.121)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \right] \right\} \Bigg|_{t=0} \\ &\overset{\text{cuidado!}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \right] \right\} \Bigg|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,0\right)}^{=0\,,\text{ para todo } n\in\mathbb{N}} \frac{n\,\pi}{L} \right] \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + B_n \left[\overbrace{\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,0\right)}^{=1\,,\text{ para todo } n\in\mathbb{N}} \frac{n\,\pi}{L} \right] \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\,\pi}{L} \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,L]\,, \end{aligned}$$

isto é, a função g (ou melhor, sua extensão par e $2L$-periódica à $\mathbb{R}$) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso, uma série em cossenos), ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, deveremos ter:

$$B_n \frac{n\pi}{L} \stackrel{(7.162)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,$$

isto é,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2L}{L n\pi} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx. \end{aligned} \tag{8.123}$$

Portanto, uma candidata a solução do problema será a função $\underline{u}$, dada por:

$$u(t,x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right] \tag{8.124}$$

para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes $\underline{A_n}$ e $\underline{B_n}$ serão dados por (8.122) e (8.123), respectivamente.

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração será deixada como exercício para o leitor:

Teorema 8.2.2 *Suponhamos que* $f \in C^2([0,L];\mathbb{R})$ *e* $g \in C^1([0,L]);\mathbb{R}$ *satisfcaçam*

$$f'(0) = f'(L) = g'(0) = g'(L) = 0. \tag{8.125}$$

Então a série de funções (8.124) *converge uniformemente em* $[0,\infty) \times [0,L]$, *para uma função* $u \in C^2([0,\infty) \times [0,L];\mathbb{R})$ *que é solução de* (8.101), (8.102), (8.103), (8.129) *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *os coeficientes* $\underline{A_n}$ *e* $\underline{B_n}$ *serão dados por* (8.122) *e* (8.123), *respectivamente.*

Observação 8.2.2 *Pode-se mostrar que a solução, dada por* (8.124), *é única na classe* $C^2([0,\infty) \times [0,L];\mathbb{R})$.

Para ilustrar, temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 8.2.1 *Determine uma função* $u : [0,\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$, *que seja solução do problema:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad \textit{para cada} \quad [0,\infty) \times (0,\pi], \tag{8.126}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0,\pi], \tag{8.127}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0,\pi], \tag{8.128}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0,\infty), \tag{8.129}$$

$$u \in C([0,\infty) \times [0,\pi];\mathbb{R}) \cap C^2((0,\infty) \times (0,\pi);\mathbb{R}), \tag{8.130}$$

onde as funções $f, g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x\,, & \textit{para cada} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x\,, & \textit{para cada} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \tag{8.131}$$

$$g(x) \doteq 2\,\operatorname{sen}(3\,x) - 9\,\operatorname{sen}(5\,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, \pi]\,. \tag{8.132}$$

Resolução:

Observemos que

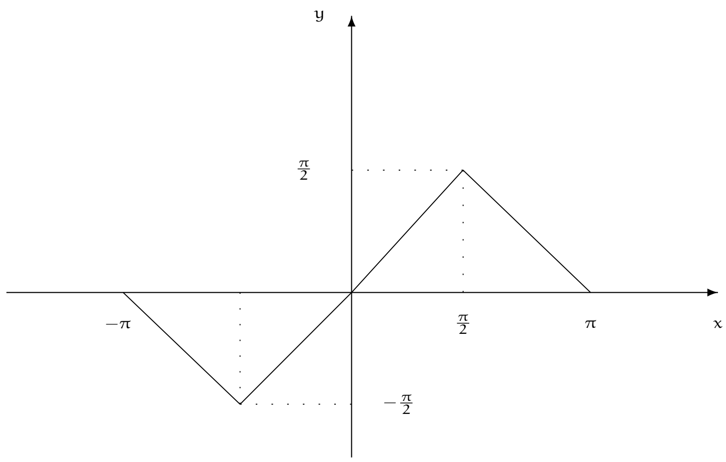
$$L = \pi\,,$$

e a extensão ímpar, $2\,\pi$-periódica da função $\underline{f}$ é a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obtida no Exemplo (8.1.1) (veja (8.52)), que é uma função que pertence à $C_{per}(2\,\pi) \cap SC^2_{per}(2\,\pi)$.

Na verdade a função $\underline{F}$ tem derivada de qualquer ordem, exceto nos pontos da forma (veja (8.53))

$$x = k\,\pi\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{F}$, no período fundamental $[\pi, \pi]$, é dada pela figura abaixo.



De modo análogo, a função $\underline{g}$, dada por (8.132), possui uma (única) extensão ímpar, $2\,\pi$-periódica à $\mathbb{R}$, que será a função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$G(x) \doteq 2\,\operatorname{sen}(3\,x) - 9\,\operatorname{sen}(5\,x) pc x \in \mathbb{R}\,, \tag{8.133}$$

(a mesma expressão da função $\underline{g}$), portanto pertencerá a$C^\infty_{per}(2\,\pi)$.

A candidata a solução do problema é dada por (8.97), ou seja:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\overset{(8.72)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right] \\ &\overset{L=\pi}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,x\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\,t) \operatorname{sen}(n\,x) + B_n \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(n\,x)] \end{aligned}$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,\pi]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes $\underline{A_n}$ e $\underline{B_n}$ serão dados por (8.98) e (8.99), respectivamente, isto é:

$$\begin{aligned}
A_n &\overset{(8.98)}{=} \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,dx \\
&\overset{L=\pi}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,x\right)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\text{sen}(n\,x)\,dx \\
&\overset{(8.59)}{=} \begin{cases} A_{2\,n} = \dfrac{[-2-(-1)^n]}{n} \\ A_{2\,n+1} = \dfrac{4}{n} \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,
\end{aligned} \tag{8.134}$$

$$B_n = \begin{cases} 2\,, & \text{para cada} \quad n = 3 \\ -9\,, & \text{para cada} \quad n = 5 \\ 0\,, & \text{para cada} \quad n \neq 3\,,5 \end{cases} \tag{8.135}$$

pois a extensão ímpar, $2\,\pi$-periódica da função $\underline{g}$ já está representada por sua série de Fourier, com $L = \pi$.

Portanto, a candidata a solução do problema será dada por:

$$\begin{aligned}
u(t\,,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\,\cos(n\,t)\,\text{sen}(n\,x) + B_n\,\text{sen}(n\,t)\,\text{sen}(n\,x)\right] \\
&\overset{(8.134)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2\,n}\,\cos(2\,n\,t)\,\text{sen}(2\,n\,x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2\,n+1}\,\cos[(2\,n+1)\,t]\,\text{sen}[(2\,n+1)\,x] \\
&\quad + B_3\,\text{sen}(3\,t)\,\text{sen}(3\,x) + B_5\,\text{sen}(5\,t)\,\text{sen}(5\,x) \\
&\overset{(8.134)\text{ e }(8.135)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[-2-(-1)^n]}{n}\cos(2\,nt)\,\text{sen}(2\,n\,x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\cos[(2\,n+1)\,t]\,\text{sen}[(2\,n+1)\,x] \\
&\quad + 2\,\text{sen}(3\,t)\,\text{sen}(3\,x) - 9\,\text{sen}(5\,t)\,\text{sen}(5\,x)
\end{aligned} \tag{8.136}$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,\pi]$.

□

Observação 8.2.3 *Pode-se mostrar que a função $\underline{u}$, dada por (8.136), satisfaz nosso problema, exceto sobre os segmentos de retas:*

$$x + t = \frac{\pi}{2} \quad e \quad x - t = \frac{\pi}{2}.$$

Ao longo desses segmentos de retas a função $\underline{u}$ não será diferenciável.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

*Vale observar que não podemos aplicar o Teorema (8.2.1), pois a função $\underline{f}$ **não** satisfaz as hipótese (ela não é duas vezes continuamente diferenciável em $[0\,,\pi]$).*

Exercício 8.2.2 *Determine uma função* $u : [0\,,\infty) \times [0\,,\pi] \to \mathbb{R}$*, que seja solução do problema:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t\,,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad (0\,,\infty) \times [0\,,\pi]\,, \tag{8.137}$$

$$u(0\,,x) = x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,\pi]\,, \tag{8.138}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0\,,x) = \cos(3\,x) - \cos(5\,x) + \cos(6\,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,\pi]\,, \tag{8.139}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t\,,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t\,,\pi) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0\,,\infty)\,, \tag{8.140}$$

$$u \in C^1([0\,,\infty) \times [0\,,\pi]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,\infty) \times (0\,,\pi)\,;\mathbb{R})\,. \tag{8.141}$$

Resolução:

Observemos que

$$L = \pi\,.$$

Neste caso, temos que as funções $f\,,g : [0\,\pi] \to \mathbb{R}$ serão dadas por

$$f(x) \doteq x\,, \tag{8.142}$$

$$g(x) \doteq \cos(3\,x) - \cos(5\,x) + \cos(6\,x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,\pi]\,. \tag{8.143}$$

Como no Exemplo (8.1.1), considerando a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a extensão par $2\,\pi$-periódica da função $\underline{f}$ à $\mathbb{R}$, teremos que a função $\underline{F}$ será contínua em $\mathbb{R}$, mas não será diferenciável nos pontos

$$x = k\,\pi\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

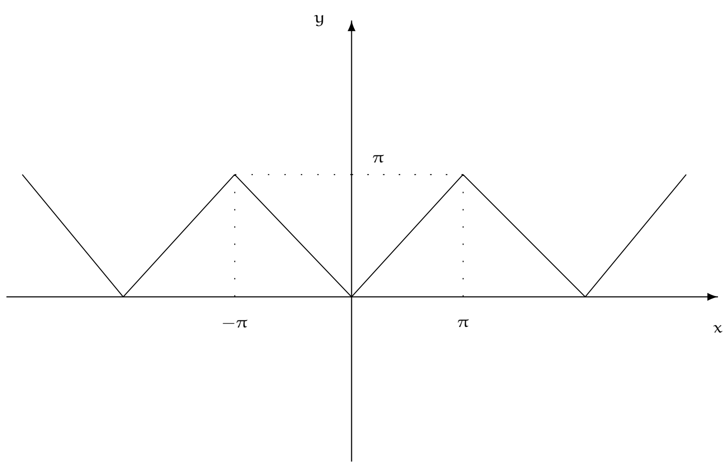
Como vimos em (8.66), a função $\underline{F}$, será dada por:

$$F(x) \doteq |x|\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-\pi\,,\pi]\,, \tag{8.144}$$

satisfazendo

$$F(x + 2\,\pi) = F(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

A representaçao geométrica do gráfico da função $\underline{F}$ é dada pela figura abaixo.



Observemos que a extensão par, 2π-periódica da função $\underline{g}$ à $\mathbb{R}$, será a função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$G(x) \doteq \cos(3\,x) - \cos(5\,x) + \cos(6\,x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{8.145}$$

Notemos que é a mesma expressão que define a função $\underline{g}$.

Uma candidata a solução do problema acima, será dada por (8.124), ou seja:

$$\begin{aligned}
u(t\,,x) &\overset{(8.124)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right)\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{L}\,t\right)\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\right] \\
&\overset{L=\pi}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,t\right)\cos\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,x\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,t\right)\cos\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,x\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(n\,t)\cos(n\,x) + B_n \operatorname{sen}(n\,t)\cos(n\,x)\right] \qquad (8.146)
\end{aligned}$$

para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0\,,\pi]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes $\underline{A_n}$ e $\underline{B_n}$, são dados por (8.122) e (8.123), respectivamente, ou seja:

$$\begin{aligned}
A_n &\overset{(8.122)}{=} \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right) \\
&\overset{L=\pi}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi}{\pi}\,x\right)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx \\
&\overset{(8.70)}{=} \frac{2\,[(-1)^n - 1]}{n^2\,\pi} \qquad (8.147)
\end{aligned}$$

$$B_n = \begin{cases} 1\,, & \text{para cada} \quad n = 3 \\ -1\,, & \text{para cada} \quad n = 5 \\ 1\,, & \text{para cada} \quad n = 6 \\ 0\,, & \text{para cada} \quad n \neq 3\,,5\,,6 \end{cases}\,. \tag{8.148}$$

pois a extensão ímpar, $2\,\pi$-periódica da função $\underline{g}$ já está representada por sua série de Fourier, com $L = \pi$.

Portanto, a candidata a solução do problema será dada por:

$$\begin{aligned}
u(t\,,x) &\overset{(8.146)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(n\,t)\cos(n\,x) + B_n \operatorname{sen}(n\,t)\cos(n\,x)\right] \\
&\overset{(8.147)\text{ e }(8.148)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,[(-1)^n - 1]}{n^2\,\pi}\cos(n\,t)\cos(n\,x) \\
&\qquad + \operatorname{sen}(3\,t)\cos(3\,x) - \operatorname{sen}(5\,t)\cos(5\,x) + \operatorname{sen}(6\,t)\cos(6\,x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2\,n+1)^2\,\pi}\cos[(2\,n+1)\,n\,t]\cos[(2\,n+1)\,n\,x] \\
&\qquad + \operatorname{sen}(3\,t)\cos(3\,x) - \operatorname{sen}(5\,t)\cos(5\,x) + \operatorname{sen}(6\,t)\cos(6\,x) \qquad (8.149)
\end{aligned}$$

para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,\pi]$

$\square$

Observação 8.2.4 *Pode-se mostrar que a função* $\underline{u}$*, dada por (8.149), satisfaz nosso problema, exceto sobre os segmentos de retas:*

$$x + t = 0 \quad e \quad x - t = \pi.$$

Ao longo desses segmentos de retas a função $\underline{u}$*, dada por (8.149),* **não** *será diferenciável.*

A verificação destes fatos será deixada como exercíçio para o leitor.

Vale observar que **não** *podemos aplicar o Teorema (8.2.2), pois a função* $\underline{f}$ *não satisfaz as hipótese (ela não é duas vezes continuamente diferenciável em* $[0,\pi]$*).*

8.3 A Equação de Laplace

O último problema que trataremos associado estará associado a uma EDP importante denominada **Equação de Laplace**.

Esta EDP é um exemplo importante de uma classe de EDP's denominadas **Elípticas**.

Trataremos de dois problemas relacionados a Equação de Laplace, a saber: o problema de Dirichlet em um retângulo e em u círculo contidos em $\mathbb{R}^2$.

8.3.0.3 O Problema de Dirichlet num Retângulo

Esse problema consiste em encontrar uma função $u : [a,A] \times [b,B] \to \mathbb{R}$ que venha satisfazer as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \text{para cada} \quad (x,y) \in (a,A) \times (b,B), \tag{8.150}$$

$$u(A,y) = f_1(y), \quad \text{para cada} \quad y \in [b,B], \tag{8.151}$$

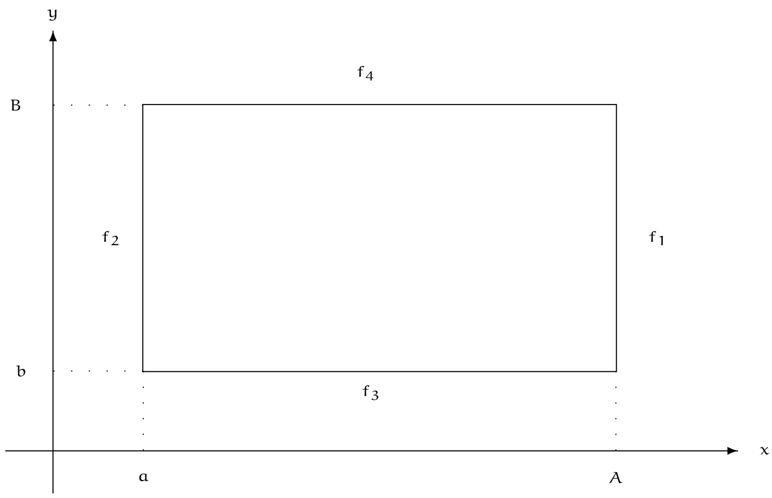
$$u(a,y) = f_2(y), \quad \text{para cada} \quad y \in [b,B], \tag{8.152}$$

$$u(x,b) = f_3(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [a,A], \tag{8.153}$$

$$u(x,B) = f_4(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [a,A], \tag{8.154}$$

$$u \in C([a,A] \times [b,B]; \mathbb{R}) \cap C^2((a,A) \times (b,B); \mathbb{R}). \tag{8.155}$$

A figura abaixo ilustra as condições (8.151), (8.152), (8.154), (8.153), no retângulo $\subseteq \mathbb{R}^2$.



Observação 8.3.1 *Se o conjunto* Ω *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$ *o operador linear* $\Delta : C^\infty(\Omega\,;\mathbb{R}) \to C^\infty(\Omega\,;\mathbb{R})$*, dada por*

$$(\Delta\, h)\,(x\,,y) \doteq \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x\,,y)\,, \tag{8.156}$$

para cada $(x\,,y) \in \Omega$*, como* $h \in C^\infty(\Omega\,;\mathbb{R})$*, será denominado* **operador Laplaciano, em** $\underline{\Omega}$.

Vamos considerar o caso em que

$$a = b = 0\,,$$

o problema de encontrar uma função $u : [0\,,A] \times [0\,,B] \to \mathbb{R}$ que venha satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x\,,y) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in (0\,,A) \times (0\,,B)\,,\\
&u(A\,,y) = f_1(y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in [0\,,B]\,,\\
&u(a\,,y) = f_2(y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in [0\,,B]\,,\\
&u(x\,,b) = f_3(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,A]\,,\\
&u(x\,,B) = f_4(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,A]\,,\\
&u \in C([0\,,A] \times [0\,,B]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,A) \times (0\,,B)\,;\mathbb{R})\,.
\end{aligned}$$

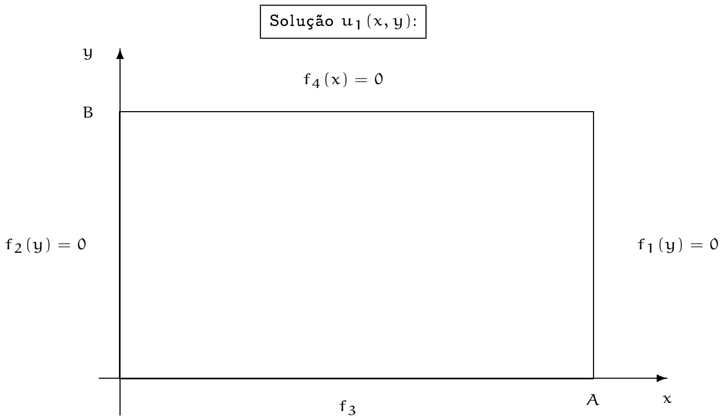
O caso geral será deixado como exercício para o leitor, bastando fazer uma translação especial.

Além disso, consideraremos o caso em que

$$f_1(y) = f_2(y) \doteq 0\,, \quad \text{para cada} \quad y \in [0\,,B] \tag{8.157}$$

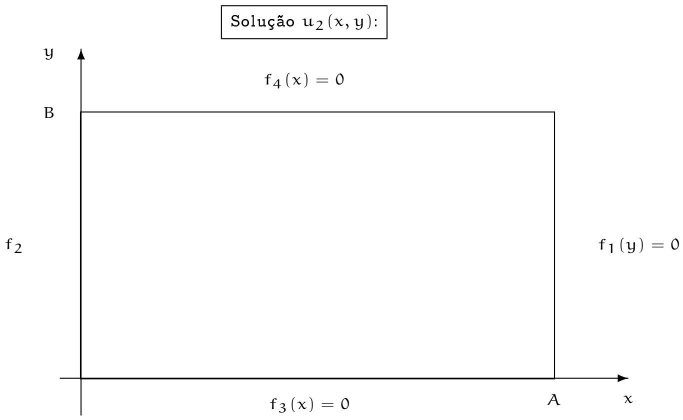
$$f_4(x) \doteq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,A]\,. \tag{8.158}$$

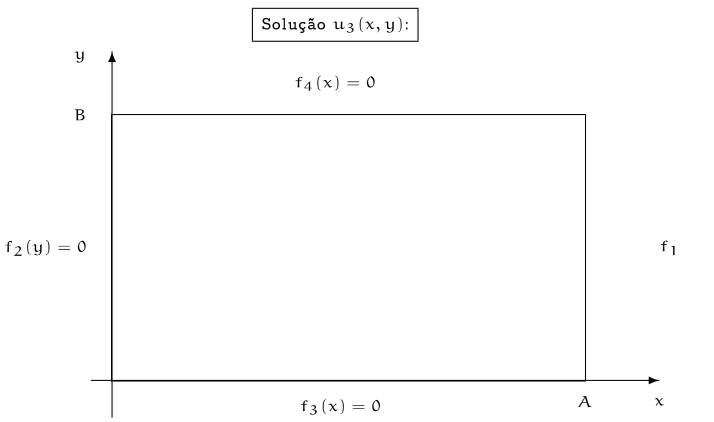
A figura abaixo ilustra as restrições acima para as condições (8.151), (8.152), (8.154), (8.153), no retângulo de $\mathbb{R}^2$.

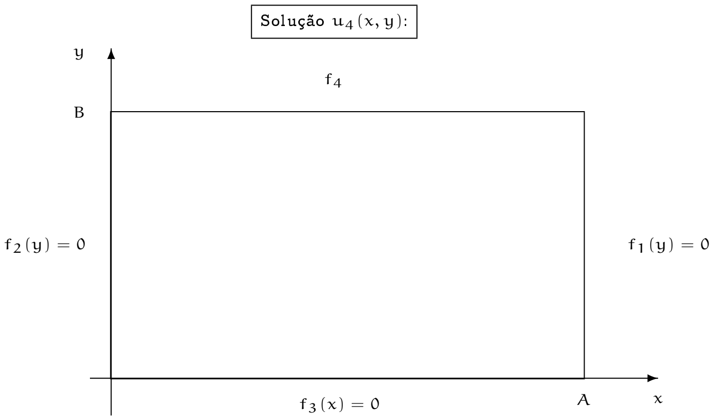


Suponhamos que saibamos encontrar uma função $u = u(x, y)$, definida em $\Omega \doteq [a, A] \times [b, B]$, satisfazendo as condições (8.150), (8.151),(8.152), (8.154) e (8.155), com as funções $\underline{f_1}$, $\underline{f_2}$, sastisfazendo (8.157) e a função $\underline{f_4}$ satisfazendo (8.158).

Com isto poderemos obter a solução do problema que iniciamos (com $a = b = 0$), somando-se as soluções de cada um dos problemas abaixo.







ou seja, a a função $u : [0, A] \times [0, B] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$u(x, y) \doteq u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y),$$

para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$, será a solução do problema (8.150), (8.151),(8.152), (8.154) e (8.155) que iniciamos (com $a = b = 0$).

Assim basta tratar do problema de encontrar uma função $u_1 : [0, A] \times [0, B] \to \mathbb{R}$, que venha satisfaz as seguinte condições:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in (0, A) \times (0, B),\\
&u_1(A, y) = 0, \quad \text{para cada} \quad y \in [0, B],\\
&u_1(a, y) = 0), \quad \text{para cada} \quad y \in [0, B],\\
&u_1(x, b) = f_3(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [0, A],\\
&u_1(x, B) = 0, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, A],\\
&u_1 \in C([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, A) \times (0, B); \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

ou seja, simplificando a notação, encontrar uma função $u : [0, A] \times [0, B] \to \mathbb{R}$, que venha satisfaz as seguinte condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in (0, A) \times (0, B), \tag{8.159}$$

$$u(0, y) = u(A, y) = 0, \quad \text{para cada} \quad y \in [0, B], \tag{8.160}$$

$$u(x, B) = 0, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, A], \tag{8.161}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [0, A], \tag{8.162}$$

$$u \in C([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, A) \times (0, B); \mathbb{R}). \tag{8.163}$$

Observemos que, de (8.160), com $y = 0$ e $y = B$, e (8.162), com $x = 0$ e $x = A$, teremos que a função $\underline{f}$ deverá satisfazer às seguintes restrições (condições de compatibilidade):

$$\begin{aligned}
f(0) &\overset{(8.162),\ \text{com } x=0}{=} u(0, 0)\\
&\overset{(8.160),\ \text{com } y=0}{=} 0,\\
f(A) &\overset{(8.162),\ \text{com } x=A}{=} u(A, 0)\\
&\overset{(8.160),\ \text{com } y=0}{=} 0
\end{aligned}$$

Tentaremos encontrar uma função $u = u(x, y)$ que satisfaça (8.159), (8.160), (8.161) e (8.163), do tipo variáveis separadas (aplicaremos, novamente, o método da separação de variáveis), ou seja, tentaremos encontrar uma solução $u = u(x, y)$, do tipo:

$$u(x, y) \doteq \psi(x)\,\phi(y)\,, \tag{8.164}$$

para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Estaremos procurando soluções $\underline{u}$ não nulas, isto é, de modo que

$$u \neq O\,. \tag{8.165}$$

Notemos que, supondo que as funções $\underline{\psi}$ e $\underline{\phi}$ são duas vezes diferenciáveis em $(0, A)$ e $(0, B)$, respectivamente, então, para cada $(x, y) \in (0, A) \times (0, B)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &\overset{(8.164)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[\psi(x)\,\phi(y)] \\
&= \psi'(x)\,\phi(y)\,, \qquad (8.166)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right] \\
&\overset{(8.166)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[\psi'(x)\,\phi(y)] \\
&= \psi''(x)\,\phi(y)\,, \qquad (8.167)\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &\overset{(8.164)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[\psi(x)\,\phi(y)] \\
&= \psi(t)\,\phi'(y)\,, \qquad (8.168)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(8.168)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[\psi(x)\,\phi'(y)] \\
&= \psi(x)\,\phi''(y)\,, \qquad (8.169)
\end{aligned}$$

Substituindo (8.167) e (8.169) na EDP (8.159), para $(x, y) \in (0, A) \times (0, B)$, teremos que:

$$\begin{aligned}
&\psi''(x)\,\phi(y) + \psi(x)\,\phi''(y) = 0 \\
\text{ou seja,}\quad &\psi''(x)\,\phi(y) = -\psi(x)\,\phi''(y) \qquad (8.170)
\end{aligned}$$

Como (8.165), deveremos ter

$$\psi(x)\,, \phi(y) \neq 0\,,$$

para algum $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Logo, dividindo (8.170), por

$$\psi(x)\,\phi(y)\,,$$

obteremos:

$$\frac{\psi''(x)\,\phi(y)}{\psi(x)\,\phi(y)} = -\frac{\psi(x)\,\phi''(y)}{\psi(x)\,\phi(y)}$$

$$\text{isto é,}\quad \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\frac{\phi''(y)}{\phi(y)} = \text{constante} \doteq \lambda\,,$$

para cada $(x\,,y) \in (0\,,A) \times (0\,,B)$, ou seja, teremos as seguintes duas EDO's:

$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x)\,,\quad \text{para cada} \quad x \in (0\,,A)\,, \tag{8.171}$$

$$\psi''(y) = \lambda\,\psi(y)\,,\quad \text{para cada} \quad y \in (0\,,B)\,. \tag{8.172}$$

Além disso, deveremos ter:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(8.160)}{=} u(0\,,y) \\ &\overset{(8.164)}{=} \phi(0)\,,\psi(y)\,, \end{aligned}$$

$$\psi(y) \neq 0 \text{ para algum } y \in [0\,,B]\,,\ \text{implicará:}\quad \phi(0) = 0\,, \tag{8.173}$$

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(8.160)}{=} u(A\,,y) \\ &\overset{(8.164)}{=} \phi(A)\,,\psi(y)\,, \end{aligned}$$

$$\psi(y) \neq 0 \text{ para algum } y \in [0\,,B]\,,\ \text{implicará:}\quad \phi(A) = 0\,, \tag{8.174}$$

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(8.161)}{=} u(x\,,B) \\ &=\overset{(8.164)}{=} \phi(x)\,\psi(B) \end{aligned}$$

$$\phi(x) \neq 0 \text{ para algum } x \in [0\,,A]\,,\ \text{implicará:}\quad \psi(B) = 0\,. \tag{8.175}$$

Logo, de (8.171), (8.172), (8.173), (8.174), (8.175), as funções $\phi : [0\,,A] \to \mathbb{R}$ e $\psi : [0\,,B] \to \mathbb{R}$ deverão satisfazer as seguintes condições:

$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x)\,,\quad \text{para cada} \quad x \in (0\,,A)\,, \tag{8.176}$$

$$\phi(0) = \phi(A) = 0\,, \tag{8.177}$$

$$\phi \in C([0\,,A]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,A)\,;\mathbb{R}) \tag{8.178}$$

e

$$\psi''(y) = \lambda\,\psi(y)\,,\quad \text{para cada} \quad y \in (0\,,B)\,, \tag{8.179}$$

$$\psi(B) = 0\,, \tag{8.180}$$

$$\psi \in C([0\,,B]\,;\mathbb{R}) \cap C^2((0\,,B)\,;\mathbb{R})\,. \tag{8.181}$$

Encontrar uma solução para o problema (8.176), (8.177) e (8.178) foi tratado anteriormente (veja (7.21), (7.22) e (7.23), ou ainda, (7.38), com $L \doteq A$), para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_n &\doteq \frac{n^2\,\pi^2}{A^2}\,, \\ \phi(x) = \phi_n(x) &\doteq \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right)\,,\quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,A]\,. \end{aligned} \tag{8.182}$$

Assim, o problema (8.179), (8.180) e (8.181), tornar-se-á:

$$\psi''(y) = \frac{n^2\pi^2}{A^2}\psi(y), \quad \text{para cada} \quad y \in (0, B), \tag{8.183}$$

$$\psi(B) = 0, \tag{8.184}$$

$$\psi \in C([0, B]; \ \mathbb{R}) \cap C^2((0, B); \mathbb{R}). \tag{8.185}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a solução geral da EDO (8.183), será:

$$\psi_n(y) \doteq C\, e^{\frac{n\pi}{A} y} + D\, e^{-\frac{n\pi}{A} y}, \quad \text{para cada} \quad y \in [0, B]. \tag{8.186}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto na disciplina de EDO).

Como

$$\begin{aligned}
0 &\overset{(8.184)}{=} \psi(B) \\
&\overset{(8.186),\ \text{com}\ y=B}{=} C\, e^{\frac{n\pi}{A} B} + D\, e^{-\frac{n\pi}{A} B} \\
\text{ou seja,} \quad C\, e^{\frac{n\pi}{A} B} &= -D\, e^{-\frac{n\pi}{A} B}, \\
\text{ou ainda,} \quad C &= -D\, e^{-\frac{2n\pi B}{A}}.
\end{aligned} \tag{8.187}$$

Substituindo (8.187) em (8.186), obteremos:

$$\begin{aligned}
\psi_n(y) &= -D\, e^{-\frac{2n\pi B}{A}}\, e^{\frac{n\pi}{A} y} + D\, e^{-\frac{n\pi}{A} y} \\
&= -D\, e^{-\frac{n\pi B}{A}} \left[e^{\frac{n\pi}{A}(y-B)} - e^{-\frac{n\pi}{A}(y-B)} \right] \\
&= -2, D\, e^{-\frac{n\pi B}{A}} \frac{\left[e^{\frac{n\pi}{A}(y-B)} - e^{-\frac{n\pi}{A}(y-B)} \right]}{2} \\
&= -2D\, e^{-\frac{n\pi B}{A}} \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{A}(y-B)\right], \quad \text{para cada} \quad y \in [0, B],
\end{aligned}$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\psi : [0, B] \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$\psi_n(y) \doteq e^{-\frac{n\pi B}{A}} \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{A}(y-B)\right], \quad \text{para cada} \quad y \in [0, B]. \tag{8.188}$$

Logo, de (8.182) e (8.188), segue que

$$\begin{aligned}
u_n(x, y) &\overset{(8.164)}{=} \phi_n(x)\, \psi_n(y) \\
&\overset{(8.182)\ \text{e}\ (8.188)}{=} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{A} x\right) \right\} \left\{ e^{-\frac{n\pi B}{A}} \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{A}(y-B)\right] \right\} \\
&= e^{-\frac{n\pi B}{A}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{A} x\right) \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{A}(y-B)\right],
\end{aligned} \tag{8.189}$$

para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Consideremos, formalmente, a solução do nosso problema, como sendo $u : [0\,,A] \times [0\,,B] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} u(x\,,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x\,,y) \\ &\overset{(8.164)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x)\,\psi_n(y) \\ &\overset{(8.189)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n\,\pi}{A}\,B} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right) \operatorname{senh}\left[\frac{n\,\pi}{A}\,(y-B)\right], \end{aligned} \tag{8.190}$$

para cada $(x\,,y) \in [0\,,A] \times [0\,,B]$.

Notemos que, impondo a condição (8.162), obteremos:

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{(8.162)}{=} u(x\,,0) \\ &\overset{(8.190),\text{ com } y=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n\,\pi\,B}{A}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right) \underbrace{\operatorname{senh}\left[\frac{n\,\pi}{A}\,(0-B)\right]}_{=\operatorname{senh}\left[-\frac{n\,\pi}{A}\,B\right] \overset{\text{senh é ímpar}}{=} -\operatorname{senh}\left[\frac{n\,\pi}{A}\,B\right]} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{n\,\pi\,B}{A}} \left[-\operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,B}{A}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-b_n)\, e^{-\frac{n\,\pi\,B}{A}} \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,B}{A}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right), \end{aligned}$$

para cada $x \in [0\,,A]$, ou seja, a extensão, que indicaremos por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ímpar e $2\,A$-periódica da função $\underline{f}$ à $\mathbb{R}$, deverá possuir uma representação em série de Fourier (no caso uma série em senos).

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, deveremos ter:

$$-b_n\, e^{-\frac{n\,\pi\,B}{A}} \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,B}{A}\right) \overset{(7.165),\text{ com } L \doteq A}{=} \frac{2}{A} \int_0^A f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right) dx\,,$$

ou seja,

$$b_n = -\frac{2\,e^{\frac{n\,\pi\,B}{A}}}{A \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,B}{A}\right)} \int_0^A f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right) dx\,. \tag{8.191}$$

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração será deixada como exercício para o leitor:

Teorema 8.3.1 *Suponhamos que* $f \in C^2([0\,,A]\,;\mathbb{R})$ *satisfazendo*

$$f(0) = f(A) = f''(0) = f''(A) = 0\,. \tag{8.192}$$

Então a série de funções (8.190) *converge uniformemente em* $[0\,,A] \times [0\,,B]$ *para uma função* $u \in C^2([0\,,A] \times [0\,,B]\,;\mathbb{R})$*, que é solução de* (8.159), (8.160), (8.161), (8.162) *e* (8.163) *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, o coeficiente* $\underline{b_n}$*, será dado por* (8.191).

Observação 8.3.2 *Pode-se mostrar que a função* $\underline{u}$*, dada por* (8.190)*, é a única solução do problema acima.*

8.3.0.4 O Problema de Dirichlet num Círculo

Para $R \in (0\,,\infty)$ fixado, este problema consiste em encontrar aum função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, que satisfazas seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x\,,y) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \Omega\,, \tag{8.193}$$

$$u_{\partial\Omega} = f\,, \tag{8.194}$$

$$u \in C\left(\overline{\Omega}\,;\mathbb{R}\right) \cap C^2\left(\Omega\,;\mathbb{R}\right)\,, \tag{8.195}$$

onde

$$\Omega \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 = R^2\right\}\,, \tag{8.196}$$

$$\overline{\Omega} \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}\,, \tag{8.197}$$

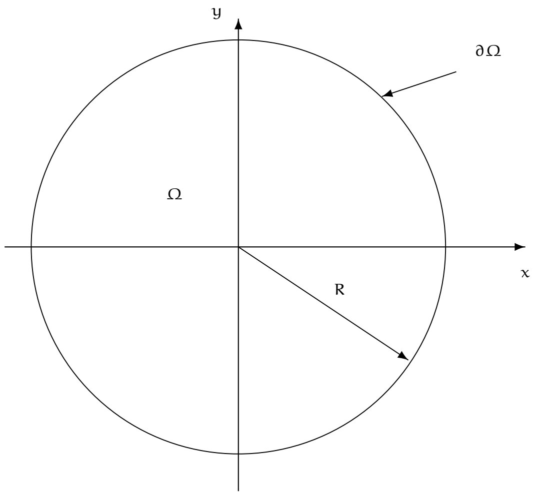
ou seja, o fecho do conjunto $\underline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^2$, e

$$\partial\Omega \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 < R^2\right\} \tag{8.198}$$

isto é, a fronteria do conjunto $\underline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^2$.

Notemos que o conjunto $\underline{\Omega}$ é o interior da circunferência de de centro no ponto $(0\,,0)$ e raio $\underline{R}$ e $\underline{\partial\Omega}$ é a circunferência de centro no ponto $(0\,,0)$ e raio $\underline{R}$.

A figura abaixo nos fornede a representação geométrica do gráfico dos conjuntos $\underline{\Omega}$ e $\underline{\partial\Omega}$



Vamos tratar, com detalhes, o caso em que

$$R = 1\,.$$

O caso geral, isto é, $R \neq 1$, pode ser obtido de modo semelhante e será deixado como exercício para o leitor.

Neste caso podemos descrever o círculo $\overline{\Omega}$, dado por (8.197), em coordenadas polares, utilizando a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= x(r\,,\theta) \\ &\doteq r\,\cos(\theta)\,, \end{aligned} \tag{8.199}$$

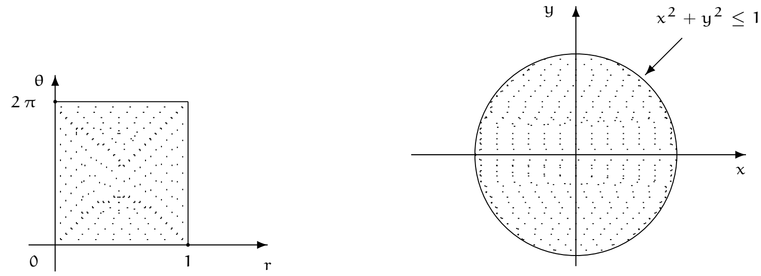
$$\begin{aligned} y &= y(r\,,\theta) \\ &\doteq r\,\text{sen}(\theta)\,, \end{aligned} \tag{8.200}$$

para cada $(r\,,\theta) \in [0\,,1] \times [0\,,2\pi)$.

A figura abaixo ilustra o que a transformação $T : [0\,,1] \times [0\,,2\,\pi) \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(x\,,y) \doteq (r\,\cos(\theta)\,,r\,\operatorname{sen}(\theta))\,, \tag{8.201}$$

para cada $(r\,,\theta) \in [0\,,1] \times [0\,,2\,\pi)$, faz com a região $[0\,,1] \times [0\,,2\pi)$.



Notemos que, neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\overset{(8.199)\text{ e }(8.200)}{=} [r\,\cos(\theta)]^2 + [r\,\operatorname{sen}(\theta)]^2 \\ &= r^2\,\left[\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)\right] \\ &= r^2\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,}\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{8.202}$$

Notemos também que se $x \neq 0$ e $y = 0$ e , teremos que

$$\theta = \frac{\pi}{2}\,. \tag{8.203}$$

Por outro lado, se $y \neq 0$, de (8.202), teremos que $r > 0$ e, além disso,

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &\overset{(8.199)\text{ e }(8.200)}{=} \frac{r\,\operatorname{sen}(\theta)}{r\,\cos(\theta)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &\operatorname{tg}(\theta)\,. \end{aligned} \tag{8.204}$$

Portanto, de (8.202), (8.203) e (8.204), segue que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{8.205}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)\,, & \text{para } y \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\,, & \text{para } y = 0 \end{cases}\,. \tag{8.206}$$

Definamos a função $v : [0\,,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} v(r\,,\theta) &\doteq u\,[T(x\,,y)] \\ &\overset{(8.201)}{=} u[x(r\,,\theta)\,,y(r\,,\theta)] \\ &\overset{(8.199)\text{ e }(8.200)}{=} u\,[r\,\cos(\theta)\,,r\,\operatorname{sen}(\theta)]\,, \end{aligned} \tag{8.207}$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Observemos que, como a transformação $\underline{T}$ pertence a $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$, segue que

$$u \in C\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}\right) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R})$$

se, e somente se

$$v \in C([0, 1] \times [0, 2\pi); \mathbb{R}) \cap C^2([0, 1) \times [0, 2\pi); \mathbb{R}) \ .$$

Notemos também que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &\overset{(8.199)}{=} \frac{\partial}{\partial r}[r\cos(\theta)] \\
&= \cos(\theta)\,, && (8.208)\\
\frac{\partial x}{\partial \theta} &\overset{(8.199)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}[r\cos(\theta)] \\
&= r\,[-\operatorname{sen}(\theta)] \\
&= -r\operatorname{sen}(\theta)\,, && (8.209)\\
\frac{\partial y}{\partial r} &\overset{(8.200)}{=} \frac{\partial}{\partial r}[r\operatorname{sen}(\theta)] \\
&= \operatorname{sen}(\theta)\,, && (8.210)\\
\frac{\partial y}{\partial \theta} &\overset{(8.200)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}[r\operatorname{sen}(\theta)] \\
&= r\cos(\theta)\,, && (8.211)
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação nos cálculo abaixo, denoteremos

$$x(r, \theta) = x \quad \text{e} \quad y(r, \theta) = y\,.$$

Utilizando-se da Regra da Cadeia, para funções reais de duas variáveis reais, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right](r, \theta) \\
&\overset{(8.208)\text{ e }(8.210)}{=} \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) && (8.212)\\
\frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right](r, \theta) \\
&\overset{(8.209)\text{ e }(8.211)}{=} -r\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + r\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) && (8.213)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\right]\\
&\overset{(8.212)}{=} \frac{\partial}{\partial r}\left[\cos(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x}[x(r,\theta),y(r,\theta)] + \operatorname{sen}(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial y}[x(r,\theta),y(r,\theta)]\right]\\
&= \cos(\theta)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial r}\right](r,\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\,\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial r}\right](r,\theta)\\
&\overset{(8.208)\text{ e }(8.210)}{=} \cos(\theta)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\,\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}(x,y)\,\operatorname{sen}(\theta)\right]\\
&\quad + \operatorname{sen}(\theta)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}(x,y),\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,,y)\,\operatorname{sen}(\theta)\right]\\
&\overset{\text{Teor. Schwarz: } \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}{=} \cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\,\operatorname{sen}(\theta)\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}(x\,y)\\
&\quad + \operatorname{sen}^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\,,
\end{aligned}
\tag{8.214}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta)&\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\right]\\
&\overset{(8.213)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-r\,\operatorname{sen}(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x} + r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right](r,\theta)\\
&= \left\{-r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x} - r\,\operatorname{sen}(\theta)\,\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial \theta}\right]\right\}(r,\theta)\\
&\quad + \left\{-r\,\operatorname{sen}(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial y} + r\,\cos(\theta)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial \theta}\right]\right\}(r,\theta)\\
&\overset{(8.209)\text{ e }(8.211)}{=} \left\{-r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - r\operatorname{sen}(\theta)\,\left[[-r\,\operatorname{sen}(\theta)]\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+[r\,\cos(\theta)]\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}(x,y)\right]\right\}\\
&\quad + \left\{-r\,\operatorname{sen}(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + r\,\cos(\theta)\,\left[[-r\,\operatorname{sen}(\theta)]\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(x,y)\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right]\right\}\\
&= -r\cos(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - r\,\operatorname{sen}(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + r^2\,\operatorname{sen}^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\\
&\quad - r^2\,\operatorname{sen}(\theta)\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}(x,,y)\\
&\quad - r^2\,\cos(\theta)\,\operatorname{sen}(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(x,y) + r^2\,\cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\\
&\overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} -r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - r\,\operatorname{sen}(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + r^2\,\operatorname{sen}^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\\
&\quad - 2\,r^2\,\operatorname{sen}(\theta)\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}(x,y) + r^2\,\cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\,,
\end{aligned}
\tag{8.215}
$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$.

Logo a função $u = u(x, y)$ será solução da equação de Laplace (8.193) em $\underline{\Omega}$ (o interior da circunferência unitária, centrada na origem de $\mathbb{R}^2$) se, e somente se, a função $v = v(r, \theta)$ satisfaz

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) &\overset{(8.214),(8.212),(8.215)}{=} \cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x}(x, y) \\
&\quad + 2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}(x, y) + \mathrm{sen}^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})(x, y) \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\cos(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \mathrm{sen}(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left[-r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)\right. \\
&\qquad \left. -2\,r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}(x, y) + r^2\,\cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)\right] \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \overset{(8.193)}{=} 0\,,
\end{aligned}
$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$.

Além disso a condição (8.194)) tornar-se-á:

$$
\begin{aligned}
v(1, \theta) &\overset{(8.207)}{=} u[x(1, \theta), y(1, \theta)] \\
&\overset{(8.199)\,\text{e}\,(8.200)}{=} u[\cos(\theta)\,, \mathrm{sen}(\theta)] \\
&\overset{(8.194)}{=} f[\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta)]\,,
\end{aligned}
\tag{8.216}
$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$.

Logo definido-se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$
g(\theta) \doteq f[\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta)]\,, \quad \text{para cada} \quad \theta \in \mathbb{R}\,,
\tag{8.217}
$$

logo a condição (8.216) pode ser reescrita como

$$
v(1, \theta) = g(\theta)\,, \quad \text{para cada} \quad \theta \in \mathbb{R}\,.
\tag{8.218}
$$

Observemos que, para cada $r \in [0, 1)$ fixado, a função

$$
\theta \mapsto v(r, \theta)
$$

é 2π-periódica em $\mathbb{R}$.

De fato, pois

$$
\begin{aligned}
v(r, \theta + 2\pi) &\overset{(8.207)}{=} u\,[r\,\cos(\theta + 2\pi)\,, r\,\mathrm{sen}(\theta + 2\pi)] \\
&= u\,[r\,\cos(\theta)\,, r\,\mathrm{sen}(\theta)] \\
&\overset{(8.207)}{=} v(r, \theta)
\end{aligned}
$$

para cada $(r\,,\theta) \in [0\,,1) \times \mathbb{R}$.

Portanto a função $v = v(r\,,\theta)$ deverá satisfazer as seguintes condições:

$$r^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r\,,\theta) + r\,\frac{\partial v}{\partial r}(r\,,\theta) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r\,,\theta) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad (r\,,\theta) \in [0\,,1) \times \mathbb{R}\,, \tag{8.219}$$

$$v(r\,,\theta + 2\,\pi) = v(r\,,\theta)\,, \quad \text{para cada} \quad (r\,,\theta) \in [0\,,1) \times \mathbb{R}\,, \tag{8.220}$$

$$v(1\,,\theta) = g(\theta)\,, \quad \text{para cada} \quad \theta \in [0\,,2\,\pi)\,, \tag{8.221}$$

$$v \in C[0\,,1] \times \mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \cap C^2([0\,,1) \times \mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,. \tag{8.222}$$

Tentaremos solução não triviais, isto é,

$$v(r\,,\theta) \neq 0\,, \quad \text{para cada} \quad (r\,,\theta) \in [0\,,1) \times \mathbb{R}\,. \tag{8.223}$$

Aplicaremos o método da separação de variáveis para obter uma candidata a solução envolvendo, inicialmente, as condições (8.219), (8.220) e (8.222), ou seja, tentaremos encontrar uma solução do tipo

$$v(r\,,\theta) \doteq \phi(r)\,\psi(\theta)\,, \quad \text{para cada} \quad (r\,,\theta) \in [0\,,1] \times \mathbb{R}\,. \tag{8.224}$$

De (8.223) segue que para algum $(r\,,\theta) \in [0\,,1) \times \mathbb{R}$ taç que

$$\psi(r)\,\phi(\theta) \neq 0\,. \tag{8.225}$$

Supondo que as funções ψ e ϕ são duas vezes diferenciáveis em $[0\,,1)$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, então, para cada $(r\,,\theta) \in [0\,,1) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r}(r\,,\theta) &\overset{(8.224)}{=} \frac{\partial}{\partial r}\,[\psi(r)\,\phi(\theta)] \\
&= \psi\,'(r)\,\phi(\theta)\,, && (8.226) \\
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r\,,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial v}{\partial r}(r\,,\theta)\right] \\
&\overset{(8.226)}{=} \frac{\partial}{\partial r}\,[\psi\,'(r)\,\phi(\theta)] \\
&= \psi\,''(r)\,\phi(\theta)\,, && (8.227) \\
\frac{\partial v}{\partial \theta}(r\,,\theta) &\overset{(8.224)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}\,[\psi(r)\,\phi(\theta)] \\
&= \psi(r)\,\phi\,'(\theta)\,, && (8.228) \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r\,,\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta}(r\,,\theta)\right] \\
&\overset{(8.228)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}\,[\psi(r)\,\phi\,'(\theta)] \\
&= \psi(r)\,\phi\,''(\theta)\,, && (8.229)
\end{aligned}$$

Sustituindo (8.226), (8.227) e (8.229) em (8.219), obteremos:

$$r^2\,\,[\psi\,''(r)\,\phi(\theta)] + r\,\,[\psi\,'(r)\,\phi(\theta)] + [\psi(r)\,\phi\,''(\theta)] = 0$$

Devidindo a identidade acima por

$$\psi(r)\,,\phi(\theta) \overset{(8.225)}{\neq} 0\,,$$

bteremos

$$\frac{r^2\,\psi''(r)\,\phi(\theta)+r\,\psi'(r)\,\phi(\theta)+\psi(r)\,\phi''(\theta)}{\psi(r)\,\phi(\theta)}=0$$

$$\text{ou seja,}\quad \frac{r^2\,\psi''(r)+r\,\psi'(r)}{\psi(r)}=-\frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)}=\text{constante}=\lambda\,,$$

isto é,

$$\phi''(\theta)+\lambda\,\phi(\theta)=0\,,\quad \text{para cada}\quad \theta\in\mathbb{R}\,, \tag{8.230}$$
$$\phi(\theta+2\pi)=\phi(\theta)\,,\quad \text{para cada}\quad \theta\in\mathbb{R}\,, \tag{8.231}$$
$$\phi\in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \tag{8.232}$$

e

$$r^2\,\psi''(r)+r\,\psi'(r)-\lambda\,\psi(r)=0\,,\quad \text{para cada}\quad r\in[0\,,1)\,, \tag{8.233}$$
$$\psi\in C([0\,,1];\mathbb{R})\cap C^2([0\,,1);\mathbb{R})\,. \tag{8.234}$$

Observação 8.3.3 *Notemos que, se a função $\underline{\phi}$ é 2π-periódica e diferenciável em $\mathbb{R}$, então, da regra da cadeia, segue que a função $\underline{\phi'}$ também será 2π-periódica.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Observemos que se a função $\phi=\phi(\theta)$ for uma solução, eventualmente complexa, de (8.230), deveremos ter:

$$\begin{aligned}
\lambda\underbrace{\int_0^{2\pi}|\phi(\theta)|^2\,d\theta}_{\geq 0} &= \lambda\int_0^{2\pi}\phi(\theta)\,\overline{\phi(\theta)}\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}[\lambda\,\phi(\theta)]\,\overline{\phi(\theta)}\,d\theta\\
&\overset{(8.230)\text{ e }(8.232)}{=} \int_0^{2\pi}[-\phi''(\theta)]\,\overline{\phi(\theta)}\,d\theta\\
&\left\langle \begin{array}{l} u=\overline{\phi(\theta)}\,,\ \text{logo: } du=\overline{\phi'(\theta)}\\ dv=\phi''(\theta)\,,\ \text{logo: } v=\phi'(\theta)\end{array}\right\rangle\\
&= \left[-\phi'(\theta)\,\overline{\phi(\theta)}\right]\Big|_{t=0}^{t=2\pi}+\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\,\overline{\phi'(\theta)}\,dt\\
&= -\left[\phi'(2\pi)\,\overline{\phi(2\pi)}-\phi'(0)\,\overline{\phi(0)}\right]+\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\,\overline{\phi'(\theta)}\,d\theta\\
&\overset{\text{de }(8.231)\ \phi,\phi'\text{ são }2\pi\text{-periódoca}}{=} \int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\,\overline{\phi'(\theta)}\,dt
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} |\phi'(\theta)|^2 \, d\theta}_{\geq 0} . \tag{8.235}$$

Da identidade acima segue que $\lambda \in \mathbb{R}$, ou melhor,

$$\lambda \geq 0 \tag{8.236}$$

Observemos que se $\lambda = 0$ então, da identidade (8.235), deveríamos ter

$$0 = \int_0^{2\pi} |\phi'(\theta)|^2 \, d\theta . \tag{8.237}$$

Como a função $\underline{\phi'}$ é contínua em $\mathbb{R}$ (veja (8.232)) segue, de (8.237), que

$$|\phi'(\theta)|^2 = 0 , \quad \text{para cada} \quad \theta \in \mathbb{R} ,$$
$$\text{ou seja,} \quad \phi'(\theta) = 0 , \quad \text{para cada} \quad \theta \in \mathbb{R} ,$$

implicando que a função $\underline{\phi}$ deverá ser constante em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\phi(\theta) = c , \quad \text{para cada} \quad \theta \in \mathbb{R} . \tag{8.238}$$

Se $\lambda > 0$, então a solução geral da EDO (8.230) será dada por

$$\phi(\theta) \doteq A_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) + B_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) , \tag{8.239}$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitos (visto na disciplina de EDO).

Mas, de (8.231), devemos ter

$$\begin{aligned}
A_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) + B_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) &\overset{(8.239)}{=} \phi(\theta) \\
&\overset{(8.231)}{=} \phi(\theta + 2\pi) \\
&\overset{(8.239)}{=} A_\lambda \cos\left[\sqrt{\lambda}\,(\theta + 2\pi)\right] + B_\lambda \operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}\,(\theta + 2\pi)\right] \\
&= A_\lambda \cos\left[\sqrt{\lambda}\,(\theta + 2\pi)\right] + B_\lambda \operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}\,(\theta + 2\pi)\right] \\
&= A_\lambda \left[\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) \cos\left(\sqrt{\lambda}\,2\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,2\pi\right)\right] \\
&\quad + B_\lambda \left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) \cos\left(\sqrt{\lambda}\,2\pi\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,2\pi\right)\right] \\
&= \left[A_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda}\,2\pi\right) + B_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,2\pi\right)\right] \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) \\
&\quad + \left[B_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda}\,2\pi\right) - A_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,2\pi\right)\right] \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) ,
\end{aligned} \tag{8.240}$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$.

Fazendo:

$$\theta = 0\,, \text{ em (8.240)},$$

$$\text{obteremos:} \quad A_\lambda = A_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right) + B_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right) \tag{8.241}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\,, \text{ em (8.240)},$$

$$\text{obteremos:} \quad B_\lambda = B_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right) - A_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right). \tag{8.242}$$

Multiplicando a identidade (8.241) por $\underline{A_\lambda}$ e a identidade (8.242) por $\underline{B_\lambda}$ e somando-se os resultados, obteremos:

$$A_\lambda^2 + B_\lambda^2 = A_\lambda^2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right) + A_\lambda\, B_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right) + B_\lambda^2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right) - B_\lambda\, A_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right),$$

em particular, devermos ter: $\cos\left(\sqrt{\lambda}\, 2\,\pi\right) = 1\,,$

$$\text{logo,} \quad \sqrt{\lambda}\, 2\,\pi = 2\,k\,\pi\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \sqrt{\lambda} = k\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \lambda = k^2\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{8.243}$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, a identidade (8.239), tornar-se-á:

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= A_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) + B_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) \\
&\overset{(8.243)}{=} \\
&= A_\lambda \cos\left(\sqrt{k^2}\,\theta\right) + B_\lambda \operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2}\,\theta\right) \\
&\overset{\sqrt{k^2}=|k|=k\in\mathbb{N}}{=} A_k \cos(k\,\theta) + B_k \operatorname{sen}(k\,\theta)\,,
\end{aligned}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos a função $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\phi_k(\theta) \doteq A_k \cos(k\,\theta) + B_k \operatorname{sen}(k\,\theta)\,, \tag{8.244}$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$.

Notemos que $k = 0$ daria origem a função ϕ_o constante, que já foi tratada no caso $\lambda = 0$ (veja (8.238)).

Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\lambda = k^2\,,$$

assim o problema (8.233), tornar-se-á:

$$r^2\,\psi''(r) + r\,\psi'(r) - k^2\,\psi(r) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad r \in [0\,,1)\,, \tag{8.245}$$

que é a $\underline{\textbf{equação de Euler}}$ de 2.ª ordem.

Neste caso, procuraremos soluções da forma

$$\psi(r) \doteq r^\alpha\,, \quad \text{para cada} \quad r \in I \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{8.246}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, substituindo a expressão (8.246) na equação de Euler (8.245), obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\left[\alpha(\alpha-1)\, r^{\alpha-2}\right] + r\left[\alpha\, r^{\alpha-1}\right] - k^2\, r^\alpha \\ &= \left[\alpha\,(\alpha-1) + \alpha - k^2\right] r^\alpha \\ &= \left[\alpha^2 - k^2\right] \underbrace{r^\alpha}_{\neq 0}, \\ \text{ou seja,}\quad & \alpha^2 - k^2 = 0\,, \\ \text{ou ainda ,}\quad & (\alpha - k)\,,(\alpha + k) = 0\,, \\ \text{isto é,}\quad & \alpha = \pm k\,. \end{aligned} \tag{8.247}$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, de (8.247), a solução da geral da equação de Euler (8.245) será dada por :

$$\psi_k(r) \doteq C_k\, r^k + D_k\, r^{-k}\,, \quad \text{para cada} \quad r \in I \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{8.248}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, como estamos procurando uma função $\underline{\psi_k}$ que deva satisfazer (8.234), ela deverá, em particular, ser uma função contínua em $[0\,,1]$, ou ainda , ser uma função contínua em $r = 0$.

Portanto, de (8.248), deveremos ter

$$D_k = 0\,. \tag{8.249}$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, a solução da equação de Euler (8.245), que nos interessará, será dada por:

$$\psi_k(r) \doteq C_k\, r^k\,, \quad \text{para cada} \quad r \in [0\,,1]\,. \tag{8.250}$$

Assim, para cada $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, de (8.244), (8.250) e (8.224), segue que

$$\begin{aligned} v_k(r,\theta) &\overset{(8.224)}{=} \psi_k(r)\,\phi_k(\theta) \\ &\overset{(8.244)\text{ e }(8.250)}{=} r^k\,\left[A_k\,\cos(k\,\theta) + B_k\,\text{sen}(k\,\theta)\right]\,, \end{aligned} \tag{8.251}$$

para cada $(r\,,\theta) \in [0\,,1] \times \mathbb{R}$.

Logo tentaremos uma solução (formalmente) de (8.219), (8.220), (8.221), (8.222) da forma:

$$\begin{aligned} v(r\,,\theta) &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r\,,\theta) \\ &\overset{(8.224)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(r)\,\phi_k(\theta) \\ &\overset{(8.251)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} r^k\,\left[A_k\,\cos(k\,\theta) + B_k\,\text{sen}(k\,\theta)\right]\,, \end{aligned} \tag{8.252}$$

para cada $(r\,,\theta) \in [0\,,1] \times \mathbb{R}$, ou ainda, na forma complexa, será dada por:

$$v(r\,,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{i\,k\,\theta}\, r^{|k|}\,, \tag{8.253}$$

para cada $(r\,,\theta) \in [0\,,1] \times \mathbb{R}$ onde

$$\begin{aligned} C_o &\doteq \frac{A_o}{2}\,, \\ C_k &\doteq \frac{A_k - i\,B_k}{2}\,, \\ C_{-k} &\doteq \frac{A_k + i\,B_k}{2}\,, \end{aligned}$$

Lembremos que

$$\cos(k\,\theta) = \frac{e^{i\,k\,\theta} + e^{-i\,k\,\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(k\,\theta) = \frac{e^{i\,k\,\theta} - e^{-i\,k\,\theta}}{2\,i}\,.$$

Impodo a condição inicial, isto é, (8.221), obteremos:

$$\begin{aligned} g(\theta) &\overset{(8.221)}{=} v(1\,,\theta) \\ &\overset{(8.253),\ \text{com}\ r=1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,e^{i\,k\,\theta}\,, \end{aligned}$$

para $\theta \in \mathbb{R}$.

Logo, para cada $k \in \mathbb{Z}$, o coeficiente $\underline{C_k}$ deverá ser o $\underline{k}$-éismo coeficiente de Fourier associado à função $\underline{g}$, na forma complexa, ou seja,

$$C_k = \widehat{g}\,(k) \overset{(7.191),\ \text{com}\ L=\pi}{=} \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-i\,k\,t}\,dt\,. \tag{8.254}$$

Utilizando (8.254) podemos obter, formalmente, uma candidata a solução para (8.219), (8.220), (8.221) e (8.222), a saber:

$$\begin{aligned} v(r\,,\theta) &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,e^{i\,k\,\theta}\,r^{|k|} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-i\,k\,t}\,dt\right] e^{i\,k\,\theta}\,r^{|k|}\,, \end{aligned} \tag{8.255}$$

para cada $(r\,,\theta) \in [0\,,1] \times \mathbb{R}$.

Pode-se mostrar que a série de funções (8.255) converge uniformemente em $[0\,,1] \times \mathbb{R}$, que pode ser derivada parcialmente, termo a termo, duas vezes em relação à $\underline{r}$ e em relação à $\underline{\theta}$, em $[0\,,1) \times \mathbb{R}$ e portanto irá satisfazer ao problema (8.219), (8.220), (8.221) e (8.222).

A demostração desse fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos obter a função

$$u(x\,,y) = v(r\,,\theta)$$

(veja (8.207)) uma solução do problema (8.193), (8.194) e (8.195), em

$$\Omega \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\,x^2 + y^2 < 1\right\}$$

e assim provar o:

Teorema 8.3.2 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, como acima, e $f \in C(\partial\Omega\,;\mathbb{R})$.*

Se a função $v : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por (8.255), então a função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u(x\,,y) \doteq \begin{cases} v(r\,,\theta)\,, & \textit{onde } x = r\cos(\theta) \textit{ e } y = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,, \textit{ para } (r\,,\theta) \in [0\,,1) \times \mathbb{R} \\ f(x\,,y)\,, & \textit{para } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \tag{8.256}$$

para cada $(x\,,y) \in \overline{\Omega}$, é uma solução do problema (8.193), (8.194)e (8.195).

Observação 8.3.4 *Pode-se mostrar que a solução (8.256) é única.*

8.4 Exercícios

8.5 Referências

1. Boyce, E.W. e Diprima, R.C. -*Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, ed. Rio de Janieor, 2002.

2. Butkov, E. - *Física Matemática*, Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1988.

3. Churchill, R. e Brown, J. - *Fourier series and boundary value problems*, 4 ed. New York: McGraw-Hill, 1987.

4. Figueiredo, D.G. - *Análise I*, IMPA, CNPq, 1977.

5. Figueiredo, D.G. - *Análise Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, 1975.

6. Iório, V.M. - *EDP - Um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, 1991.

7. Lima, E.L. - *Espaços Métricos, Projeto Euclides*, IMPA, RJ, CNPq.

8. Lima, E.L. - *Curso de Análise, volume 1*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, 1976.

9. Rudin, W. - *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

10. Simmons, G.F. - *Cálculo com Geometria Analítica, volume 2*, Rio de Janeiro: Mc Graw-Hill, 1987.

11. Stewart, J. - *Cálculo, volumes 1 e 2*, 4 ed., São Paulo:Pioneira, 2001.

12. Swokowski, E.W. - *Cálculo com Geometria Analítica, volume 2*, 2 ed., Rio de Janeiro: Makron-Books, 1995.

13. Thomas, G.B. - *Cálculo, volume 2*, Addison Wesley, 2003

14. Tolstov, G.P. - *Fourier Series*, New York: Dover, 1976.

Índice Remissivo