Separação de variáveis, *aka* método de Fourier

Linearidade e superposição

Proposição (Princípio da superposição): Combinações lineares infinitas (séries) de soluções de uma EDP linear homogênea são soluções da mesma EDP. Mais precisamente, seja L um operador diferencial parcial linear, e suponha que, para cada $n \geqslant 1$, u_n é solução de $Ly = 0$, e que $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ é uma sequência de números reais tal que a série

$$u(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x_1, \ldots, x_n)$$

converge para todo $(x_1, \ldots, x_n)$ no domínio de L e pode ser derivada termo-a-termo quantas vezes forem necessárias. Então u também é solução de $Ly = 0$.

A equação do calor unidimensional é a seguinte EDP linear homogênea em $[0, L] \times [0, \infty[$:

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$$

Fisicamente, a função $u(x, t)$ representa a temperatura, no ponto x e no instante de tempo t, de uma barra de comprimento L (muito mais comprida do que espessa) homogênea com coeficiente de difusividade térmica α^2. A difusividade térmica depende das condutividade térmica, calor específico e densidade da barra.

Separação de variáveis, *aka* método de Fourier

Condições mistas

O objetivo é encontrar soluções da equação do calor que satisfaçam condições mistas: uma condição inicial e condições de contorno. A condição inicial diz qual é a distribuição, o aspecto da temperatura em toda a barra no instante $t = 0$; denotamos isso como a seguir:

$$u(x, 0) = f(x),$$

onde $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é uma função (suficientemente regular).
As condições de contorno dizem como a temperatura se comporta nos extremos da barra em todo instante de tempo. Se, por exemplo, os extremos da barra são mantidos a uma temperatura fixa T, a condição de contorno é denotada por $u(0, t) = T = u(L, t)$ e denominada "condição de Dirichlet". Nesse caso, devemos ter também $f(0) = T = f(L)$. Se acontecer de os extremos da barra não trocarem calor com o ambiente, a condição de contorno é denotada por $u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t)$ e denominada "condição de Neumann". Nesse caso, devemos ter também $f'(0^-) = 0 = f'(L^+)$.

Separação de variáveis, *aka* método de Fourier

O *setup* e o *ansatz*

Vamos ilustrar o método através do seguinte problema em $[0, L] \times [0, \infty[$:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 \cdot u_{xx}(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) \end{cases}.$$

A ideia do método de separação das variáveis é separar as variáveis das soluções. Mais precisamente, buscamos por soluções da forma

$$u(x,t) = A(x) \cdot B(t) \qquad (\star)$$

com $A : [0, L] \to \mathbb{R}$ e $B : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ funções "suficientemente regulares".

Separação de variáveis, *aka* método de Fourier

Fazendo as contas

Substituindo ($\star$) na equação do calor, obtemos:

$$A(x) \cdot B'(t) = \alpha^2 \cdot A''(x) \cdot B(t).$$

Supondo que $A(x) \cdot B(t) \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da igualdade acima por $A(x) \cdot B(t) \neq 0$, o que nos leva a

$$\frac{B'(t)}{\alpha^2 B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

O lado esquerdo da igualdade anterior só depende de t, enquanto o lado direito só depende de x. Logo, a igualade anterior só é verdadeira se ambos os lados forem iguais a uma mesma constante, digamos $-\lambda$.

Separação de variáveis, *aka* método de Fourier

Fazendo as contas

Logo, as funções A e B satisfazem as seguinte equações diferenciais ordinárias:

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0 \quad \text{e} \quad B'(t) + \lambda\alpha^2 B(t) = 0.$$

A condição de contorno $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ impõe as seguintes condições nas soluções da primeira dentre as duas equações acima:

$$A(0) = 0 = A(L).$$

Essa última condição "força" λ a ser (estritamente) positivo, pois integração por partes fornece:

$$\lambda\langle f, f\rangle = \lambda\|f\|^2 = \|f'\|^2,$$

e, lembremos $\|g\|^2 \geqslant 0$ qualquer que seja g integrável.

Separação de variáveis, *aka* método de Fourier

Fazendo as contas

Escrevendo, então, $\lambda = \omega^2$, a equação (oscilador harmônico)

$$A''(x) + \omega^2 A(x) = 0$$

tem como solução geral

$$A(x) = a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x).$$

Mas, novamente, a condição de contorno "força" a a se anular e ω a satisfazer

$$\omega \cdot L = n \cdot \pi \rightsquigarrow \omega_n \overset{\text{def}}{=} \frac{n\pi}{L}.$$

para algum $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ (ω_n e ω_{-n} fornecem solução linearmente dependentes). Daí, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ (e $\beta_n \in \mathbb{R}$), temos que

$$A_n(x) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

são soluções linearmente independentes da parte espacial da equação do calor.

Separação de variáveis, *aka* método de Fourier

Fazendo as contas

A equação temporal, *viz.*:

$$B'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 B(t) = 0$$

tem como solução geral

$$B_n(t) = k_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} \cdot t\right)$$

onde $k_n \in \mathbb{R}$. Logo, para cada $n \geqslant 1$, a função (onde $b_n \in \mathbb{R}$)

$$A_n(x)B_n(t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} \cdot t\right)$$

é solução da equação do calor.

Separação de variáveis, *aka* método de Fourier

Fazendo as contas

Pelo princípio da superposição,

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} \cdot t\right) \qquad (\dagger)$$

é solução da equação do calor satisfazendo as condições de contorno

$$u(0,t) = 0 = u(L,t).$$

A condição inicial nos dá

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

de modo que os coeficientes b_n que aparecem na solução (†) são os coeficientes de Fourier de função f que aparece como condição incial do problema.