Coeficientes de Fourier das derivadas

Lembremos que

$$\{f \in \mathsf{PWC}([-L, L]) \mid f(-L) = f(L)\} \tag{$\star$}$$

e

$$\{f \in \mathsf{PWC}_\omega(\mathbb{R}) \mid f \text{ é } 2L\text{-periódica}\}. \tag{$\dagger$}$$

são “iguais”.

Note que podemos trocar, na definição dos espaços acima, a propriedade “ser contínua por partes” por “ser contínua” e ainda assim manter a “igualdade” entre os correspondentes espaços.

Coeficientes de Fourier das derivadas

PROPOSIÇÃO: Seja $f \in (\dagger)$ (ou $(\star)$), com f contínua. Suponha que f seja diferenciável em $[-L, L]$ exceto, no máximo, por uma quantidade finita de pontos, e que $f' \in (\dagger)$ também (os valores de f' onde f não é diferenciável são irrelevantes). Então

$$\widehat{f'}(n) = \frac{in\pi}{L} \cdot \widehat{f}(n).$$

DEMONSTRAÇÃO: Integração por partes.

Note que, uma vez que $\lim_{n \to \pm\infty} \widehat{f'}(n) = 0$, segue da igualdade acima que, sob as condições da proposição, vale $\lim_{n \to \pm\infty} n \cdot \widehat{f}(n) = 0$.

Coeficientes de Fourier das derivadas

COROLÁRIO: Seja $f \in (\dagger)$ (ou $(\star)$). Suponha que $f \in C^{k-1}$, *i.e.*, f é $k-1$ vezes diferenciável e $f^{(k-1)}$ é contínua. Suponha também que f seja k vezes diferenciável em $[-L, L]$ exceto, no máximo, por uma quantidade finita de pontos, e que $f^{(k)} \in (\dagger)$ também (os valores de $f^{(k)}$ onde $f^{(k-1)}$ não é diferenciável são irrelevantes). Então

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = \left(\frac{in\pi}{L}\right)^k \hat{f}(n).$$

DEMONSTRAÇÃO: Basta aplicar a proposição anterior k vezes.

OBSERVAÇÃO: Como consequência do corolário acima, quanto mais derivadas a função f tiver, mais rápido os coeficientes de Fourier decaem (a zero): se f possui k derivadas, então $\lim_{n \to \pm\infty} n^k \cdot \hat{f}(n) = 0$

Coeficientes de Fourier das derivadas

Uma condição suficiente para convergência uniforme

Corolário: Seja $f \in (\dagger)$ (ou $(\star)$). Suponha que

— f seja de classe C^1 (diferenciável com derivada contínua) em $\mathbb{R}$,

— f'' exista em $[-L, L]$ exceto, no máximo, por uma quantidade finita de pontos, e

— $f'' \in (\dagger)$.

Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$, ou seja

$$\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{in\pi x/L} \xrightarrow{N\to\infty} f.$$

Coeficientes de Fourier das derivadas

Uma condição suficiente para convergência uniforme

Demonstração: Como $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f''}(n) = 0$, existe $M \geqslant 0$ tal que $|\widehat{f''}(n)| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (pois convergência implica limitação). Daí, para $n \neq 0$, temos (lembre que $|e^{ix}| = 1$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$):

$$|\widehat{f}(n)e^{in\pi x/L}| = |\widehat{f}(n)| = \frac{L^2}{\pi^2 n^2}|\widehat{f''}(n)| \leqslant \frac{ML^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Como (na primeira das séries a seguir, desconsidere $n = 0$) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, o teste M de Weierstrass garante que a série de funções

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\pi x/L}$$

converge uniformemente.

Convergência uniforme da série de Fourier

As condições do corolário anterior podem ser enfraquecidas.

TEOREMA: Seja $f \in (\dagger)$ (ou $(\star)$). Suponha que

— f seja contínua,

— f' exista em $[-L, L]$ exceto, no máximo, por uma quantidade finita de pontos, e

— $f' \in (\dagger)$.

Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$, ou seja

$$\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{in\pi x/L} \xrightarrow{N \to \infty} f.$$

Convergência uniforme da série de Fourier

DEMONSTRAÇÃO: Como $|\widehat{f}(n)e^{in\pi x/L}| = |\widehat{f}(n)|$, o teste M de Weierstrass garante que o resultado do teorema é verdadeiro desde que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. Ora (em todas as somas abaixo, desconsidere $n = 0$)

$$\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(0)| + \frac{L}{\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{|\widehat{f'}(n)|}{|n|}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-(Buniakovskii)-Schwarz usual (em $\mathbb{R}^{2N}$):

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{|\widehat{f'}(n)|}{|n|} \leqslant \sqrt{\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f'}(n)|^2}.$$

Já sabemos que a primeira das somas do lado direito da desigualdade acima converge quando $N \to \infty$. A segunda delas, *viz.*: $\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f'}(n)|^2$, também converge pela desigualdade de Bessel. Logo, a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|$ também converge. Isso finaliza a demonstração.

Nas condições do teorema anterior, *i.e.*, sob convergência uniforme, a desigualdade de Bessel é na verdade uma igualdade, conhecida como identidade de Parseval.

Corolário: Seja f uma função satisfazendo as condições do teorema anterior. Tome $g \in (\star)$. Então

$$\frac{1}{2L}\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \cdot \overline{\widehat{g}(n)}.$$

Em particular

$$\frac{1}{2L}\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right)$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos que

$$\frac{1}{2L}\langle f, g\rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)g(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{in\pi x/L}\right)g(x).$$

Como a série de Fourier de f converge uniformemente para f e como g é contínua por partes, a integração acima pode ser feita termo-a-termo:

$$\frac{1}{2L}\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)e^{in\pi x/L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\cdot\widehat{g}(-n).$$

Mas $\widehat{g}(-n) = \overline{\widehat{g}(n)}$ (lembre: a barra denota conjugação complexa).

Convergência uniforme da série de Fourier

A identidade de Parseval aplicada à função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \overset{\text{def.}}{=} |x|$ fornece a seguinte igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Embora a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \pi \cdot \chi_{[0,\pi[}(x)$ não satisfaça as condições do teorema sobre convergência uniforme, temos que a identidade de Parseval aplicada a ela fornece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

igualdade essa que já verificamos. Isso acontece porque a identidade de Parseval vale mais geralmente para qualquer função $f \in (\star)$.

Uma função analítica num intervalo I é globalmente determinada, *i.e.*, é determinada em todo intervalo I, a partir de informações locais, *i.e.*, informações num único ponto. Nesse sentido, analiticidade é uma condição EXTREMAMENTE forte, restritiva. Mais precisamente, vale o seguinte:

TEOREMA: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função analítica em I. Se para algum $a \in I$ acontecer $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, então f é identicamente nula em I.

Demonstração: Podemos supor que $I =]-R, R[$, para algum $R > 0$, e que $a = 0$. Como $f^{(k)}(0) = 0$, a série de Taylor de f em torno de 0 é identicamente nula. Como f é analítica em I, existe $r_1 > 0$ tal que a série de Taylor de f em torno de 0 coincide com f em $]-r_1, r_1[$. Portanto, f é identicamente nula em $]-r_1, r_1[$. Se $r_1 < R$, existe $r_2 > 0$ tal que a série de Taylor de f em torno de r_1 coincide com f em $]r_1 - r_2, r_1 + r_2[$. Como $r_1 - r_2 < r_1$, os intervalos $]-r_1, r_1[$ e $]r_1 - r_2, r_1 + r_2[$ se intesectam. Seja x_1 um ponto nessa intersecção. Como $x_1 \in]-r_1, r_1[$, a série de Taylor de f em torno de x_1 é identicamente nula (pois f é identicamente nula em $]-r_1, r_1[$). Como $x_1 \in]r_1 - r_2, r_1 + r_2[$ também, e como $]r_1 - r_2, r_1 + r_2[$ é o intervalo no qual a série de Taylor de f em torno de r_1 converge, podemos trocar o centro da série de r_1 para x_1, depois do que concluímos que a série de Taylor de f em torno de r_1 também é identicamente nula e, portanto, que f é identicamente nula em $]r_1 - r_2, r_1 + r_2[$ também. Se $r_1 + r_2 < R$ ainda, repetimos o argumento anterior. Isso acaba em R.

Corolário: Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ duas funções analíticas em um intervalo aberto I. Se para algum $a \in I$ acontecer $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, então f e g coincidem, *i.e.*, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.

Demonstração: Basta aplicar o teorema anterior à função $f - g$.

Corolário (Extensão analítica): Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções analíticas. Suponha que $I \cap J \neq \emptyset$ e que f e g coincidem em $I \cap J$. Então existe uma única função analítica $h : I \cup J \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$h(x) = f(x) \text{ para todo } x \in I \text{ e } h(y) = g(y) \text{ para todo } y \in J.$$

Nesse caso dizemos que h estende analiticamente, ou que h é uma extensão analítica de f (ou g) a $I \cup J$.

Fato (Teorema de existência para equações com coeficientes analíticos): Sejam $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ e a_k, $k = 0, \ldots, n-1$, e h funções analíticas em um intervalo aberto I. Então qualquer solução da equação diferencial ordinária linear (de ordem n)

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = h \qquad (\bullet)$$

é também uma função analítica em I.

Vale lembrar que a equação acima sempre possui solução (mesmo quando os coeficientes não são funções analíticas). O que o fato diz é que a solução é analítica desde que os coeficientes sejam. Lembro também que uma equação na qual o coeficiente a_n da derivada de maior ordem é 1, como em ($\bullet$), é chamada de normal. Equações não normais exibem comportamentos patológicos em torno das raízes de a_n. O estudo de equações não normais deve ser feito usando o assim chamado "método de Frobenius".

Se queremos encontrar uma solução de (•) podemos proceder como a seguir. Tome $a \in I$. O fato então garante que podemos escrever

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k.$$

Se soubermos quais são os coeficientes b_k, saberemos completamente qual é a solução. Como y é analítica em I, podemos derivar a série acima termo-a-termo. Como os coeficientes (da equação, não da série) a_k são funções analíticas, podemos expandir cada a_k como uma série de potências em torno de a. Como produto de séries de potências que convergem em I é também uma série de potências que converge em I (dada, a propósito, pelo produto de Cauchy entre elas), cada parcela $a_k \cdot y^{(k)}$ pode ser expressa como uma série de potências em torno de a.

Daí que, feitas as manipulações algébricas necessárias, podemos expressar o lado esquerdo de (•) como uma série de potências em torno de a, cujos coeficientes vão depender dos coeficientes b_k da solução. O lado direito, sendo também uma função analítica, pode ser expresso como série de potências em torno de a. Os lados esquerdo e direito de (•), sendo ambas funções analíticas que coincidem em I, devem ter os mesmos coeficientes (para ver isto basta avaliar essas funções, bem como suas derivadas, em a). Essas igualdades entre esses coeficientes são suficientes para determinar os coeficientes b_k da solução. Os coeficientes ficarão unicamente determinados a menos de n dentre eles, o que faz sentido posto que a solução de uma EDO linear de ordem n é unicamente determinada por n condições iniciais.

A demonstração do fato consiste, essencialmente, no processo que acabamos de descrever.

Vamos agora ilustrar o processo com uma equação em particular.

A equação

$$y'' + xy = 0$$

é conhecida como equação de Airy. Alguns matemáticos chamam $y'' - xy = 0$ de equação de Airy, mas isso é irrelevante pois as soluções de uma podem ser expressas em termos das soluções da outra (através de uma reflexão em torno do eixo y) e vice-versa. A título de curiosidade: historicamente essa equação surgiu das investigações do astrônomo inglês George Airy no campo da ótica. Mas a mesma equação também aparece no modelo de "queda livre" quântica, e certa solução dela também está relacionada com uma transformada de Fourier associada à distribuição de Chernoff.

Perceba que os coeficientes da equação de Airy são analíticos em $\mathbb{R}$. Logo, suas soluções também serão analíticas em $\mathbb{R}$. Vamos aplicar o processo descrito anteriormente para descrever as soluções da equação de Airy como séries de potência em torno de 0.

EDOs e séries de potências

A equação de Airy

Suponha que

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$$

é solução da equação de Airy. Daí

$$y''(x) + xy = 2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1})x^n = 0.$$

Portanto devemos ter $a_2 = 0$ e, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_{n-1}.$$

Para $n \leqslant 5$, e equação anterior se torna

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 \cdot a_3 = -a_0 \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 = -a_1 \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 = -a_2 = 0 \\ 6 \cdot 5 \cdot a_6 = -a_3 = a_0/6 \\ 7 \cdot 6 \cdot a_7 = -a_4 = a_1/12 \end{cases}.$$

Mostra-se, por indução, que, para qualquer $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, vale $a_{3k+2} = 0$ e

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k \cdot a_0}{3^k \cdot k! \cdot (3k-1)!!!} \quad \text{e} \quad a_{3k+1} = \frac{(-1)^k \cdot a_1}{3^k \cdot k! \cdot (3k+1)!!!},$$

onde $n!!! \overset{\text{def.}}{=} n \cdot (n-3) \cdots (n - 3\alpha_n)$, onde α_n é o maior inteiro tal que $n - 3\alpha_n \geqslant 1$. Note que $(3k)!!! = 3^k \cdot k!$

Perceba que, dados $a_0 = y(0)$ e $a_1 = y'(0)$, todos os outros coeficientes da série da solução, e portanto a solução, ficam determinados. Podemos então escrever

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k \cdot k! \cdot (3k-1)!!!} x^{3k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k \cdot k! \cdot (3k+1)!!!} x^{3k+1}.$$

Em particular, as funções

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k \cdot k! \cdot (3k-1)!!!} x^{3k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k \cdot k! \cdot (3k+1)!!!} x^{3k+1}$$

são duas soluções linearmente independentes (pelo critério do Wronskiano) da equação de Airy, pois a primeira é obtida fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, e a segunda é obtida fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

Seja

$$y_1(x) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k \cdot k! \cdot (3k-1)!!!} x^{3k}.$$

Note que, se $x < 0$, então $x = -|x|$ e, portanto, $(-1)^k x^{3k} = |x|^{3k}$. Logo, $y_1(x) \xrightarrow{x \to -\infty} +\infty$. Para $x > 0$, $y_1(x)$ "oscila".

Denotando por $y_2(x)$ a outra função (aquela com condições iniciais $y_2(0) = 0$ e $y_2'(0) = 1$), um raciocínio idêntico ao anterior permite concluir que $y_2(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$. Para $x > 0$, $y_2(x)$ também oscila.

Animações das somas parciais das séries que definem as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ estão disponíveis na minha página.