Restrição e extensão

Lembre que se a série de Fourier de uma função integrável $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ converge pontualmente em $[-L, L]$, então ela converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para uma função $2L$-periódica.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2L$-periódica, onde $L > 0$. Suponha que $f \in \mathrm{PWC}(I)$ para qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$. Nesse caso, escrevo $f \in \mathrm{PWC}_\omega(\mathbb{R})$. A restrição de f a qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que seja fechado e tenha comprimento $2L$ é uma função $f_{|I} \in \mathrm{PWC}(I)$ cujos valores nos extremos de I coincidem.

Em particular, se $f \in \mathrm{PWC}_\omega(\mathbb{R})$ é $2L$-periódica, então a restrição de f ao intervalo $[-L, L]$ é uma função $f_L \in \mathrm{PWC}([-L, L])$, e portanto possui uma série de Fourier S_f. Além disso f_L satisfaz

$$f(L) = f(-L).$$

Restrição e extensão

Reciprocamente, dada uma função $f \in \mathrm{PWC}([-L, L])$ cujos valores nos extremos coincidem, *i.e.*, que satisfaz $f(L) = f(-L)$, podemos estender f, de maneira única, a uma função $F \in \mathrm{PWC}_\omega(\mathbb{R})$ que é $2L$-periódica: basta definir

$$F(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x - 2kL)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ satisfaz

$$\frac{x}{2L} - \frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{x}{2L} + \frac{1}{2}.$$

A não ser que ambos extremos da desigualdade acima sejam números inteiros, um e apenas um inteiro k satisfaz as desigualdades acima. Caso ambos extremos sejam inteiros, digamos k_1 e k_2, então $x - 2k_1L = L$ e $x - 2k_2L = -L$, ou vice-versa. Mas uma vez que $f(L) = f(-L)$, a escolha de k_1 ou k_2 é irrelevante para a definição de F.

Restrição e extensão

Em resumo: existe uma bijeção entre os conjuntos

$$\{f \in \mathrm{PWC}([-L, L]) \mid f(-L) = f(L)\} \tag{$\star$}$$

e

$$\{f \in \mathrm{PWC}_\omega(\mathbb{R}) \mid f \text{ é } 2L\text{-periódica}\}. \tag{$\dagger$}$$

Como podemos construir a série de Fourier de uma função do primeiro conjunto, podemos também construir, através da bijeção acima (via extensão), a série de Fourier de uma função do segundo conjunto. O primeiro conjunto pode ser encarado como o conjunto das funções contínuas por partes definidas num círculo de comprimento $2L$.
Ora, dada $f \in \mathrm{PWC}([-L, L])$, a alteração do valor de f num único ponto não altera o valor de integrais envolvendo f; com isso podemos "forçar" f a ter valores coincidentes nos extremos $-L$ e L sem alterar sua série de Fourier (pois os coeficientes da série são dados em termos de integrais envolvendo f). Em resumo: não há nenhum problema em considerarmos apenas as séries de Fourier de funções no conjunto ($\star$), ou, equivalentemente, no conjunto ($\dagger$).

Forma complexa dos coeficientes de Fourier

Lembremos que

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = i \cdot \frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2}$$

e

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}}{2}.$$

Das igualdades acima segue que para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ (0 inclusive) vale

$$a_n\psi_n + b_n\varphi_n = \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-in\pi x/L} + \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\pi x/L}.$$

Faça

$$\widehat{f}(\pm n) \overset{\text{def.}}{=} \frac{a_n \mp ib_n}{2}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Forma complexa dos coeficientes de Fourier

Com a definição anterior, podemos reescrever a série de Fourier de qualquer função integrável $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$S_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\pi x/L} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{in\pi x/L}$$

A integração de uma função de uma variável real a valores complexos é feita via partes real e imaginária. Com isso, a família de funções $\{e^{in\pi x/L} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ satisfaz as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\left\langle e^{in\pi x/L}, e^{im\pi x/L} \right\rangle = 2L\delta_{-n,m},$$

a partir das quais podemos escrever

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2L} \langle f, e^{-in\pi x/L} \rangle.$$

A noção de convergência em $\mathbb{C}$ é, *mutatis mutandis*, a mesma daquela em $\mathbb{R}$. O lema de Riemann-Lebesgue garante então que $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Forma complexa dos coeficientes de Fourier

Algumas identidades

É imediato verificar que para quaisquer $f, g \in \mathrm{PWC}([-L, L])$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale

$$\widehat{(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)}(n) = \alpha \cdot \widehat{f}(n) + \beta \cdot \widehat{g}(n).$$

Se $f \in \mathrm{PWC}([-L, L])$, a função $h : [-L, L] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(-x)$$

também está em $\mathrm{PWC}([-L, L])$ e satisfaz

$$\widehat{h}(n) = \widehat{f}(-n).$$

Convergência pontual da série de Fourier

Lembremos da seguinte convenção notacional:

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(a^{\pm}).$$

Lema: Seja $f \in (\dagger)$ (ou $(\star)$). Suponha que f seja diferenciável em $[-L, L]$ exceto, no máximo, por uma quantidade finita de pontos, e que $f' \in (\dagger)$ também (os valores de f' onde f não é diferenciável são irrelevantes). Se f é contínua em 0, então $S_f(0)$ converge para $f(0)$, *i.e.*,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

Convergência pontual da série de Fourier

Demonstração: Para $x \in [-L, L]$ faça (o valor de g em 0 é irrelevante)

$$g(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} (f(x) - f(0))/(e^{i\pi x/L} - 1), \text{ se } x \neq 0 \\ -iLf'(0^+)/\pi, \text{ se } x = 0 \end{cases} .$$

A continuidade de f em 0 e o teorema do valor médio garantem que existem $g(0^\pm)$. Portanto $g \in$ (†) também. Daí, $\lim_{n\to\pm\infty} \hat{g}(n) = 0$. Mas $\hat{f}(n) = \hat{g}(n-1) - \hat{g}(n)$, se $n \neq 0$, e $\hat{f}(0) = \hat{g}(-1) - \hat{g}(0) + f(0)$, de onde vem que

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = \hat{g}(-N-1) - \hat{g}(N) + f(0) \xrightarrow{N\to\infty} f(0).$$

Convergência pontual da série de Fourier

Teorema: Seja $f \in (\dagger)$ (ou $(\star)$). Suponha que f seja diferenciável em $[-L, L]$ exceto, no máximo, por uma quantidade finita de pontos, e que $f' \in (\dagger)$ também (os valores de f' onde f não é diferenciável são irrelevantes). Então $S_f(x_0)$ converge para

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Em particular, se f é contínua em x_0, $S_f(x_0)$ converge para $f(x_0)$.

Observação: Note que, como era de se esperar, alterações no valor de f num ponto não acarretam nenhuma alteração na sua série de Fourier.

Convergência pontual da série de Fourier

Demonstração: A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{f(x + x_0) + f(-x + x_0)}{2}$$

satisfaz as condições do lema anterior. Logo $S_h(0)$ converge e

$$S_h(0) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \widehat{h}(n) = h(0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Mas perceba que

$$h(0) \xleftarrow{\infty \leftarrow N} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{h}(n) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{in\pi x_0/L} \xrightarrow{N\to\infty} S_f(x_0).$$

Convergência pontual da série de Fourier

Exemplo: onda triangular retificada

A função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} |x|$ pode ser estendida a uma função, também denotada por f, em $\mathrm{PWC}_\omega(\mathbb{R})$ que é 2-periódica.

No passado calculamos a série de Fourier de f:

$$S_f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2n-1)\pi} \right)^2 \cos((2n-1)\pi x).$$

A função f satisfaz as condições do teorema anterior. Daí, como f é contínua em 0 e $f(0) = 0$, segue que $S_f(0)$ converge para 0, ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Na verdade, como f é contínua em $\mathbb{R}$, S_f converge pontualmente para f em $\mathbb{R}$.

Convergência pontual da série de Fourier

Exemplo: onda quadrada retificada

A função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \pi \cdot \chi_{[0,\pi[}(x)$ pode ser estendida a uma função, também denotada por f, em $\mathrm{PWC}_{\omega}(\mathbb{R})$ que é 2-periódica. No passado calculamos a série de Fourier de f:

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)} \sin((2n-1)x).$$

A função f satisfaz as condições do teorema anterior. Daí, como f é contínua em $\pi/2$ e $f(\pi/2) = \pi$, segue que $S_f(\pi/2)$ converge para π, ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{\pi}{4},$$

recuperando o resultado que obtivemos através de integração termo-a-termo da série de potências de $1/(1+x^2)$.

Note que $S_f(x)$ converge para $f(x)$ exceto nos pontos da forma $n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$.