Relembrando

Seja $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Para quaisquer $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ faça

$$\psi_n(x) \overset{\text{def.}}{=} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad \varphi_k(x) \overset{\text{def.}}{=} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

TEOREMA: Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que existem sequências $(a_n)_{n\geqslant 0}$ e $(b_n)_{n\geqslant 1}$ tais que para qualquer $x \in [-L, L]$ vale

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \psi_n(x) + b_n \cdot \varphi_n(x)$$

Mais ainda: suponha que a série do lado direito da igualdade converge uniformemente (para f) em $[-L, L]$. Então

- $f(-L) = f(L)$,
- $a_n = L^{-1} \int_{-L}^{L} f\psi_n$, para todo $n \geqslant 0$, e
- $b_n = L^{-1} \int_{-L}^{L} f\varphi_n$, para todo $n \geqslant 1$.

Relembrando

DEFINIÇÃO: Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Para cada $n \geqslant 0$ e $k \geqslant 1$ faça

$$a_n \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\psi_n \quad \text{e} \quad b_k \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\varphi_k$$

A série

$$S_f \overset{\text{def.}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n + b_n\varphi_n$$

é chamada de série de Fourier de f; os termos das sequências $(a_n)_{n\geqslant 0}$ e $(b_n)_{n\geqslant 1}$ são chamados de coeficientes de Fourier de f.

OBSERVAÇÃO: Note que se a série de Fourier de uma função convergir pontualmente em $[-L, L]$, ela converge pontualmente para uma função $2L$-periódica em $\mathbb{R}$ pois cada parcela da série é uma função $2L$-periódica em $\mathbb{R}$.

Relembrando

Definição: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ possui uma descontinuidade de primeiro tipo ou de primeira espécie em $a \in I$ se existem (e são finitos!) os limites laterais

$$f(a^+) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a^-) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{x \to a^-} f(x),$$

mas f é descontínua em a.

Definição: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado. Diremos que $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua por partes (*piecewise continuous*) se f possui apenas uma quantidade finita de descontinuidades de primeira espécie (saltos) em I. O $\mathbb{R}$-espaço vetorial de todas as funções contínuas por partes em I será denotado por $\mathrm{PWC}(I)$.

Observação: Note que qualquer função em $\mathrm{PWC}(I)$ é integrável.

Relembrando

DEFINIÇÃO: Para $f, g \in \mathrm{PWC}(I)$ faça

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \int_I f \cdot g.$$

PROPOSIÇÃO: A função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{PWC}(I) \times \mathrm{PWC}(I) \to \mathbb{R}$$

definida acima é

— $\mathbb{R}$-bilinear, *i.e.*, é $\mathbb{R}$-linear nas duas entradas, ou seja: $\langle \alpha f + \beta g, \cdot \rangle = \alpha \langle f, \cdot \rangle + \beta \langle g, \cdot \rangle$ e $\langle \cdot, \alpha f + \beta g \rangle = \alpha \langle \cdot, f \rangle + \beta \langle \cdot, g \rangle$,

— simétrica, *i.e.*, $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, e

— positiva, *i.e.*, $\langle f, f \rangle \geqslant 0$.

A seminorma em $\mathrm{PWC}(I)$

A função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é quase um produto interno no espaço $\mathrm{PWC}(I)$ pois só não satisfaz

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies f = 0.$$

De fato, qualquer função f que seja nula exceto numa quantidade finita de pontos é contínua por partes e satisfaz $\langle f, f \rangle = \int f^2 = 0$.

Definição: Para $f \in \mathrm{PWC}(I)$ faça

$$\|f\| \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

A função $\| \cdot \| : \mathrm{PWC}(I) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ assim definida não satisfaz

$$\|f\| = 0 \implies f = 0.$$

Se f é contínua em I, então $\|f\| = 0$ implica sim que $f = 0$.

A seminorma em $\mathrm{PWC}(I)$

Proposição (Desigualdade de Cauchy-Schwarz): Para quaisquer $f, g \in \mathrm{PWC}(I)$ vale

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

Demonstração: O polinômio $\|f\|^2 T^2 + 2\langle f, g\rangle T + \|g\|^2$ tem discriminante negativo.

Corolário (Desigualdade triangular): Para quaisquer $f, g \in \mathrm{PWC}(I)$ vale

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Demonstração: Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que $\|f + g\|^2 \leqslant (\|f\| + \|g\|)^2$.

A seminorma em $\mathrm{PWC}(I)$

Corolário (Teorema de Pitágoras): Para quaisquer $f, g \in \mathrm{PWC}(I)$ vale

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

se, e somente se, f e g são ortogonais, *i.e.*, $\langle f, g \rangle = 0$.

Demonstração: Basta observar que

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2 \cdot \langle f, g \rangle + \|g\|^2.$$

A função $\| \cdot \|$ em $\mathrm{PWC}(I)$ se comporta como a norma (valor absoluto) em $\mathbb{R}$, exceto que em $\mathrm{PWC}(I)$ existem funções não nulas com norma nula (necessariamente descontínuas), razão pela qual $\| \cdot \|$ é chamada de seminorma. Essa seminorma induz uma noção de distância entre funções em $\mathrm{PWC}(I)$, medida em termos de uma integral em I.

A seminorma em $\mathrm{PWC}(I)$

Reescrevendo a proposição da última aula...

A proposição que vimos no passado sobre integrais de produtos de senos e cossenos pode ser reescrita de maneira mais compacta como a seguir.

Proposição: Seja $L > 0$. Em $\mathrm{PWC}([-L, L])$ valem:

— $\langle \varphi_n, \psi_m \rangle = 0$,

— $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = L\delta_{n,m}$,

— $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = L\delta_{n,m}$, desde que $n \neq 0$ ou $m \neq 0$, e

— $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 2L$.

Nas igualdades acima, $\delta_{n,m}$ denota o delta de Kronecker.

Essa proposição diz que quaisquer duas funções distintas no conjunto $\{\psi_n \mid n \geqslant 0\} \cup \{\varphi_k \mid k \geqslant 1\}$ são ortogonais e, portanto, linearmente independentes.

A seminorma em $\mathrm{PWC}(I)$

…e os coeficientes de Fourier.

As expressões para os coeficientes de Fourier de uma função $f \in \mathrm{PWC}([-L, L])$ também podem ser reescritas como abaixo:

$$a_n = \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{L} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{L}.$$

Com isso, a série de Fourier de f também pode ser reescrita como

$$S_f(x) = \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{\langle f, \psi_0 \rangle}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n + \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \right),$$

ou ainda:

$$S_f(x) = \frac{\langle f, \psi_0 \rangle}{\|\psi_0\|^2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\|\psi_n\|^2} \psi_n + \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n.$$

A seminorma em $\mathrm{PWC}(I)$

…e os coeficientes de Fourier.

Note que a função (vetor em $\mathrm{PWC}([-L, L])$)

$$\frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\|\psi_n\|^2}\psi_n = a_n \psi_n$$

é a projeção de f em ψ_n. Analogamente, a função

$$\frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n = b_n \varphi_n$$

é a projeção de f em φ_n. Logo, se

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{span}(\psi_0, \psi_1, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots) \leqslant \mathrm{PWC}([-L, L]),$$

temos que S_f, a série de Fourier de f, pode ser encarada como a projeção de f no subespaço $\mathcal{S}$.

Algumas desigualdades

PROPOSIÇÃO: Sejam $f \in \mathrm{PWC}([-L, L])$ e $(a_n)_{n\geqslant 0}$ e $(b_n)_{n\geqslant 1}$ seus coeficientes de Fourier, como anteriormente. Para quaisquer $N, K \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ e números reais c_n, $n = 0, \ldots, N$, e d_k, $k = 1, \ldots, K$, vale:

$$\left\| f - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n - \sum_{k=1}^{K} b_k \varphi_k \right\| \leqslant \left\| f - \frac{c_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n - \sum_{k=1}^{K} d_k \varphi_k \right\|$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, os c_n's forem iguais aos a_n's e os d_k's forem iguais aos b_k's.

Dito de outra maneira: dentre todas as combinações lineares das funções $\psi_0, \ldots, \psi_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_K$, aquela feita com os coeficientes de Fourier de f é a que minimiza a distância, medida através de $\| \cdot \|$, até a função f.

Algumas desigualdades

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\mathcal{S}_{NK} = \text{span}(\psi_0 = 1, \ldots, \psi_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_K)$,

$$g(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{k=1}^{K} b_k \varphi_k\right),$$

e

$$h(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{a_0 - c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n - c_n)\psi_n + \sum_{k=1}^{K} (b_k - d_k)\varphi_k.$$

Temos que g é ortogonal a $\mathcal{S}_{NK}$ e $h \in \mathcal{S}_{NK}$. Segue do teorema de Pitágoras que

$$\left\| f - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n - \sum_{k=1}^{K} b_k \varphi_k \right\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2 \geqslant \|g\|^2.$$

Além disso, se $\|h\| = 0$ então $h = 0$ pois h é contínua. O resto segue da independência linear (ortogonalidade) das φ's e ψ's.

Algumas desigualdades

PROPOSIÇÃO (DESIGUALDADE DE BESSEL): Sejam $f \in \mathrm{PWC}([-L, L])$ e $(a_n)_{n\geqslant 0}$ e $(b_n)_{n\geqslant 1}$ seus coeficientes de Fourier, como anteriormente.
Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty.$$

Mais ainda, vale:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leqslant \frac{\|f\|^2}{L}.$$

Algumas desigualdades

Demonstração: Basta observar que as quantidades

$$\left\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{k=1}^{K} b_k \varphi_k \right) \right\|^2$$

e

$$\|f\|^2 - L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{k=1}^{K} b_k^2 \right)$$

são iguais.

COROLÁRIO (LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE): Sejam $f \in \mathrm{PWC}([-L, L])$ e $(a_n)_{n\geqslant 0}$ e $(b_n)_{n\geqslant 1}$ seus coeficientes de Fourier, como anteriormente. Então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$$

DEMONSTRAÇÃO: Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

temos que $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$, que é equivalente a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Vale o mesmo para a sequência $(b_n)_{n\geqslant 1}$.