Supremo e ínfimo em $\mathbb{R}$

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

junho de 2019

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo destas notas é introduzir as noções de supremo e ínfimo de subconjuntos do conjunto dos números reais, assim como algums propriedades com suas demonstrações.

No capítulo 2 trataremos do supremo, no capítulo 3, do ínfimo, no capítulo 4 apresentamos as demonstrações dos resultados enunciados no capítulo 2 e no capítulo 5 apresentamos as demonstrações dos resultados enunciados no capítulo 3.

Capítulo 2

Supremo

2.1 Definição

Inciaremos com a:

Definição 2.1.1 *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$, *não vazio.*

Se existir $u \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x \leq u, \quad \textit{para todo} \quad x \in X,$$

diremos que o conjunto X *é* <u>limitado superiormente</u> *em* $\mathbb{R}$.

Neste caso o número real <u>u</u> *será dito* <u>limitante (ou cota) superior</u> *do conjunto* X.

De modo semelhante, se existir $l \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$l \leq x, \quad \textit{para todo} \quad x \in X,$$

diremos que o conjunto X *é* <u>limitado inferiormente</u>*..*

Neste caso o número real <u>l</u> *será dito* <u>limitante (ou cota) inferior</u> *do conjunto* X.

Diremos que o conjuto X *é* <u>limitado</u> *se for limitado superiormente e inferiormente..*

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.1.2 *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$, *um subconjunto não vazio e limitado superiormente.*

Suponhamos que exista $u_o \in \mathbb{R}$ *com as seguintes propriedades:*

(i) *o número real* u_o *é um limitante superior do conjunto* X*;*

(ii) *o número real* u_o *é o menor com a propriedade acima, isto é, se*

$$a < u_o,$$

então <u>a</u> *não será limitante superior do conjunto* X.

Neste caso diremos que o número real u_o *é o* **menor limitante superior** *do conjunto* X*, ou ainda, que ele é o* **supremo** *do conjunto* X *e será denotado por* $\sup(X)$*, isto é,*

$$\sup(X) \doteq u_o\,.$$

Observação 2.1.1 *Um modo equivalente de reescrever a Definição 2 acima é a seguinte:*

$$u_o = \sup(X)$$

se, e somente se,

(i) *o número real* u_o *é um limitante superior do conjunto* X*;*

(ii) *Se* $u \in \mathbb{R}$ *é um limitante superior do conjunto* X*, então deveremos ter*

$$u_o \leq u\,,$$

ou ainda, dado $\varepsilon > 0$*, o número real* $u_o - \varepsilon$*, não pode ser limitante superior do conjunto* X*, ou seja,*

$$\begin{aligned} \textit{podemos encontrar} \quad & x \in X\,, \\ \textit{de modo que:} \quad & u_o - \varepsilon < x\,, \end{aligned}$$

ou ainda, dado $n \in \mathbb{N}$*, o número real* $u_o - \dfrac{1}{n}$*, não pode ser limitante superior do conjunto* X*, ou seja,*

$$\begin{aligned} \textit{podemos encontrar} \quad & x \in X\,, \\ \textit{de modo que:} \quad & u_o - \frac{1}{n} < x \leq u_o\,. \end{aligned}$$

2.2 Propriedades associadas ao supremo

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades associadas ao supremo de um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Começaremos pela:

Proposição 2.2.1 *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio, limitado superiormente e* $c > 0$.

Então o conjunto $c \cdot X$ *admite supremo.*

Alem disso, temos:

$$\sup(c \cdot X) = c \cdot \sup(X)\,. \tag{2.1}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 4.1.

□

Para a soma de dois conjuntos, temos a:

Proposição 2.2.2 *Sejam* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *dois conjuntos não vazios e limitados superiormente.*

Então o conjunto $X + Y$ *admite supremo.*

Alem disso, temos:

$$\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)\,. \tag{2.2}$$

Demonstração:

Veja Demonstração 4.2.

□

Para o produto de dois conjuntos, temos a:

Proposição 2.2.3 *Sejam* $X, Y \subseteq [0, \infty)$ *dois conjuntos não vazios e limitados superiormente.*

Então o conjunto $X \cdot Y$ *admite supremo.*

Além disso, temos:

$$\sup(X \cdot Y) = \sup(X) \cdot \sup(Y)\,. \tag{2.3}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 4.3.

□

Observação 2.2.1 *As conclusões da Proposição 2.2.3 podem* **não** *ocorrer, se*

$$X, Y \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Para um contra-exemplo que associado a situação acima veja a Demonstação 4.4.

Temos também a:

Proposição 2.2.4 *Sejam* $\emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ *dois conjuntos e* Y *limitado superiormente.*

Então o conjunto X *admite supremo.*

Alem disso, temos:

$$\sup(X) \leq \sup(Y)\,. \tag{2.4}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 4.5.

□

Para a intersecção de dois conjuntos, temos a:

Proposição 2.2.5 *Sejam* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *dois conjuntos, limitados superiormente, tais que*

$$X \cap Y \neq \emptyset .$$

Então o conjunto $X \cap Y$ *admite supremo.*

Alem disso, temos:

$$\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup(X), \sup(Y)\} . \tag{2.5}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 4.6.

□

Observação 2.2.2 *Em geral, pode* **não** *ocorrer uma igualdade em* (2.5)*, na Proposição 2.2.5.*

Para um contra-exemplo associado à situação acima veja a Demonstração 4.7.

Para a reunião de dois conjuntos, temos a:

Proposição 2.2.6 *Sejam* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *dois conjuntos não vazios, limitados superiormente.*

Então o conjunto $X \cup Y$ *admite supremo.*

Além disso, temos:

$$\sup(X \cup Y) = \max\{\sup(X), \sup(Y)\} . \tag{2.6}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 4.8.

□

Podemos estender a Proposição 2.2.6 acima para um **número finito** de conjuntos, mais precisamente, temos a:

Proposição 2.2.7 *Sejam* $X_i \subseteq \mathbb{R}$ *para* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *conjuntos não vazios, limitados superiormente.*

Então o conjunto $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ *admite supremo.*

Além disso, temos:

$$\sup\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) = \max\{\sup(X_i) ; i \in \{1, 2, \cdots, n\}\} . \tag{2.7}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 4.9.

□

Observação 2.2.3

Pergunta: *será que podemos na Proposição 2.2.7 acima, trocar a* **família finita**, *por uma* **família enumerável infinita** *e obter as mesmas conclusões ?*

Mais precisamnte, se para cada para $i \in \mathbb{N}$, *o conjunto* $X_i \subseteq \mathbb{R}$ *é não vazio e limitado superiormente, podemos garantir que o conjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

admite supremo ?

Caso afirmativo, será que valerá a identidade

$$\sup\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \max\{\sup(X_i)\,;\, i \in \mathbb{N}\}\ ? \tag{2.8}$$

Para a resposta a esta pergunta veja a Demonstração 4.10.

Para a diferença de dois conjuntos, temos a:

Proposição 2.2.8 *Sejam* $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, *com* Y *é limitado superiormente e* $Y \setminus X \neq \emptyset$.

Então o conjunto $Y \setminus X$ *admite supremo.*

Além disso, temos:

$$\sup(Y \setminus X) \leq \sup(Y)\,. \tag{2.9}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 4.11.

□

Capítulo 3

Ínfimo

3.1 Definição

Inciaremos com a:

Definição 3.1.1 *Seja* $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}$, *um subconjunto não vazio e limitado inferiormente.*
Suponhamos que exista $\mathrm{l}_o \in \mathbb{R}$ *com as seguintes propriedades:*

(i) *o número real* l_o *é um limitante inferior do conjunto* X*;*

(ii) *o número real* l_o *é o maior com a propriedade acima, isto é, se*

$$\mathrm{l}_o < \mathrm{b}\,,$$

então <u>b</u> *não será limitante inferior do conjunto* X.

Neste caso diremos que l_o *é o* <u>**maior limitante inferior**</u> *do conjunto* X, *ou ainda, que ele é o* <u>**ínfimo**</u> *do conjunto* X *e será denotado por* $\inf(\mathrm{X})$, *isto é,*

$$\inf(\mathrm{X}) \doteq \mathrm{l}_o\,.$$

Observação 3.1.1 *Um modo equivalente de reescrever a Definição 3 acima é a seguinte:*

$$\mathrm{l}_o = \inf(\mathrm{X})$$

se, e somente se,

(i) *o número real* l_o *é um limitante inferior do conjunto* X*;*

(ii) *Se* $\mathrm{l} \in \mathbb{R}$ *é um limitante inferior do conjunto* X, *então deveremos ter*

$$\mathrm{l} \leq \mathrm{l}_o\,,$$

ou ainda, dado $\varepsilon > 0$*, o número real* $l_o + \varepsilon$*, não pode ser limitante inferior do conjunto* X*, ou seja,*

$$\textit{podemos encontrar} \quad x \in X\,,$$
$$\textit{de modo que:} \quad x < l_o + \varepsilon\,,$$

ou ainda, dado $n \in \mathbb{N}$*, o número real* $u_o + \dfrac{1}{n}$*, não pode ser limitante inferior do conjunto* X*, ou seja,*

$$\textit{podemos encontrar} \quad x \in X\,,$$
$$\textit{de modo que:} \quad l_o < x \leq l_o + \frac{1}{n}\,.$$

3.2 Propriedades associadas ao ínfimo

Iniciaremos pela:

Proposição 3.2.1 *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio, limitado inferiormente e* $c > 0$*.*

Então o conjunto $c \cdot X$ *admite ínfimo.*

Além disso, temos:

$$\inf(c \cdot X) = c \cdot \inf(X)\,. \tag{3.1}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 5.1.

□

De modo análogo, temos a:

Proposição 3.2.2 *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio, limitado superiormente e* $c < 0$*.*

Então o conjunto $c \cdot X$ *admite ínfimo.*

Além disso, temos:

$$\inf(c \cdot X) = c \cdot \sup(X)\,. \tag{3.2}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 5.2.

□

Observação 3.2.1 *Em particular, se* $X \subseteq \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio e limitado superiormente, da Proposição 3.2.2 acima, considerando-se*

$$c \doteq -1\,,$$

segue que o conjunto $-X$ *é não vazio, limitado inferiormente, desta forma existe*

$$\inf(-X) \in \mathbb{R}$$

e, além disso, (de (3.2) *com* $c = -1$*)*

$$\inf(-X) = -\sup(X)\,. \tag{3.3}$$

Temos também a:

Proposição 3.2.3 *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio, limitado inferiormente e* $c < 0$*.*

Então o conjunto $c \cdot X$ *admite supremo.*

Além disso, temos:

$$\sup(c \cdot X) = c \cdot \inf(X)\,. \tag{3.4}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 5.3.

□

Observação 3.2.2 *Em particular, se* $X \subseteq \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio e limitado inferiormente, da Proposição 3.2.3 acima, considerando-se*

$$c \doteq -1\,,$$

segue que o conjunto $-X$ *é não vazio, limitado superiormente, desta forma existe*

$$\sup(-X) \in \mathbb{R}$$

e, além disso, (de (3.4) *com* $c = -1$*)*

$$\sup(-X) = -\inf(X)\,. \tag{3.5}$$

Para a soma de dois conjuntos, temos a:

Proposição 3.2.4 *Sejam* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *dois conjuntos não vazios e limitados inferiormente.*

Mostre que o conjunto $X + Y$ *admite ínfimo e vale*

$$\inf(X+Y) = \inf(X) + \inf(Y)\,. \tag{3.6}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 5.4.

□

Para o produto de dois conjuntos, temos a:

Proposição 3.2.5 *Sejam*

$$X, Y \subseteq (0, \infty) \tag{3.7}$$

dois conjuntos não vazios.

Mostre que o conjunto $X \cdot Y$ admite ínfimo e vale

$$\inf(X \cdot Y) = \inf(X) \cdot \inf(Y). \tag{3.8}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 5.5.

□

Observação 3.2.3 *As conclusões da Proposição 3.2.5 podem* **não** *valer se*

$$X, Y \subseteq \mathbb{R}.$$

Para um contra-exemplo associado à situação acima veja a Demonstração 5.6.

Vejamos agora a:

Proposição 3.2.6 *Sejam $\emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ dois conjuntos, com Y limitado inferiormente.*

Então o conjunto X admite ínfimo.

Além disso, temos:

$$\inf(Y) \leq \inf(X). \tag{3.9}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 5.7.

□

Para a intersecção de dois conjuntos, temos a:

Proposição 3.2.7 *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ dois conjuntos, limitados inferiormente tais que $X \cap Y \neq \emptyset$.*

Então o conjunto $X \cap Y$ admite ínfimo.

Além disso, temos:

$$\inf(X \cap Y) \geq \max\{\inf(X), \inf(Y)\}. \tag{3.10}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 5.8.

□

Observação 3.2.4 *Notemos que pode* **não** *ocorrer uma igualdade em (3.10), na Proposição 3.2.7.*

Para um contra-exemplo associado à situação acima veja a Demonstração 5.9.

Para a reunião de dois conjuntos, temos a:

Proposição 3.2.8 *Sejam* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *dois conjuntos não vazios, limitados inferiormente.*

Então o conjunto $X \cup Y$ *admite ínfimo.*

Além disso, temos:

$$\inf(X \cup Y) = \min\{\inf(X), \inf(Y)\}. \tag{3.11}$$

Resolução:

Veja a Demonstração 5.10.

□

Podemos estender a Proposição 3.2.8, para um **número finito** de conjuntos, mais precisamente:

Proposição 3.2.9 *Para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *seja* $X_i \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio e limitado inferiormente.*

Então o conjunto $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ *admite ínfimo.*

Além disso, temos:

$$\inf\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) = \min\{\inf(X_i)\,;\, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}. \tag{3.12}$$

Demonstração:

Veja a Demonstração 5.11.

□

Observação 3.2.5 **Pergunta:** *será que podemos, na Proposição 3.2.9 acima, trocar a* **família finita**, *por uma* **família enumerável infinita** *?*

Mais precisamente, se para cada $i \in \mathbb{N}$, *o conjunto* $X_i \subseteq \mathbb{R}$ *é não vazio e limitado inferiormente, podemos garantir que o conjunto* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ *admitirá ínfimo ?*

Caso afirmativo, vale a identidade

$$\inf\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \min\{\inf(X_i)\,;\, i \in \mathbb{N}\}\ ? \tag{3.13}$$

Para a resposta a essa pergunta veja a Demonstração 5.12.

Para a diferença entre dois conjuntos, temos a:

Proposição 3.2.10 *Sejam* $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{Y} \subseteq \mathbb{R}$ *dois conjuntos não vazios, onde* Y *é limitado inferiormente e* $\mathsf{Y} \setminus \mathsf{X} \neq \emptyset$.

Então o conjunto $\mathsf{Y} \setminus \mathsf{X}$ *admite ínfimo.*

Além disso, temos:

$$\inf(\mathsf{Y}) \leq \inf(\mathsf{Y} \setminus \mathsf{X})\,. \tag{3.14}$$

Resolução:

Veja a Demonstração 5.13.

□

Capítulo 4

Demonstrações das propriedades de supremo (ou seja, da seção 2.2)

Começaremos pela:

Demonstração 4.1 *da Proposição 2.2.1 :*

Como, por hipótese, $X \subseteq \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio e limitado superiormente, segue que existe*

$$\sup(X) \in \mathbb{R}.$$

Lembremos que

$$c \cdot X \doteq \{c \cdot x \,;\, x \in X\}.$$

Como o conjunto X *é não vazio, existe* $x_o \in X$*.*

Desta forma $c \cdot x_o \in c \cdot X$*, mostrando que* $c \cdot X$ *é não vazio.*

Por outro lado, como X *é limitado superiormente, podemos encontrar* $u \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$x \leq u, \quad \text{para todo } x \in X. \tag{4.1}$$

Multiplicando-se (4.1) por $c > 0$*, obteremos:*

$$c \cdot x \leq c \cdot u, \quad \text{para todo } x \in X. \tag{4.2}$$

Desta forma se $y \in c \cdot X$*, da definição do conjunto* $c \cdot X$*, teremos que*

$$y = c \cdot x, \quad \text{para algum} \quad x \in X,$$

$$\text{logo} \quad y = c \cdot x \overset{(4.2)}{\leq} c \cdot u, \tag{4.3}$$

ou seja, $c \cdot u$ *é um limitante superior do conjunto* $c \cdot X$*, assim o conjunto* $c \cdot X$ *é limitado superiormente.*

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o supremo do conjunto $c \cdot X$*, ou seja,*

$$\sup(c \cdot X) \in \mathbb{R}.$$

Notemos também que, como $\sup(X)$ *é um limitante superior do conjunto* X, *podemos considerar* $u \doteq \sup(X)$ *em* (4.3) *(veja também* (4.1)*), ou seja*

$$y \leq c \cdot \sup(X)\,, \quad \text{para todo } y \in c \cdot X\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad \sup(c \cdot X) \leq c \cdot \sup(X)\,. \tag{4.4}$$

Por outro lado, notemos que, para $x \in X$*, temos:*

$$c \cdot x \leq \sup(c \cdot X)\,, \tag{4.5}$$

dividindo-se (4.5) *por* $c > 0$, *obteremos:* $x \leq \dfrac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)\,,$

isto é, o número real $\dfrac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)$ *é um limitante superior do conjunto* X *logo deveremos ter*

$$\sup(X) \leq \frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)\,, \tag{4.6}$$

multiplicando-se (4.6) *por* $c > 0$, *obteremos:* $c \cdot \sup(X) \leq \sup(c \cdot X)$

que juntamente com (4.4)*, mostra a validade da identidade* (2.1)*, completando.*

$\square$

Tratemos agora da:

Demonstração 4.2 *da Proposição 2.2.2 :*

Como, por hipótese, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *são conjuntos não vazios e limitados superiormente, segue que existem*

$$\sup(X)\,, \sup(Y) \in \mathbb{R}\,.$$

Lembremos que

$$X + Y \doteq \{x + y \; ; \; x \in X \text{ e } y \in Y\}\,.$$

Como os conjuntos X, Y *são não vazios, existem* $x_o \in X$ *e* $y_o \in Y$.

Desta forma, pela definição do conjunto $X + Y$, *temos que* $x_o + y_o \in X + Y$, *mostrando que o conjunto* $X + Y$ *é não vazio.*

Por outro lado, como os conjuntos X, Y *são limitados superiormente, podemos encontrar* $u_X, u_Y \in \mathbb{R}$, *de modo que*

$$x \leq u_X\,, \quad \text{para todo } x \in X \tag{4.7}$$
$$\text{e} \quad y \leq u_Y \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{4.8}$$

Somando-se (4.7) *e* (4.8)*, obteremos:* $x + y \leq u_X + u_Y\,,$ *para todo* $x \in X$ *e* $y \in Y$, (4.9)

mostrando que o número real $u_X + u_Y$ *é um limitante superior do conjunto* $X + Y$, *ou seja, o conjunto* $X + Y$ *é limitado superiormente.*

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o supremo do conjunto $X + Y$, *ou seja,*

$$\sup(X + Y) \in \mathbb{R}\,.$$

(i) *Afirmamos que o número real* $\sup(X)+\sup(Y)$ *é um limitante superio de* $X+Y$.

De fato, como$\sup(X)$ *e* $\sup(Y)$ *são limitantes superiores dos conjuntos* X *e* Y, *respectivamente, podemos considerar* $u_X \doteq \sup(X)$ *e* $u_Y \doteq \sup(Y)$, *em* (4.7) *e* (4.8), *respectivamente.*

Em particular, de (4.9), *segue que*

$$x + y \leq \sup(X) + \sup(Y)\,, \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ e } y \in Y\,,$$

isto é, o número real $\sup(X) + \sup(Y)$ *é um limitante superior do conjunto* $X + Y$.

(ii) *Afirmamos que o número real* $\sup(X) + \sup(Y)$ *é o menor com a propriedade (i).*

De fato pois, dado $\varepsilon > 0$, *da definição de supremo, segue que existem* $x_\varepsilon \in X$ *e* $y_\varepsilon \in Y$, *de modo que*

$$\sup(X) - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon\,, \tag{4.10}$$

$$\sup(Y) - \frac{\varepsilon}{2} < y_\varepsilon\,. \tag{4.11}$$

Somando-se (4.10) *e* (4.11), *segue que:* $\left(\sup(X) - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\sup(Y) - \frac{\varepsilon}{2}\right) < x_\varepsilon + y_\varepsilon\,,$

ou seja, $\sup(X) + \sup(Y) - \varepsilon < x_\varepsilon + y_\varepsilon\,,$

ou seja, podemos encontrar $z_\varepsilon \in X + Y$ *(na verdade,* $z_\varepsilon \doteq x_\varepsilon + y_\varepsilon$*), de modo que*

$$\sup(X) + \sup(Y) - \varepsilon < z_\varepsilon\,,$$

mostrando que o número real $\sup(X)+\sup(Y)$ *não pode ser limitante superior do conjunto* $X + Y$.

Portanto o número real $\sup(X) + \sup(Y)$ *é o menor limitante superior do conjunto* $X + Y$, *ou seja,*

$$\sup(X) + \sup(Y) = \sup(X + Y)\,,$$

completando a demonstração.

□

Tratemos agora da

Demonstração 4.3 *da Proposição 2.2.3 :*

Notemos que, do fato que $X, Y \subseteq [0, \infty)$ *e limitados superiormente, segue que existem*

$$\sup(X)\,, \sup(Y) \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos que se

$$X = \{0\} \quad \textit{ou} \quad Y = \{0\}\,,$$
$$\textit{ou seja,} \quad \sup(X) = 0 \quad \textit{ou} \quad \sup(Y) = 0\,, \tag{4.12}$$

em qualquer um dos casos teremos

$$X \cdot Y = \{0\} \tag{4.13}$$

e assim $X \cdot Y$ *será não vazio e limitado superiormente, logo existe*

$$\sup(X \cdot Y) \in \mathbb{R}\,.$$

Alé disso,

$$\begin{aligned} \sup(X \cdot Y) &\overset{(4.13)}{=} 0 \\ &\overset{(4.12)}{=} \sup(X) \cdot \sup(Y)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (2.3) *neste caso.*

Por outro lado, se $X\,, Y \subseteq [0\,, \infty)$ *são tais que*

$$X\,, Y \neq \{0\}\,,$$

teremos

$$\sup(X)\,, \sup(Y) > 0\,. \tag{4.14}$$

Lembremos que

$$X \cdot Y \doteq \{x \cdot y \ ; \ x \in X \ \textit{e} \ y \in Y\}\,.$$

Como os conjuntos $X\,, Y$ *são não vazios, existem* $x_o \in X$ *e* $y_o \in Y$.

Desta forma, pela definição do conjunto $X \cdot Y$*, temos que* $x_o \cdot y_o \in X + Y$*, mostrando que o conjunto* $X \cdot Y$ *é não vazio.*

Por outro lado, como os conjuntos $X\,, Y$ *são limitados superiormente, podemos encontrar* $u_X\,, u_Y \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$0 \leq x \leq u_X\,, \quad \textit{para todo } x \in X \tag{4.15}$$

$$\textit{e} \quad 0 \leq y \leq u_Y \quad \textit{para todo } x \in X\,. \tag{4.16}$$

Multiplicando-se (4.15) *e* (4.16) *(são sambos não negativos), obteremos:*

$$0 \leq x \cdot y \leq u_X \cdot u_Y\,, \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ e } y \in Y\,, \tag{4.17}$$

mostrando que o número real $u_X \cdot u_Y$ *é um limitante superior do conjunto* $X \cdot Y$*, ou seja, o conjunto* $X \cdot Y$ *é limitado superiormente, logo existe*

$$\sup(X \cdot Y) \in \mathbb{R}\,.$$

Em particular, de (4.17)*, segue que*

$$x \cdot y \leq \sup(X) \cdot \sup(Y)\,, \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ e } y \in Y\,, \tag{4.18}$$

isto é, o número real $\sup(X) \cdot \sup(Y)$ *é um limitante superior do conjunto* $X \cdot Y$.

Portanto teremos

$$\sup(X \cdot Y) \leq \sup(X) \cdot \sup(Y)\,. \tag{4.19}$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\sup(X \cdot Y) < \sup(X) \cdot \sup(Y)\,. \tag{4.20}$$

Dado $\varepsilon > 0$*, da definição de supremo, segue que existem* $x_\varepsilon \in X$ *e* $y_\varepsilon \in Y$*, de modo que*

$$\sup(X) - \varepsilon < x_\varepsilon\,, \tag{4.21}$$

$$\sup(Y) - \varepsilon < y_\varepsilon\,. \tag{4.22}$$

Multiplicando-se (4.21) *e* (4.22)*, temos:*

$$[\sup(X) - \varepsilon] \cdot [\sup(Y) - \varepsilon] < x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,,$$

$$\textit{ou:} \quad \sup(X) \cdot \sup(Y) - \varepsilon \cdot [\sup(X) + \sup(Y)] + \varepsilon^2 < x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,, \tag{4.23}$$

Por outro lado, para todo $x \in X$ *e* $y \in Y$*, teremos*

$$x \cdot y \leq \sup(X \cdot Y) \overset{(4.20)}{<} \sup(X) \cdot \sup(Y)\,.$$

Em particular, para cada $\varepsilon > 0$ *(com* $x_\varepsilon \in X$ *e* $y_\varepsilon \in Y$ *com em* (4.21) *e* (4.22)*, respectivamente) teremos:*

$$x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon < \sup(X) \cdot \sup(Y)\,. \tag{4.24}$$

Consideremos

$$\varepsilon \doteq \sup(X) + \sup(Y) \overset{(4.14)}{>} 0 \tag{4.25}$$

de (4.23)*, teríamos*

$$\sup(X) \cdot \sup(Y) - \varepsilon \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 < x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,,$$

$$\textit{ou seja,} \quad \sup(X) \cdot \sup(Y) < x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,. \tag{4.26}$$

Logo,

$$x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon \overset{(4.24)}{<} \sup(X) \cdot \sup(Y) \overset{(4.26)}{<} x_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\,,$$

o que é um absurdo!

Portanto podemos concluir que

$$\sup(X) \cdot \sup(Y) \leq \sup(X \cdot Y)\,,$$

que juntamente com (4.19), implica na validade da identidade (2.3), completando a demonstração.

□

Temos agora a:

Demonstração 4.4 *da Observação 2.2.1 :*

Um contra-exemplo associado a questão colocada na Observação 2.2.1 pode ser dado por:

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$X \doteq (-\infty\,, 0)\,, \tag{4.27}$$

$$e \quad Y \doteq (-\infty\,, -1)\;. \tag{4.28}$$

Notemos que X *e* Y *são não vazios e limitados superiormente (*0 *é limitante superior de ambos).*

Notemos que

$$X \cdot Y \overset{(4.27)\,e\,(4.28)}{=} (0\,, \infty)\,. \tag{4.29}$$

ou seja, o conjunto $X \cdot Y$ **não** *é limitado superiormente , mostrando que o conjunto* $X \cdot Y$ *não possui supremo.*

□

Tratemos da

Demonstração 4.5 *da Proposição 2.2.4 :*

Com $X \neq \emptyset$ *e* $X \subseteq Y$*, segue que* $Y \neq \emptyset$*.*

Do fato que $Y \neq \emptyset$ *e é limitado superiormente, segue que existe*

$$\sup(Y) \in \mathbb{R}\,.$$

Como, em particular, $\sup(Y)$ *é um limitante superior de* Y*, segue que*

$$y \leq \sup(Y)\,, \quad para \quad y \in Y\,. \tag{4.30}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & x \in X \subseteq Y\,, \\ \textit{de (4.30), teremos:} \quad & x \leq \sup(Y)\,, \end{aligned} \tag{4.31}$$

ou seja, X *é limitado superiormente.*

Portanto, existe

$$\sup(X) \in \mathbb{R}\,.$$

De (4.31), temos que $\sup(Y)$ *é um limitante superior de* X*, sendo* $\sup(X)$ *o menor limitante superior de* X*, segue que*

$$\sup(X) \leq \sup(Y)\,,$$

completando a demonstração.

$\square$

Temos agora a:

Demonstração 4.6 *da Proposição 2.2.5 :*

$$\begin{aligned} \textit{Como} \quad & X \cap Y \neq \emptyset\,, \\ & X \cap Y \subseteq X \\ \textit{e} \quad & X \cap Y \subseteq Y\,, \end{aligned}$$

segue que

$$X\,, Y \neq \emptyset\,.$$

Além disso, sendo X *e* Y *limitados superiormente, podemos garantir que existem*

$$\sup(X) \quad \textit{e} \ \sup(Y)\,.$$

Logo, do Exemplo 2.2.4 , segue que $X \cap Y$ *é limitados superiormente e, de (2.5), teremos*

$$\begin{aligned} & \sup(X \cap Y) \leq \sup(X) \\ & \sup(X \cap Y) \leq \sup(Y)\,, \\ \textit{ou seja,} \quad & \sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup(X)\,, \sup(Y)\}\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração.

$\square$

Vejamos agora a

Demonstração 4.7 *da Observação 2.2.2 :*

Um contra-exemplo associado a questão colocada na Observação 2.2.2, pode ser dado por:

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$X \doteq (0\,,1)\,, \tag{4.32}$$

$$e \quad Y \doteq \left(\frac{1}{3}\,,\frac{1}{2}\right) \cup (2\,,3)\,. \tag{4.33}$$

Com isto teremos

$$X \cap Y \overset{(4.32)\,e\,(4.33)}{=} \left(\frac{1}{3}\,,\frac{1}{2}\right)\,, \tag{4.34}$$

Desta forma temos que $X\,,Y\,,X\cap Y \neq \emptyset$*, são limitados superiormente (por exemplo,* 1*,* 3 *e* $\frac{1}{2}$*, respectivamente) e, além disso*

$$\sup(X) \overset{(4.32)}{=} 1\,, \tag{4.35}$$

$$\sup(Y) \overset{(4.33)}{=} 3\,, \tag{4.36}$$

$$e \quad \sup(X \cap Y) \overset{(4.34)}{=} \frac{1}{2}\,. \tag{4.37}$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned} \sup(X \cap Y) &\overset{(4.37)}{=} \frac{1}{2} \\ &\neq 1 = \min\{1\,,3\} \\ &\overset{(4.35)\,e\,(4.36)}{=} = \min\{\sup(X)\,,\sup(Y)\}\,, \\ \textit{ou ainda,} \quad \sup(X \cap Y) &< \min\{\sup(X)\,,\sup(Y)\}\,, \end{aligned}$$

mostrando que pode não ocorrer a igualdade em (2.5) *na Proposição 2.2.5.*

□

□

Demonstração 4.8 *da Proposição 2.2.6 :*

Como, por hipótese, $X\,,Y \subseteq \mathbb{R}$ *são conjuntos não vazios e limitados superiormente, segue que existem*

$$\sup(X)\,,\sup(Y) \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos que, como $X \neq \emptyset$ *(e* Y *também), teremos*

$$X \cup Y \neq \emptyset\,.$$

Por outro lado, como os conjuntos X, Y *são limitados superiormente, podemos encontrar* $u_X, u_Y \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq x \leq u_X\,, \quad \textit{para todo } x \in X && (4.38)\\
e \quad & 0 \leq y \leq u_Y \quad \textit{para todo } y \in Y\,. && (4.39)
\end{aligned}
$$

Consideremos

$$
u \doteq \max\{u_X\,, u_Y\}\,. \tag{4.40}
$$

$$
\begin{aligned}
\textit{Desta forma, se } z \in X \cup Y, \textit{ teremos:} \quad & z \in X \quad \textit{ou} \quad z \in Y\,,\\
\textit{logo} \quad & z \leq u_X \quad \textit{ou} \quad z \leq u_U\,,\\
\textit{ou seja,} \quad & z \leq \max\{u_X\,, u_Y\} \overset{(4.38)}{=} u\,. && (4.41)
\end{aligned}
$$

mostrando que o número real $u = \max\{u_X\,, u_Y\}$ *é um limitante superior do conjunto* $X \cup Y$*, ou seja, o conjunto* $X \cup Y$ *é limitado superiormente, logo existe*

$$
\sup(X \cup Y) \in \mathbb{R}\,.
$$

(i) Afirmamos que $\max\{\sup(X)\,, \sup(Y)\}$ *é um limitante superior do conjunto* $X \cup Y$*.*

De fato, como $\sup(X)$ *é um limitante superior do conjunto* X *e* $\sup(Y)$ *é um limitante superior do conjunto* Y*, podemos considerar*

$$
u_X \doteq \sup(X) \quad e \quad u_Y \doteq \sup(Y)
$$

em (4.41)*, ou seja,*

$$
\begin{aligned}
& z \leq \max\{\sup(X)\,, \sup(Y)\}\,,\\
\textit{para todo} \quad & z \in X \cup Y\,,
\end{aligned}
$$

mostrando que $\max\{\sup(X)\,, \sup(Y)\}$ *é um limitante superior do conjunto* $X \cup Y$*.*

(ii) Mostremos que $\max\{\sup(X)\,, \sup(Y)\}$ *é o menor com a propriedade (i).*

De fato pois, dado $\varepsilon > 0$*, mostremos que*

$$
\max\{\sup(X)\,, \sup(Y)\} - \varepsilon
$$

não *é um limitante superior do conjunto* $X \cup Y$*.*

Para tanto, consideremos os seguintes casos:

(a) suponhamos que

$$
\max\{\sup(X)\,, \sup(Y)\} = \sup(X)\,. \tag{4.42}
$$

Logo, como $\sup(X)$ *é o menor limitante superior de* X*, podemos encontrar* $x \in X$*, de modo que*

$$\max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\} - \varepsilon \overset{(4.42)}{=} \sup(X) - \varepsilon < x\,,$$

ou seja, $x \in X \subseteq X \cup Y$ *e* $\quad \max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\} - \varepsilon < x\,,$

mostrando que

$$\max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\} - \varepsilon \overset{(4.42)}{=} \sup(X) - \varepsilon$$

não é um limitante superior de $X \cup Y$*, ou seja,*

$$\sup(X \cup Y) = \max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\}\,,$$

(b) suponhamos agora que

$$\max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\} = \sup(Y)\,. \tag{4.43}$$

Logo, como $\sup(Y)$ *é o menor limitante superior de* Y*, podemos encontrar* $y \in Y$*, de modo que*

$$\max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\} - \varepsilon \overset{(4.43)}{=} \sup(Y) - \varepsilon < y\,,$$

ou seja, $x \in Y \subseteq X \cup Y$ *e* $\quad \max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\} - \varepsilon < y\,,$

mostrando que

$$\max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\} - \varepsilon \overset{(4.43)}{=} \sup(Y) - \varepsilon$$

não é um limitante superior de $X \cup Y$*, ou seja,*

$$\sup(X \cup Y) = \max\{\sup(X)\,,\sup(Y)\}\,,$$

completando a demonstração.

□

Vejamos agora a:

Demonstração 4.9 *da Proposição 2.2.7 :*
Sugestão: *utilize a Proposição 2.2.6 e indução sobre* $n \in \mathbb{N}$.

□

Temos agora a

Demonstração 4.10 *da Observação 2.2.3 :*

A resposta a pergunta formulada na Observação 2.2.3, é **<u>não</u>**.

Notemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, *temos* $X_i \neq \emptyset$, *teremos*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \neq \emptyset .$$

Mas se para cada $i \in \mathbb{N}$, *temos que* X_i *é limitado superiormente, isto* **<u>não</u>** *implicará, necessariamente, que o conjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

é limitado superiormente e portanto poderá não admitir supremo.

Neste caso, não fará sentido a identidade (2.8).

Para ver isto, consideremos o seguinte contra-exemplo:

Para cada $i \in \mathbb{N}$, *seja*

$$X_i \doteq [0 , i] .$$

Desta forma, para cada $i \in \mathbb{N}$, *temos que o conjunto* X_i *é não vazio e limitado superiormente.*

Porém

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = [0 , \infty)$$

que não é limitado superiormente e portanto não admite supremo em $\mathbb{R}$.

$\square$

Temos também a:

Demonstração 4.11 *da Proposição 2.2.8 :*

$$\begin{aligned} \textit{Como} \quad & Y \setminus Y \neq \emptyset , \\ e \quad & Y \setminus X \subseteq Y \end{aligned}$$

segue que

$$Y \neq \emptyset .$$

Além disso, sendo Y *limitados superiormente, podemos garantir existe*

$$\sup(Y) .$$

Logo, da Proposição 2.2.4 , segue que $Y \setminus X$ *é limitado superiormente e, de* (2.9), *teremos*

$$\sup(Y \setminus X) \leq \sup(Y)$$

completando a demonstração.

$\square$

Capítulo 5

Demonstrações das propriedades relacionadas ao ínfimo (ou seja, da seção 3.2)

Iniciaremos pela:

Demonstração 5.1 *da Proposição 3.2.1 :*

Como, por hipótese, $X \subseteq \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio e limitado inferiormente, segue que existe*

$$\inf(X) \in \mathbb{R} .$$

Lembremos que

$$c \cdot X \doteq \{c \cdot x \; ; \, x \in X\} .$$

Como o conjunto X *é não vazio, existe* $x_o \in X$.

Desta forma $c \cdot x_o \in c \cdot X$*, mostrando que o conjunto* $c \cdot X$ *é não vazio.*

Por outro lado, como X *é limitado inferiormente, podemos encontrar* $l \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$l \leq x , \quad \text{para todo } x \in X . \tag{5.1}$$

Multiplicando-se (5.1) *por* $c > 0$*, obteremos:*

$$c \cdot l \leq l \cdot x , \quad \text{para todo } x \in X . \tag{5.2}$$

Desta forma se $y \in c \cdot X$*, da definição do conjunto* $c \cdot X$*, teremos que*

$$y = c \cdot x , \quad \text{para algum} \quad x \in X ,$$

$$\text{logo} \quad c \cdot l \overset{(5.2)}{\leq} y = c \cdot x , \tag{5.3}$$

ou seja, $c \cdot l$ *é um limitante inferior do conjunto* $c \cdot X$*, assim o conjunto* $c \cdot X$ *é limitado inferiormente.*

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o ínfimo do conjunto $c \cdot X$*, ou seja,*

$$\inf(c \cdot X) \in \mathbb{R} .$$

Notemos também que, como $\inf(X)$ *é um limitante inferior do conjunto* X*, podemos considerar* $l \doteq \inf(X)$ *em* (5.3) *(veja também* (5.1)*), ou seja*

$$\begin{aligned} & c \cdot \inf(X) \leq y\,, \ \textit{para todo } y \in c \cdot X\,, \\ \textit{ou seja,} \quad & c \cdot \inf(X) \leq \inf(c \cdot X)\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Por outro lado, notemos que, para $x \in X$*, temos:*

$$\inf(c \cdot X) \leq c \cdot x\,, \tag{5.5}$$

$$\textit{dividindo-se (5.5) por } c > 0, \textit{ obteremos: } \quad \frac{1}{c} \cdot \inf(c \cdot X) \leq x\,,$$

isto é, o número real $\dfrac{1}{c} \cdot \inf(c \cdot X)$ *é um limitante inferior do conjunto* X*, logo deveremos ter*

$$\frac{1}{c} \cdot \inf(c \cdot X) \leq \inf(X)\,, \tag{5.6}$$

$$\textit{multiplicando-se (5.6) por } c > 0, \textit{ obteremos: } \quad \inf c \cdot (X) \leq c \cdot \inf(X)$$

que juntamente com (5.4)*, mostra a validade da identidade* (3.1)*, completando a demonstração.*

□

Tratemos agora da

Demonstração 5.2 *da Proposição 3.2.2 :*

Como, por hipótese, $X \subseteq \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio e limitado superiormente, segue que existe*

$$\sup(X) \in \mathbb{R}\,.$$

Lembremos que

$$c \cdot X \doteq \{c \cdot x \,;\, x \in X\}\,.$$

Como o conjunto X *é não vazio, existe* $x_o \in X$.

Desta forma $c \cdot x_o \in c \cdot X$*, mostrando que* $c \cdot X$ *é não vazio.*

Por outro lado, como X *é limitado superiormente, podemos encontrar* $u \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$x \leq u\,, \quad \textit{para todo } x \in X\,. \tag{5.7}$$

$$\textit{Multiplicando-se (5.7) por } c < 0, \textit{ obteremos: } \quad c \cdot x \geq c \cdot u\,, \quad \textit{para todo } x \in X\,. \tag{5.8}$$

Desta forma se $y \in c \cdot X$*, da definição do conjunto* $c \cdot X$*, teremos que*

$$\begin{aligned} & y = c \cdot x \quad \textit{para algum} \quad x \in X\,, \\ \textit{logo} \quad & y = c \cdot x \overset{(5.8)}{\geq} c \cdot u\,, \end{aligned} \tag{5.9}$$

ou seja, $c \cdot u$ *é um limitante inferior do conjunto* $c \cdot X$*, assim o conjunto* $c \cdot X$ *é limitado inferiormente.*

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o ínfimo do conjunto $c \cdot X$*, ou seja,*

$$\inf(c \cdot X) \in \mathbb{R}.$$

Notemos também que, como $\sup(X)$ *é um limitante superior do conjunto* X*, podemos considerar* $u \doteq \sup(X)$ *em* (5.9) *(veja também* (5.7)*), ou seja*

$$\inf(c \cdot X) \geq c \cdot \sup(X). \tag{5.10}$$

Por outro lado, notemos que, para $x \in X$*, teremos*

$$c \cdot x \geq \inf(c \cdot X), \tag{5.11}$$

dividindo-se (5.11) *por* $c < 0$*, obteremos:* $x \leq \dfrac{1}{c} \cdot \inf(c \cdot X)$,

isto é, o número real $\dfrac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)$ *é um limitante superior do conjunto* X*, logo deveremos ter*

$$\sup(X) \leq \frac{1}{c} \cdot \inf(c \cdot X), \tag{5.12}$$

multiplicando-se (5.12) *por* $c < 0$*, obteremos:* $c \cdot \sup(X) \geq \inf(c \cdot X)$

que juntamente com (5.10)*, mostra a validade da identidade* (3.2)*, completando a demonstração.*

□

De modo análogo, temos a:

Demonstração 5.3 *da Proposição 3.2.3 :*

Como, por hipótese, $X \subseteq \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio e limitado inferiormente, segue que existe*

$$\inf(X) \in \mathbb{R}.$$

Lembremos que

$$c \cdot X \doteq \{c \cdot x \,;\, x \in X\}.$$

Como o conjunto X *é não vazio, existe* $x_o \in X$.

Desta forma $c \cdot x_o \in c \cdot X$*, mostrando que* $c \cdot X$ *é não vazio.*

Por outro lado, como X *é limitado inferiormente, podemos encontrar* $l \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$l \leq x, \quad \textit{para todo } x \in X. \tag{5.13}$$

Multiplicando-se (5.13) *por* $c < 0$*, obteremos:* $c \cdot l \geq c \cdot x, \quad \textit{para todo } x \in X.$ (5.14)

Desta forma se $y \in c \cdot X$, *da definição do conjunto* $c \cdot X$, *teremos que*

$$y = c \cdot x \quad \textit{para algum} \quad x \in X\,,$$
$$\textit{logo} \quad y = c \cdot x \overset{(5.14)}{\leq} c \cdot l\,, \tag{5.15}$$

ou seja, $c \cdot l$ *é um limitante superior do conjunto* $c \cdot X$, *assim o conjunto* $c \cdot X$ *é limitado superiormente.*

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o supremo do conjunto $c \cdot X$, *ou seja,*

$$\sup(c \cdot X) \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos também que, como $\inf(X)$ *é um limitante inferior do conjunto* X, *podemos considerar* $l \doteq \inf(X)$ *em* (5.15) *(veja também* (5.13)*), ou seja*

$$\sup(c \cdot X) \leq c \cdot \inf(X)\,. \tag{5.16}$$

Por outro lado, notemos que, para $x \in X$, *teremos*

$$c \cdot x \leq \sup(c \cdot X)\,, \tag{5.17}$$
$$\textit{dividindo-se (5.17) por } c < 0, \textit{ obteremos:} \quad x \geq \frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)\,,$$

isto é, o número real $\frac{1}{c}\sup(c \cdot X)$ *é um limitante inferior do conjunto* X, *logo deveremos ter*

$$\inf(X) \geq \frac{1}{c} \cdot \sup(c \cdot X)\,, \tag{5.18}$$
$$\textit{multiplicando-se (5.18) por } c < 0, \textit{ obteremos:} \quad c \cdot \inf(X) \leq \sup(c \cdot X)$$

que juntamente com (5.16), *mostra a validade da identidade* (3.4), *completando a demonstração.*

□

Podemos agora tratar da

Demonstração 5.4 *da Proposição 3.2.4 :*

Como, por hipótese, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *são conjuntos não vazios e limitados inferiormente, segue que existem*

$$\inf(X)\,, \inf(Y) \in \mathbb{R}\,.$$

Lembremos que

$$X + Y \doteq \{x + y \ ; x \in X \textit{ e } y \in Y\}\,.$$

Como os conjuntos X, Y *são não vazios, existem* $x_o \in X$ *e* $y_o \in Y$.

Desta forma, pela definição do conjunto $X + Y$, *temos que* $x_o + y_o \in X + Y$, *mostrando que o conjunto* $X + Y$ *é não vazio.*

Por outro lado, como os conjuntos X, Y *são limitados inferiormente, podemos encontrar* $l_X, l_Y \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$l_X \leq x\,, \quad \textit{para todo } x \in X \tag{5.19}$$

$$\textit{e} \quad l_Y \leq y \quad \textit{para todo } x \in X\,. \tag{5.20}$$

Somando-se (5.19) *e* (5.20)*, obteremos:*

$$l_X + l_Y \leq x + y\,, \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ e } y \in Y\,, \tag{5.21}$$

mostrando que o número real $l_X + l_Y$ *é um limitante inferior do conjunto* $X + Y$*, ou seja, o conjunto* $X + Y$ *é limitado inferiormente.*

Logo, de um resultado conhecido, podemos concluir que existe o ínfimo do conjunto $X + Y$*, ou seja,*

$$\inf(X + Y) \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Afirmamos que o número real $\inf(X) + \inf(Y)$ *é um limitante inferior do conjunto* $X + Y$*.*

De fato, notemos que $\inf(X)$ *e* $\inf(Y)$ *são limitantes inferiores dos conjuntos* X *e* Y*, respectivamente, ou seja, podemos considerar* $l_X \doteq \inf(X)$ *e* $l_Y \doteq \inf(Y)$*, em* (5.19) *e* (5.20)*, respectivamente.*

Em particular, de (5.21)*, segue que*

$$\inf(X) + \inf(Y) \leq x + y\,, \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ e } y \in Y\,,$$

isto é, o número real $\inf(X)+\inf(Y)$ *é um limitante inferior do conjunto* $X+Y$*.*

(ii) Afirmamos que o número real $\inf(X) + \inf(Y)$ *é o menor número real com a propriedade (i).*

De fato pois, dado $\varepsilon > 0$*, da definição de ínfimo, segue que existem* $x_\varepsilon \in X$ *e* $y_\varepsilon \in Y$*, de modo que*

$$x_\varepsilon < \inf(X) + \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{5.22}$$

$$y_\varepsilon < \inf(Y) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5.23}$$

Somando-se (5.22) *e* (5.23)*, segue que:* $x_\varepsilon + y_\varepsilon < \left(\inf(X) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\inf(Y) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\,,$

ou seja, $x_\varepsilon + y_\varepsilon < \inf(X) + \inf(Y) + \varepsilon\,,$

ou seja, podemos encontrar $z_\varepsilon \in X + Y$ *(na verdade,* $z_\varepsilon \doteq x_\varepsilon + y_\varepsilon$*), de modo que*

$$z_\varepsilon < \inf(X) + \inf(Y) + \varepsilon\,,$$

mostrando que o número real $\inf(X)+\inf(Y)+\varepsilon$ *não pode ser limitante inferior do conjunto* $X + Y$*.*

Portanto o número real $\inf(X) + \inf(Y)$ *é o menor limitante inferior do conjunto* $X + Y$*, ou ainda*

$$\inf(X) + \inf(Y = \inf(X + Y)\,,$$

completando a demonstração.

Temos agora a

Demonstração 5.5 *da Proposição 3.2.5 :*

Notemos que, do fato que $X\,,Y \subseteq [0\,,\infty)$ *são não vazios, e em particular, limitados inferiormente, segue que existem* $\inf(X)\,,\inf(Y) \in \mathbb{R}$ *e, além disso, teremos*

$$\inf(X)\,,\ \inf(Y) \geq 0\,. \tag{5.24}$$

Vamos fazer a prova para o caso

$$\inf(X)\,,\ \inf(Y) > 0\,. \tag{5.25}$$

Os casos:

1. $\inf(X) = \inf(Y) = 0\,;$
2. $\inf(X) = 0$ *e* $\inf(Y) > 0\,;$
3. $\inf(X) > 0$ *e* $\inf(Y) = 0\,,$

serão deixados como exercício para o leitor.

Lembremos que

$$X \cdot Y \doteq \{x \cdot y\ ;\ x \in X \text{ e } y \in Y\}\,.$$

Como os conjuntos $X\,,Y$ *são não vazios, existem* $x_o \in X$ *e* $y_o \in Y$*.*

Desta forma, pela definição do conjunto $X \cdot Y$*, temos que* $x_o \cdot y_o \in X + Y$*, mostrando que o conjunto* $X \cdot Y$ *é não vazio.*

Por outro lado, como os conjuntos $X\,,Y \subseteq (0\,,\infty)$ *teremos*

$$0 \leq x\,, \quad \text{para todo } x \in X \tag{5.26}$$

$$\text{e} \quad 0 \leq y \quad \text{para todo } x \in X\,. \tag{5.27}$$

Multiplicando-se (5.26) *e* (5.27) *(são sambos não negativos), obteremos:*

$$0 \leq x \cdot y\,, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } y \in Y\,, \tag{5.28}$$

mostrando que o número real 0 *é um limitante inferior do conjunto* $X \cdot Y$*, ou seja, o conjunto* $X \cdot Y$ *é limitado inferiormente, logo existe*

$$\inf(X \cdot Y) \in [0\,,\infty)\,,$$

pois $X\,,\ Y \in (0\,,\infty)$*.*

(i) *Afirmamos que o número real* $\inf(X) \cdot \inf(Y)$ *é um limitante inferior do conjunto* $X + Y$.

De fato , como $X, Y \subseteq (0, \infty)$, *temos*

$$0 \leq \inf(X) \cdot \inf(Y) \leq x \cdot y\,, \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ e } y \in Y\,, \tag{5.29}$$

isto é, o número real $\inf(X) \cdot \inf(Y)$ *é um limitante inferior do conjunto* $X \cdot Y$

(ii) *Afirmamos que o número real* $\inf(X) \cdot \inf(Y)$ *é maior coma propriedade (ii).*

De fato pois, dado $\varepsilon > 0$ *considerando-se*

$$\varepsilon' \doteq \frac{-[\inf(X) + \inf(Y)] + \sqrt{[\inf(X) + \inf(Y)]^2 + 4 \cdot [\inf(X) + \inf(Y)] \cdot \varepsilon}}{2} > 0\,, \tag{5.30}$$

da definição de ínfimo, segue que existem $x_{\varepsilon'} \in X$ *e* $y_{\varepsilon'} \in Y$, *de modo que*

$$0 \overset{(3.7)}{<} x_{\varepsilon'} < \inf(X) + \varepsilon'\,, \tag{5.31}$$

$$0 \overset{(3.7)}{<} y_{\varepsilon'} < \inf(Y) + \varepsilon'\,. \tag{5.32}$$

Multiplicando-se (5.31) *e* (5.32), *temos:*

$$0 < x_{\varepsilon'} \cdot y_{\varepsilon'} < [\inf(X) + \varepsilon'] \cdot [\inf(Y) + \varepsilon']\,,$$

$$\textit{ou:} \quad 0 < x_{\varepsilon'} \cdot y_{\varepsilon'} < \inf(X) \cdot \inf(Y) + \underbrace{\varepsilon'[\inf(X) + \inf(Y)] + (\varepsilon')^2}_{\overset{(5.30)}{=} \varepsilon}\,, \tag{5.33}$$

Logo, de (5.33), *teríamos*

$$0 < x_{\varepsilon'} \cdot y_{\varepsilon'} < \inf(X) \cdot \inf(Y) + \varepsilon\,,$$

mostrando que $\inf(X) \cdot \inf(Y)$ *é o maior limitante inferior do conjunto* $X \cdot Y$, *ou seja*

$$\inf(X \cdot Y) = \inf(X) \cdot \inf(Y)\,,$$

completando a demonstração.

□

Vejamos agora a

Demonstração 5.6 *da Observação 3.2.3 :*

Para um contra-exemplo associado, podemos considerar, por exemplo, os conjuntos:

$$X \doteq (-1, \infty)\,, \tag{5.34}$$

$$\textit{e} \quad Y \doteq (0, \infty)\,. \tag{5.35}$$

Notemos que X *e* Y *são não vazios e limitados inferiormente (*-1 *é limitante inferior de ambos).*

Notemos que

$$X \cdot Y \overset{(5.34)\ e\ (5.35)}{=} (-\infty, 0). \tag{5.36}$$

ou seja, o conjunto $X \cdot Y$ **não** *é limitado inferiormente , mostrando que o conjunto* $X \cdot Y$ *não possui ínfimo.*

□

Temos agora a

Demonstração 5.7 *da Proposição 3.2.6 :*

Com $X \neq \emptyset$ *e* $X \subseteq Y$*, segue que* $Y \neq \emptyset$*.*

Do fato que $Y \neq \emptyset$ *e é limitado inferiormente, segue que existe*

$$\inf(Y) \in \mathbb{R}.$$

Como, em particular, $\inf(Y)$ *é um limitante inferior de* Y*, segue que*

$$\inf(Y) \leq y, \quad \textit{para} \quad y \in Y. \tag{5.37}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & x \in X \subseteq Y, \\ \textit{de (5.37), teremos:} \quad & \inf(Y) \leq x, \end{aligned} \tag{5.38}$$

ou seja, X *é limitado inferiormente.*

Portanto, existe

$$\inf(X) \in \mathbb{R}.$$

De (5.38), temos que $\inf(Y)$ *é um limitante inferior de* X*, sendo* $\inf(X)$ *o maior limitante inferior de* X*, segue que*

$$\inf(Y) \leq \inf(X),$$

completando a demonstração.

□

Temos agora a

Demonstração 5.8 *da Proposição 3.2.7 :*

$$\begin{aligned} \textit{Como} \quad & X \cap Y \neq \emptyset, \\ & X \cap Y \subseteq X \\ \textit{e} \quad & X \cap Y \subseteq Y, \end{aligned}$$

segue que

$$X\,,Y \neq \emptyset\,.$$

Além disso, sendo X *e* Y *limitados inferiormente, podemos garantir que existem*

$$\inf(X) \quad e \quad \inf(Y)\,.$$

Logo, do Exemplo 3.2.6, segue que $X \cap Y$ *é limitados inferiormente e, de* (3.10), *teremos*

$$\begin{aligned} &\inf(X) \leq \inf(X\cap Y)\\ &\inf(Y) \leq \inf(X\cap Y)\,,\\ \textit{ou seja,}\quad &\max\{\inf(X)\,,\inf(Y)\} \leq \inf(X\cap Y)\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração.

$\square$

Podemos agora tratar da

Demonstração 5.9 *da Observação 3.2.4 :*

Para um contra-exemplo associado, podemos considerar, por exemplo, os conjuntos:

$$X \doteq (0\,,1)\,, \tag{5.39}$$

$$e \quad Y \doteq (-3\,,-2) \;\cup \left(\frac{1}{3}\,,\frac{1}{2}\right). \tag{5.40}$$

Com isto teremos

$$X\cap Y \overset{(5.39)\,e\,(5.40)}{=} \left(\frac{1}{3}\,,\frac{1}{2}\right), \tag{5.41}$$

Desta forma temos que $X\,,Y\,,X\cap Y \neq \emptyset$*, são limitados inferiormente (por exemplo,* 0*,* -3 *e* $\frac{1}{3}$*, respectivamente) e, além disso, temos:*

$$\inf(X) \overset{(5.39)}{=} 0\,, \tag{5.42}$$

$$\inf(Y) \overset{(5.40)}{=} -3\,, \tag{5.43}$$

$$e \quad \inf(X\cap Y) \overset{(5.41)}{=} \frac{1}{3}\,. \tag{5.44}$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned} \inf(X\cap Y) &\overset{(5.44)}{=} \frac{1}{3}\\ &\neq 0 = \max\{0\,,-3\}\\ &\overset{(5.42)\,e\,(5.43)}{=} \max\{\inf(X)\,,\inf(Y)\}\,,\\ \textit{ou ainda,}\quad \inf(X\cap Y) &> \max\{\inf(X)\,,\inf(Y)\}\,, \end{aligned}$$

mostrando que pode não ocorrer a igualdade em (3.10) *na Proposição 3.2.7.*

□

Tratemos agora da

Demonstração 5.10 *da Proposição 3.2.8 :*

Como, por hipótese, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *são conjuntos não vazios e limitados inferiormente, segue que existem*

$$\inf(X), \inf(Y) \in \mathbb{R}.$$

Notemos que, como $X \neq \emptyset$ *(e* Y *também), teremos*

$$X \cup Y \neq \emptyset.$$

Por outro lado, como os conjuntos X, Y *são limitados inferiormente, podemos encontrar* $l_X, l_Y \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$l_X \leq x, \quad \textit{para todo } x \in X \tag{5.45}$$

$$\textit{e} \quad l_Y \leq y \quad \textit{para todo } y \in Y. \tag{5.46}$$

Consideremos

$$l \doteq \min\{l_X, l_Y\}. \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} \textit{Desta forma, se } z \in X \cup Y, \textit{ teremos:} \quad & z \in X \quad \textit{ou} \quad z \in Y, \\ \textit{logo} \quad & l_X \leq z \quad \textit{ou} \quad l_Y \leq z, \\ \textit{ou seja,} \quad & l \overset{(5.45)}{=} \min\{l_X, l_Y\} \leq z. \end{aligned} \tag{5.48}$$

mostrando que o número real $l = \min\{l_X, l_Y\}$ *é um limitante inferior do conjunto* $X \cup Y$*, ou seja, o conjunto* $X \cup Y \neq \emptyset$ *é limitado inferiormente, logo existe*

$$\inf(X \cup Y) \in \mathbb{R}.$$

(i) Afirmamos que $\min\{\inf(X), \inf(Y)\}$ *é um limitante inferior do conjunto* $X \cup Y$.

De fato, como $\inf(X)$ *é um limitante inferior do conjunto* X *e* $\inf(Y)$ *é um limitante inferior do conjunto* Y*, podemos considerar*

$$l_X \doteq \inf(X) \quad \textit{e} \quad l_Y \doteq \inf(Y)$$

em (5.48)*, ou seja,*

$$\min\{\inf(X), \inf(Y)\} \leq z,$$
$$\textit{para todo} \quad z \in X \cup Y,$$

mostrando que $\min\{\inf(X), \inf(Y)\}$ *é um limitante inferior do conjunto* $X \cup Y$.

(ii) Mostremos que $\min\{\inf(X), \inf(Y)\}$ *é o maior com a propriedade (i).*

De fato pois, dado $\varepsilon > 0$*, mostremos que*

$$\min\{\inf(X), \inf(Y)\} + \varepsilon$$

não *é um limitante inferior do conjunto* $X \cup Y$.

Para tanto, consideremos os seguintes casos:

(a) suponhamos que

$$\min\{\inf(X), \inf(Y)\} = \inf(X). \tag{5.49}$$

Logo, como $\inf(X)$ *é o menor limitante inferior de* X*, podemos encontrar* $x \in X$*, de modo que*

$$\begin{aligned} & x < \inf(X) + \varepsilon \overset{(5.49)}{=} \min\{\inf(X), \inf(Y)\} + \varepsilon, \\ \textit{ou seja,} \quad & x \in X \subseteq X \cup Y \\ \textit{e} \quad & x < \min\{\inf(X), \inf(Y)\} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\inf(X) + \varepsilon \overset{(5.49)}{=} \min\{\inf(X), \inf(Y)\} + \varepsilon$$

não é um limitante inferior de $X \cup Y$*, ou seja,*

$$\inf(X \cup Y) = \min\{\inf(X), \inf(Y)\}.$$

(b) suponhamos que

$$\min\{\inf(X), \inf(Y)\} = \inf(Y). \tag{5.50}$$

Logo, como $\inf(Y)$ *é o menor limitante inferior de* Y*, podemos encontrar* $y \in Y$*, de modo que*

$$\begin{aligned} & y < \inf(Y) + \varepsilon \overset{(5.50)}{=} \min\{\inf(X), \inf(Y)\} + \varepsilon, \\ \textit{ou seja,} \quad & y \in Y \subseteq X \cup Y \\ \textit{e} \quad & y < \min\{\inf(X), \inf(Y)\} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\inf(Y) + \varepsilon \overset{(5.50)}{=} \min\{\inf(X), \inf(Y)\} + \varepsilon$$

não é um limitante inferior de $X \cup Y$*, ou seja,*

$$\inf(X \cup Y) = \min\{\inf(X), \inf(Y)\},$$

completando a demonstração.

□

Temos agora a

Demonstração 5.11 *da Proposição 3.2.9 :*

Sugestão: *utilize a Proposição 3.2.8 e indução sobre* $n \in \mathbb{N}$.

□

Vejamos agora a

Demonstração 5.12 *da Observação 3.2.5 :*

Notemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, *temos que o conjunto* $X_i \neq \emptyset$ *e assim, teremos que*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \neq \emptyset .$$

Mas se para cada $i \in \mathbb{N}$, *temos que o conjunto* X_i *é limitado inferiormente, isto* **não** *implicará, necessariamente, que o conjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

é limitado inferiormente.

Portanto poderá não admitir ínfimo e, além disso, não fará sentido (3.13).

Para ver isto, consideremos o seguinte contra-exemplo:

Para cada $i \in \mathbb{N}$, *considere o conjunto*

$$X_i \doteq [-i\,, 0] .$$

Desta forma, para cada $i \in \mathbb{N}$, *temos que o conjunto* X_i *é não vazio e limitado inferiormente.*

Porém o conjunto

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = (-\infty\,, 0] \,,$$

não *é limitado inferiormente.*

□

Temos agora a

Demonstração 5.13 *da Proposição 3.2.10 :*

$$\begin{aligned} \textit{Como} \quad & Y \setminus Y \neq \emptyset \,, \\ \textit{e} \quad & Y \setminus X \subseteq Y \end{aligned}$$

segue que

$$Y \neq \emptyset\,.$$

Além disso, sendo Y *limitados inferiormente, podemos garantir existe*

$$\inf(Y)\,.$$

Logo, da Proposição 3.2.6, segue que $Y \backslash X$ *é limitado inferiormente e, de* (3.14), *teremos*

$$\inf(Y) \leq \inf(Y \setminus X)\,,$$

completando a demonstração.

$\square$

$\boxed{\textbf{F I M}}$

Índice Remissivo