Introdução aos Números Complexos

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

18 de julho de 2019

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo destas notas é introduzir os números complexos.

Na verdade o conjunto dos números complexos é caracterizado como sendo o conjunto $\mathbb{R}^2$, quando munido da operação usual de adição, indicada por $+$, de $\mathbb{R}^2$ (como veremos na Definição 2.1.1) e de uma multiplicação, indicada por $\cdot$, em $\mathbb{R}^2$ (como veremos na Definição 2.1.2).

Portanto $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, é o conjuntor $\mathbb{R}^2$, munido das operações $+$ e $\cdot$, citadas acima.

Serão exibidos os conceitos relacionados com o conteúdo acima, bem como propriedades e aplicações dos mesmos.

As referências (ver [C]) ao final das notas poderão servir como material extra importante para o conteúdo aqui desenvolvido.

Capítulo 2

Números Complexos

Neste capítulo introduziremos os números complexos, operações, representação geométrica e algumas aplicações simples dos mesmos.

2.1 O que é um número complexo ?

Começaremos introduzindo a:

Definição 2.1.1 *Dados* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$*, definiremos a* **adição (ou soma) do par ordenado (x_1, y_1) com o par ordenado (x_2, y_2)** *, indicada por* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$*, como sendo o par ordenados:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{2.1}$$

Observação 2.1.1 *Notemos que a operação de adição, dada por (2.1), nos fornece uma função*

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

definida da seguinte forma:

$$+ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \doteq (x_1, y_1) + (x_2, y_2), \quad \textit{para cada} \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.2}$$

Podemos também introduzir uma outra operação, dada pela:

Definição 2.1.2 *Dados* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$*, definiremos o* **produto (ou multiplicação) do para ordenado (x_1, y_1) com o par ordenado (x_2, y_2)** *, indicado por* $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$*, como sendo o par ordenado:*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \doteq (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{2.3}$$

Observação 2.1.2 *Notemos que a operação de multiplicação, dada por (2.3), nos fornece uma função*

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

definida da seguinte forma:

$$\cdot (x_1, y_1), (x_2, y_2)) \doteq (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2), \quad \textit{para cada} \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

Podemos agora introduzir o conceito central de todas as nossas futuras discussões, a saber:

Definição 2.1.3 *O conjunto $\mathbb{R}^2$, munido das operações de adição, dada por (2.1), e de multiplicação, dada por (2.2), será denominado* **conjunto dos números complexos** *e indicado por $\mathbb{C}$.*

Observação 2.1.3

1. *Segundo a Definição 2.1.3,*
$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 ,$$
onde, em $\mathbb{R}^2$ estamos considerando as operações de adição, dada por (2.1), e de multiplicação, dada por (2.2).

2. *Denotaremos um elemento de $\mathbb{C}$ por z, ou seja,*
$$z \doteq (x , y) \in \mathbb{R}^2 .$$

3. *Para cada $x \in \mathbb{R}$, o número complexo*
$$(x , 0)$$
será **identificado** *com o número real $\underline{x}$, ou seja,*
$$x \sim (x , 0) .$$
Notemos que tal identificação é delicada pois se formos levar ao pé da letra, o número real x **não** *pode ser comparado com o para ordenado $(x , 0)$.*

Neste sentido, todo cuidado é pouco !

Tal identificação será muito útil para o estudo de variável complexa.

4. *Deste modo, o conjunto formado pelos números reais poderá ser visto como um "subconjunto' do conjunto formado por todos os números complexos, ou seja,*
$$'' \, \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \, ' , \tag{2.5}$$
onde a "inclusão" acima é, na verdade, a aplicação
$$I : \mathbb{R} \to \mathbb{C} ,$$
dada por:
$$I(x) \doteq (x , 0) , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} . \tag{2.6}$$

5. *Por abuso de notação, escreveremos:*

$$x = (x\,,0)\,. \tag{2.7}$$

Novamente lembramos que tal igualdade não faz sentido do ponto de vista matemático (um número real igual ao um para ordenado ? !).

Por isto chamamos a atenção que a (2.7) é na verdade uma **identificação**.

A seguir introduziremos alguns conceitos importantes que serão utilizados no decorrer destas notas.

Começaremos pela:

Definição 2.1.4 *O número complexo $(0\,,1)$ será denominado* **unidade imaginária** *e denotada por $\underline{i}$, ou seja,*

$$i \doteq (0\,,1)\,. \tag{2.8}$$

Temos também a

Definição 2.1.5 *O número complexo $(0\,,0)$, será denotado por $\underline{O}$, ou seja,*

$$O \doteq (0\,,0)\,. \tag{2.9}$$

Outras noções importantes são dados pela:

Definição 2.1.6 *Se $z = (x\,,y) \in \mathbb{C}$, diremos que o número real $\underline{x}$ é a* **parte real do número complexo $\underline{z}$**, *e indicado por $\underline{\Re(z)}$, ou seja,*

$$\Re(z) \doteq x\,. \tag{2.10}$$

De modo semelhante, diremos que o número real $\underline{y}$ é a **parte imaginária do número complexo $\underline{z}$**, *e indicado por $\underline{\Im(z)}$, ou seja,*

$$\Im(z) \doteq y\,. \tag{2.11}$$

Observação 2.1.4 *Notemos que com a Definição 2.1.6, podemos ober uma função*

$$\Re : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

definida da seguinte forma:

$$\Re(z) \doteq x\,, \quad \textit{para cada} \quad z \doteq (x\,,y) \in \mathbb{C}\,. \tag{2.12}$$

Definição 2.1.7 *Um número complexo $\underline{z}$, será dito* **imaginário puro**, *se for da forma*

$$z = (0\,,y)\,, \quad \textit{para algum} \quad y \in \mathbb{R}\,, \tag{2.13}$$

ou seja, se

$$\Re(z) = 0\,. \tag{2.14}$$

Observação 2.1.5 *Notemos que com a Definição 2.1.7, podemos ober uma função*

$$\Im : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

definida da seguinte forma:

$$\Im(z) \doteq y\,, \quad \textit{para cada} \quad z \doteq (x\,,y) \in \mathbb{C}\,. \tag{2.15}$$

Temos agora a

Proposição 2.1.1 *Sejam* $z_1\,,z_2 \in \mathbb{C}$.
Então:

$$\Re[z_1 + z_2] = \Re[z_1] + \Re[z_2]\,, \tag{2.16}$$
$$\Im[z_1 + z_2] = \Im[z_1] + \Im[z_2]\,. \tag{2.17}$$

Demonstração:
Veja a demonstração 3.0.1 do capítulo 3.

□

Para finalizar esta seção temos a:

Definição 2.1.8 *Diremos que dois números complexos* $z_1\,,z_2 \in \mathbb{C}$ *são* **iguais**, *denotando por* $z_1 = z_2$, *se as suas respectivas partes reais e suas partes imagiárias forem iguais, ou seja, se*

$$z_1 = (x_1\,,y_1) \quad e \quad z_2 = (x_2\,,y_2)\,, \quad \textit{com} \quad x_1\,,x_2\,,y_1\,,y_2 \in \mathbb{R}\,, \tag{2.18}$$

então

$$z_1 = z_2$$

se, e somente se,

$$x_1 = x_2 \quad e \quad y_1 = y_2\,. \tag{2.19}$$

Observação 2.1.6 *Das Definições 2.1.5 e 2.1.8 acima, segue que*

$$z = O$$
$$\textit{se, e somente se,} \quad z = (0\,,0)\,. \tag{2.20}$$

Em particular,

$$z = (x\,,y) \neq O$$
$$\textit{se, e somente se,} \quad x \neq 0 \quad ou \quad y \neq 0\,. \tag{2.21}$$

Outra noção é dado pela:

Definição 2.1.9 *Dado o número complexo* $z = (x\,,y) \in \mathbb{C}$, *definiremos o* **oposto do número complexo** $\underline{z}$, , *indicado por* $\underline{-z}$, *como sendo o número complexo dado por:*

$$-z \doteq (-x\,,-y)\,. \tag{2.22}$$

Baseado na operação de adição, introduzida na Definição 2.1.1 e na Definição 2.1.9, podemos também introduzir outra operação em $\mathbb{C}$, a saber:

Definição 2.1.10 *Dados $z_1\, z_2 \in \mathbb{C}$, definiremos a* **diferença (ou subtração) do número complexo z_1, pelo o número complexo z_2**, *indicada por $z_1 - z_2$, como sendo o número complexo:*

$$z_1 - z_2 \doteq z_1 + (-z_2)\,, \tag{2.23}$$

onde $-z_2$ é o número complexo oposto do número complexo z_2 (definido por (2.22)).

Observação 2.1.7

Notemos que a operação de subtração, dada por (2.23), nos fornece uma função

$$- : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,$$

definida da seguinte forma:

$$-(z_1\,, z_2) \doteq z_1 - z_2\,, \quad \textit{para cada} \quad z_1\,, z_2 \in \mathbb{C}\,. \tag{2.24}$$

Com isto temos a:

Proposição 2.1.2 *Se*

$$z_1 = (x_1\,, y_1) \tag{2.25}$$

$$\textit{e} \quad z_2 = (x_2\,, y_2) \in \mathbb{C}\,, \tag{2.26}$$

então

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2\,, y_1 - y_2)\,. \tag{2.27}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.2 do capítulo 3.

$\square$

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.1.11 *O conjunto formado pelos números complexos que são diferentes do número complexo O (dado por (2.9)) será indicado por $\mathbb{C}^*$, ou seja,*

$$\mathbb{C}^* \doteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, z \neq O\}\,. \tag{2.28}$$

Baseado na operação de multiplicação, introduzida na Definição 2.1.2, podemos também introduzir uma outra operação em $\mathbb{C}$, a saber:

Definição 2.1.12 *Dados $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}^*$, definiremos o* **quociente (ou divisão) do número complexo z_1, pelo o número complexo z_2**, *indicada por $\dfrac{z_1}{z_2}$, como sendo o número complexo*

$$z_3\,, \quad \textit{onde:} \quad z_2 \cdot z_3 = z_1\,. \tag{2.29}$$

Observação 2.1.8

1. *Mais adiante mostraremos que, na situação da Definição 2.1.12, existe um único* $z_3 \in \mathbb{C}$ *satisfazendo* (2.29) *(veja a Proposição 2.1.6. a seguir).*

2. *Notemos que a operação de divisão, dada por* (2.29)*, nos fornece uma função*

$$/ : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},$$

definida da seguinte forma:

$$/(z_1, z_2) \doteq \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{para cada} \quad z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}^*. \tag{2.30}$$

3. *Se* $x, y \in \mathbb{R}$*, das Definições 2.1.1 e 2.1.2, temos:*

$$(x, 0) + (0, y) \overset{(2.1)}{=} (x, y) \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} (x, 0) \cdot (1, 0) &\overset{(2.3)}{=} (x \cdot 1 - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot 1) \\ &= (x, 0), \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} (y, 0) \cdot (0, 1) &\overset{(2.3)}{=} (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot y) \\ &= (0, y) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Logo se

$$z = (x, y) \in \mathbb{C},$$

teremos:

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &\overset{(2.31)}{=} (x, 0) + (0, y) \\ &\overset{(2.32) \text{ e } (2.33)}{=} \underbrace{(x, 0)}_{\overset{(2.7)}{=} x} \cdot \underbrace{(1, 0)}_{\overset{(2.7)}{=} 1} + \underbrace{(y, 0)}_{\overset{(2.7)}{=} y} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{\overset{(2.8)}{=} i} \\ &= x \cdot 1 + y \cdot i \\ &= x + y \cdot i, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad z = x + y \cdot i, \tag{2.34}$$

que é a representação usual de números complexos.

Observemos que tal representação (isto é, (2.34)*) leva em conta a* <u>delicada identificação</u> (2.7) *(identificação de um número real com um par ordenado).*

4. Notemos que

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i \\ &\overset{(2.8)}{=} (0\,,1) \cdot (0\,,1) \\ &\overset{(2.3)}{=} (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1\,, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1\,,0) \\ &\overset{(2.7)}{=} -1\,, \end{aligned}$$

ou seja, $$i^2 = -1\,. \tag{2.35}$$

Novamente, vale chamar a aterção, que (2.35)*, leva em conta a* **delicada identificação** (2.7) *(identificação de um número real com um par ordenado).*

Utilizando-se a notação (2.34) acima, temos os seguinte resultados:

Proposição 2.1.3 *Sejam*

$$z_1 = (x_1\,, y_1)\,, \quad z_2 = (x_2\,, y_2) \in \mathbb{C}\,.$$

Então

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

ou seja, $$(x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i\,. \tag{2.36}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.3 do capítulo 3.

□

Observação 2.1.9 *Em síntese, a Proposição 2.1.3 acima nos diz que, a parte real da adição de dois números complexos, será igual a soma das respectivas partes reais de cada uma das parcelas e a parte imaginária da adição de dois números complexos, será igual a soma das respectivas partes imaginárias de cada uma das parcelas.*

De modo semelhante, temos a:

Proposição 2.1.4 *Se*

$$z_1 = (x_1\,, y_1)\,, \quad z_2 = (x_2\,, y_2) \in \mathbb{C}\,,$$

então

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i\,,$$

ou seja, $$(x_1 + y_1 \cdot i) - (x_2 + y_2 \cdot i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i\,. \tag{2.37}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.4 do capítulo 3.

□

Observação 2.1.10 *Em síntese, a Proposição 2.1.4 acima, nos diz que a parte real da subtração de dois números complexos, será igual a subtração das respectivas partes reais de cada uma das parcelas e a parte imaginária da subtração de dois números complexos, será igual a subtração das respectivas partes imaginárias de cada uma das parcelas.*

De modo semelhante, temos a

Proposição 2.1.5 *Sejam*

$$z_1 = (x_1\,,y_1)\,,\quad z_2 = (x_2\,,y_2) \in \mathbb{C}\,.$$

Então

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + (x_1\,y_2 + y_1\,x_2) \cdot i\,, \\ \textit{ou seja,}\quad (x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + (x_1\,y_2 + y_1\,x_2) \cdot i\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Veja a demonstração 3.0.5 do capítulo 3.

□

Observação 2.1.11 *Notemos que, se* $a \in \mathbb{R} \overset{(2.5)}{\subseteq} \mathbb{C}$ *e* $z = (x\,,y) \in \mathbb{C}$, *teremos:*

$$\begin{aligned} a \cdot (x + y \cdot i) &\overset{(2.34)}{=} a \cdot z \\ &\overset{(2.7)}{=} (a\,,0) \cdot (x\,,y) \\ &\overset{(2.3)}{=} (a\,x - 0 \cdot y\,, a\,y + 0 \cdot x) \\ &= (a\,x\,, a\,y) \\ &\overset{(2.34)}{=} (a\,x) + (a\,y) \cdot i\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a \cdot (x + y \cdot i) = (a\,x) + (a\,y) \cdot i\,, \tag{2.39}$$

ou seja, a parte real da multiplicação de um número real (visto como um número complexo, pela identificação (2.7)) por um número complexo, será igual a multiplicação do número real, pela parte real do número complexo.

Além disso, a parte imaginária da multiplicação de um número real (visto como um número complexo, pela identificação (2.7)) por um número complexo, será igual a multiplicação do número real, pela parte imaginária do número complexo.

Temos também a:

Proposição 2.1.6 *Sejam*

$$z_1 = (x_1\,,y_1)\,,\quad z_2 = (x_2\,,y_2) \in \mathbb{C}\,, \tag{2.40}$$

com

$$z_2 \neq O \tag{2.41}$$

e $z_3 \in \mathbb{C}$ *satisfazendo*

$$z_2 \cdot z_3 = z_1 \,. \tag{2.42}$$

Então

$$\begin{aligned} z_3 &= \left(\frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \,,\, \frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \right) \\ &\overset{(2.34)}{=} \left(\frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \right) + \left(\frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \right) \cdot i \,. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.6 do capítulo 3.

□

Apliquemos as ideias acima ao

Exemplo 2.1.1 *Calcular o valor da seguinte expressão complexa:*

$$\frac{(-1 + 3 \cdot i) \cdot (2 + 3 \cdot i)}{1 - i} + 8 \cdot i \,.$$

Resolução:

Veja a resolução 4.0.1 do capítulo 4.

□

2.2 Propriedades das operações com números complexos

As propriedades básicas relacionadas com as operações de adição e multiplicação de números complexos são dadas pela:

Proposição 2.2.1 *Sejam* $z_1\,, z_2\,, z_3 \in \mathbb{C}$.

Então valem:

1. *a propriedade comutativa das operações de adição e multiplicação de números complexos, isto é:*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \,, \tag{2.44}$$
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \,. \tag{2.45}$$

2. *a propriedade associativa das operações de adição e multiplicação de números complexos, isto é:*

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \,, \tag{2.46}$$
$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \,. \tag{2.47}$$

3. *a propriedade distributia da operação de multiplicação em relção a operação de adição de números complexos, isto é:*

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \,, \tag{2.48}$$

4. *a propriedade de existência de um elemento neutro da operação de adição, a saber,* $O \in \mathbb{C}$ *tem a seguinte propriedade:*

$$z_1 + O = z_1 \,. \tag{2.49}$$

   Além disso o número complexo O*, dado por* (2.9)*, é o único que tem a propriedade* (2.49)*.*

5. *a propriedade de existência de um elemento neutro da operação de multiplicação, a saber,*

$$1 = (1\,,0) \in \mathbb{C}$$

   (levando-se em conta a ideintificação (2.7)*), tem a seguinte propriedade:*

$$z_1 \cdot 1 = z_1 \,. \tag{2.50}$$

   Além disso o número complexo $1 \overset{(2.7)}{=} (1\,,0)$*, dado por* (2.7)*, é o único que tem a propriedade* (2.50)*.*

6. *a propriedade de existência de um elemento oposto associado a um número complexo, isto é, dado* $z \in \mathbb{C}$*, existe um número complexo* $w \in \mathbb{C}$ *satisfaz a seguinte propriedade:*

$$z + w = O \,. \tag{2.51}$$

   Tal elemento é único e é dado por

$$w \doteq -z \,,$$

   on de o número complexo $-z$ *e dado por* (2.22)*.*

7. *a propriedade de existência de um elemento inverso associado a um número complexo diferente de* O*, isto é, dado*

$$z = (x\,,y) \in \mathbb{C}^* \,,$$

   podemos encontra um $w \in \mathbb{C}^*$*, de modo que*

$$z \cdot w = 1 \,. \tag{2.52}$$

   Além disso, se

$$z = (x\,,y) \neq (0\,,0) \tag{2.53}$$

o número complexo w será dado por

$$w \doteq \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right). \tag{2.54}$$

O número complexo w, dado por (2.54), é o único que satisfaz a propriedade (2.52), e será denotado por $\frac{1}{z}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &\doteq \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) \\ &\overset{(2.34)}{=} \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} \cdot i. \end{aligned} \tag{2.55}$$

8. *a propriedade de não ter divisores de zero, isto é, se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, satisfazem:*

$$z_1 \cdot z_2 = 0\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad z_1 = 0 \quad \textit{ou} \quad z_2 = 0\,. \tag{2.56}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.7 do capítulo 3.

□

Observação 2.2.1 *Como consequência das propriedades da Proposição 2.2.1 acima, temos:*

$$\begin{aligned}
(x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + y_2 \cdot i) &\overset{(2.48)}{=} x_1 \cdot x_2 + \underbrace{x_1 \cdot (y_2 \cdot i)} + \underbrace{(y_1 \cdot i) \cdot x_2} + \underbrace{(y_1 \cdot i) \cdot (y_2 \cdot i)} \\
&\overset{(2.47)}{=} x_1 \cdot x_2 + (x_1 \cdot y_2) \cdot i + y_1 \cdot (\underbrace{i \cdot x_2}) + [\underbrace{(y_1 \cdot i) \cdot y_2}] \cdot i \\
&\overset{(2.47)}{=} x_1 \cdot x_2 + (x_1 \cdot y_2) \cdot i + y_1 \cdot (\underbrace{i \cdot x_2}) + [y_1 \cdot (\underbrace{i \cdot y_2})] \cdot i \\
&\overset{(2.45)}{=} x_1 \cdot x_2 + (x_1 \cdot y_2) \cdot i + \underbrace{y_1 \cdot (x_2 \cdot i)} + [\underbrace{y_1 \cdot (y_2 \cdot i)}] \cdot i \\
&\overset{(2.47)}{=} x_1 \cdot x_2 + (x_1 \cdot y_2) \cdot i + (y_1 \cdot x_2) \cdot i + [\underbrace{(y_1 \cdot y_2) \cdot i}] \cdot i \\
&\overset{(2.47)}{=} x_1 \cdot x_2 + (x_1 \cdot y_2) \cdot i + (y_1 \cdot x_2) \cdot i + \underbrace{[(y_1 \cdot y_2) \cdot i] \cdot i} \\
&\overset{(2.47)}{=} x_1 \cdot x_2 + (x_1 \cdot y_2) \cdot i + (y_1 \cdot x_2) \cdot i + (y_1 \cdot y_2) \cdot (i \cdot i) \\
&\overset{(2.35)}{=} x_1 \cdot x_2 + (x_1 \cdot y_2) \cdot i + (y_1 \cdot x_2) \cdot i + y_1 \cdot y_2 \cdot (-1) \\
&\overset{(2.44)\, e\, (2.48)}{=} (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \cdot i\,,
\end{aligned}$$

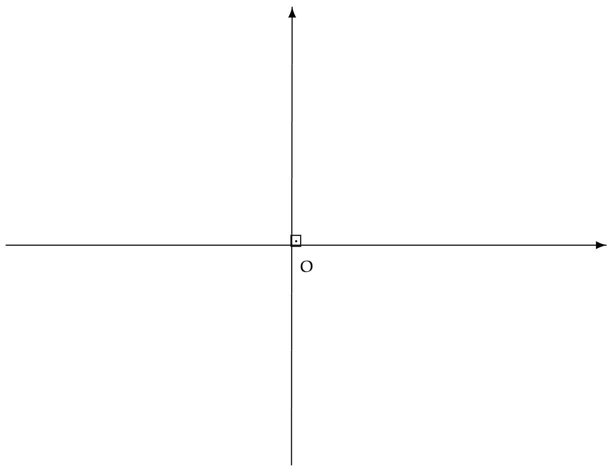
que a expressão obtida em (2.38).

2.3 Representação geométrica de um número complexo

Como um número complexo é um par ordenado formado por números reias, ou seja, pertence a $\mathbb{R}^2$, e os elementos deste último podem ser representados em um plano geométrico, ou seja, existe uma correspondência biunívoca e sobrejetora entre o conjunto formado pelos números complexos, ou seja, o conjunto $\mathbb{C}$, e os pontos de um plano gemétrico.

Para isto basta, por exemplo, fixarmos duas retas perpendiculares em um plano (veja a figura abaixo).

Denotemos por $\underline{O}$ o ponto de interseção das retas perpendiculares consideradas acima (veja a figura abaixo).



Suponhamos que as duas retas sejam retas numeradas (ou seja, cada uma delas esta em uma relação biunívoca e sobrejetora com o conjunto dos números reais, ou seja, $\mathbb{R}$, sendo considerada a mesma sobre as duas retas - veja a figura abaixo).

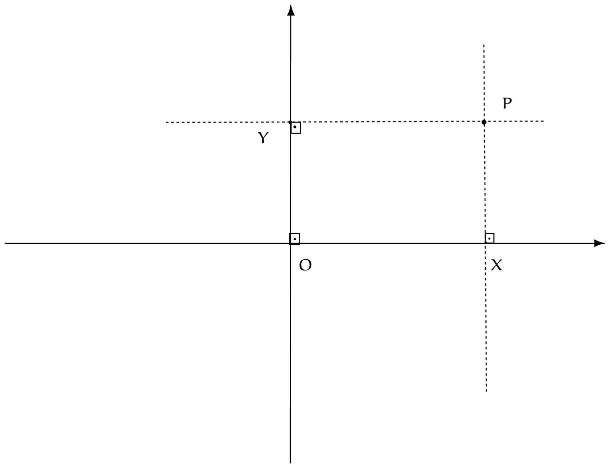
Dado um número complexo $z = (x\,, y) \in \mathbb{C}$, podemos associar ao número real $\underline{x}$ um ponto, que denotaremos por $\underline{X}$, sobre uma das retas perpendiculares (que escolheremos ser a reta horizontal na figura acima).

De modo semelhantes, podemos associar ao número real $\underline{y}$ um ponto, que indicaremos por $\underline{Y}$, sobre a outra reta perpendicular (que será reta vertical na figura acima).

Consideremos o ponto P obtido da intersecção das retas perpendiculares às retas $\overleftrightarrow{OX}$ e $\overleftrightarrow{OY}$, que contém os pontos $\underline{X}$ e $\underline{Y}$, respectivamente (veja figura abaixo).

Neste caso, denotando-se o comprimento do segmento $\overline{AB}$ por AB, teremos:

$$OX = x$$
$$OY = y\,.$$



Desta forma podemos associar a cada elemento $\underline{z}$ do conjunto $\mathbb{C}$ um ponto $\underline{P}$ do plano (numérico), bijetivamente.

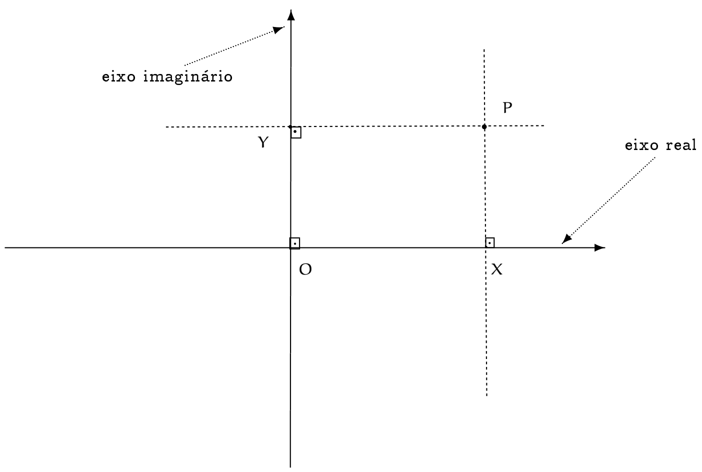
Neste caso, escreveremos

$$\begin{aligned} P &= z \\ &= (x, y) \\ &\overset{(2.34)}{=} x + y \cdot i \,. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Denominaremos o plano (numérico) acima, de **plano complexo** ou z-plano.

A reta horizontal considerada acima, será dita **eixo real** (veja a figura abaixo).

Por outro lado, a reta vertical considerada acima, será dita **eixo imaginário** (veja a figura abaixo).



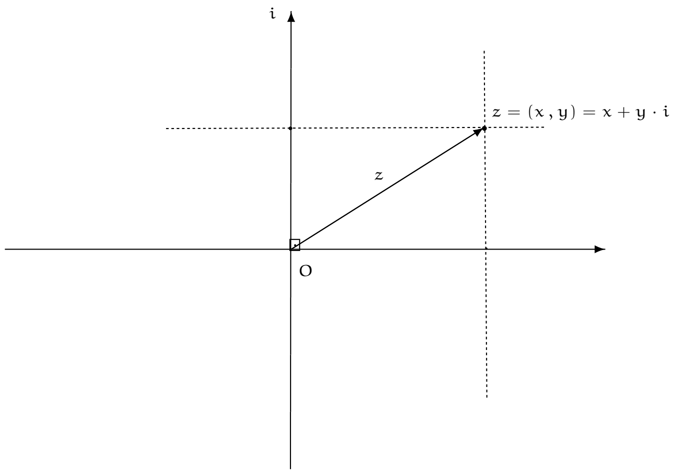
Por **absudo de notação**, denotaremos o eixo imagiário por $\underline{i}$.

Com estas identificações acima, o número complexo

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= x + y \cdot i \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

poderá ser representado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$.

Portanto, daqui em diante, um número complexo pode ser identificado com um ponto do plano (numérico) ou com um vetor do plano (veja figura abaixo).



Observação 2.3.1

1. *Notemos que o produto de dois números complexos é um* **número complexo** *(veja a Definição 2.1.2), ou seja, um par ordenado formado por dois números reais que, com identificação acima, será um vetor do plano complexo.*

   Portanto este produto (dado por (2.3)), nada tem a ver com o produto escalar estudado na Geometria Analítica.

   Esta é uma das diferenças entre o espaço euclidiano bidimensional, ou seja, $\mathbb{R}^2$, e o conjunto formado pelos números complexos, isto é, $\mathbb{C}$.

2. *Notemos que, com a identificação introduzida acima, a soma de dois números complexos pode ser interpretada, geometricamente, como a soma de vetores do plano.*

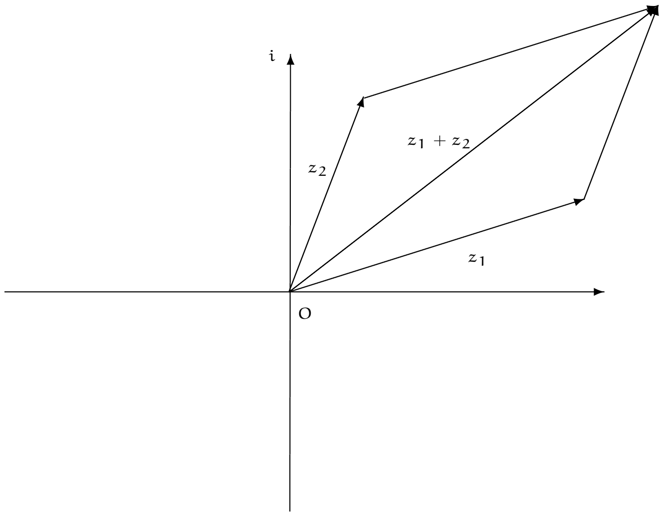
   Considerando-se

$$\begin{aligned} & z_1 = x_1 + y_1 \cdot i \\ e \quad & z_2 = x_2 + y_2 \cdot i\,, \end{aligned}$$

   da Proposiçao 2.1.3 (veja (2.36)), temos que

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

   e assim, no plano complexo, teremos a seguinte situação geométrica:

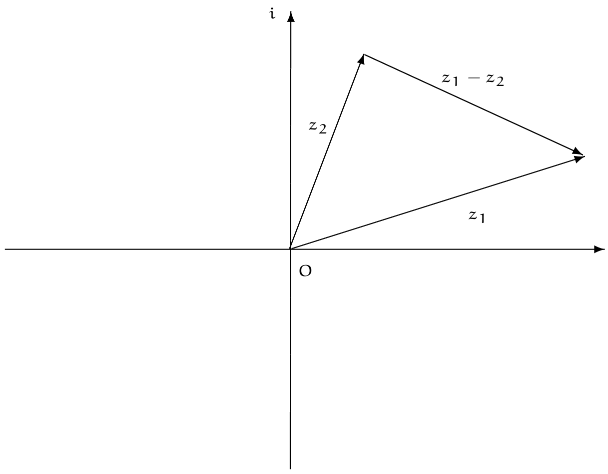


Logo, a soma de dois números compolexos pode ser interpretada geométricamente, como a soma de dois vetores no plano.

3. *De modo semelhante, da Proposição 2.1.4 (veja (2.37)), temos que*

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i$$

e assim, no plano complexo, teremos a seguinte situação geométrica:



Logo, a diferença de dois números compolexos pode ser interpretada geométricamente, como a diferença de dois vetores no plano.

4. *Mais adiante (veja a seção 2.6) daremos uma caracterização geométrica no plano complexo semelhante às acima, para o produto de dois números complexos.*

2.4 Conjugado de um número complexo

Começaremos introduzindo a:

Definição 2.4.1 *Seja*

$$\begin{aligned} z &= (x\,, y) \\ &\overset{(2.34)}{=} x + y \cdot i \in \mathbb{C}\,. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Definimos o **conjugado do número complexo $\underline{z}$**, *indicado por $\underline{\overline{z}}$, como sendo o seguinte número complexo:*

$$\begin{aligned} \overline{z} &\doteq (x\,, -y) \\ &\overset{(2.34)}{=} x - y \cdot i\,. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Para ilustrar, temos o:

Exemplo 2.4.1 *Encontre os conjugados dos seguinte números complexos:*

$$\begin{aligned} & z_1 \doteq (2\,, 3) \\ e \quad & z_2 \doteq 3 - \pi \cdot i\,. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Resolução:

Veja a resolução 4.0.2 do capítulo 4.

□

Observação 2.4.1

1. *Com a Definição 2.4.1, podemos introduzir a função*

$$\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,$$

dada por:

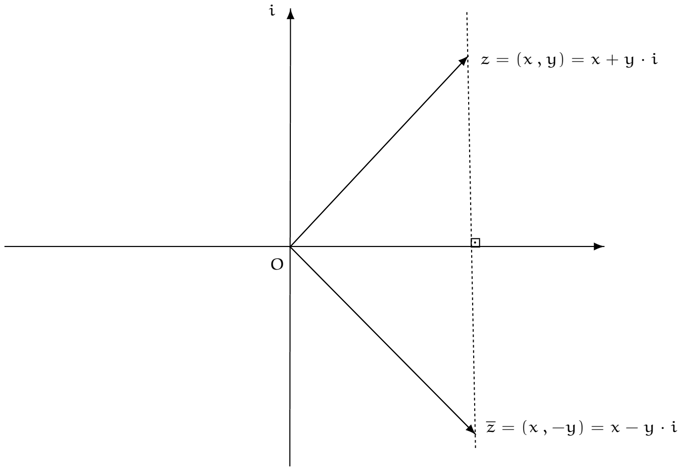
$$\overline{\cdot}(z) \doteq \overline{z}\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{2.61}$$

denominada **função conjugação** *ou, simplesmente,* **conjugação**.

2. *Dado*

$$\begin{aligned} z &= (x\,, y) \\ &\overset{(2.34)}{=} x + y \cdot i \in \mathbb{C}\,, \end{aligned} \tag{2.62}$$

no plano complexo, o conjugado do número complexo $\underline{z}$, ou seja, $\underline{\overline{z}}$, corresponderá, geometricamente, a reflexão do ponto $\underline{z}$, em relação ao eixo real do plano complexo, ou ainda, o ponto $\underline{\overline{z}}$ é o simétrico do ponto $\underline{z}$, em relação ao eixo real do plano complexo (veja figura abaixo).



A seguir exibiremos algumas propriedades da operação de conjugação:

Proposição 2.4.1 *Sejam* $z_1\,,z_2\,,z_3 \in \mathbb{C}$, *com* $z_3 \neq 0$ *e*

$$\begin{aligned} z &= (x\,,y) \\ &= x + y \cdot i \in \mathbb{C}\,. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Então teremos:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \tag{2.64}$$
$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \tag{2.65}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \tag{2.66}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}}\,, \tag{2.67}$$
$$\overline{(\overline{z})} = z\,, \tag{2.68}$$
$$\overline{x} = x\,, \tag{2.69}$$
$$z + \overline{z} = 2\,\Re(z)\,, \tag{2.70}$$
$$z - \overline{z} = 2\,\Im(z) \cdot i\,, \tag{2.71}$$
$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2\,. \tag{2.72}$$

Demonstração:
Veja a demonstração 3.0.8 do capítulo 3.

□

2.5 Valor absoluto ou módulo de um número complexo

Iniciaremos com a:

Definição 2.5.1 *Seja*

$$\begin{aligned} z &= (x\,,y) \\ &\overset{(2.34)}{=} x + y \cdot i \in \mathbb{C}\,. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Definimos o **valor absoluto (ou módulo) do número complexo** $\underline{z}$ *, indicado por* $|z|$*, como sendo o seguinte número real:*

$$|z| \doteq \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{2.74}$$

Observação 2.5.1 *Notemos que o módulo, introduzido na Definição 2.5.1, do número complexo*

$$z = (x\,,y)$$

pode ser olhado como a norma do vetor

$$\vec{v} \doteq (x\,,y)$$

que é definido por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.5.1 *Encontre o valor absoluto do seguinte númers complexo:*

$$\begin{aligned} z &\doteq (3\,,-\pi) \\ &= 3 - \pi \cdot i\,. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Resolução:

Veja a resolução 4.0.3 do capítulo 4.

□

Observação 2.5.2

1. *Com a Definição 2.5.1, podemos introduzir a função*

   $$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,$$

   dada por:

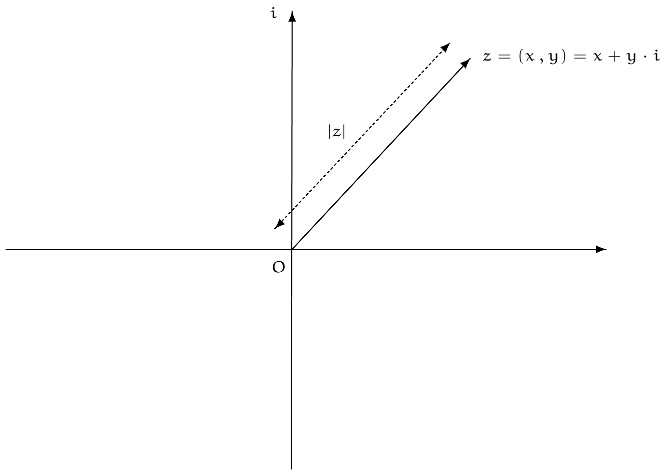
   $$|\cdot|(z) \doteq |z|\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{2.76}$$

   denominada **função valor absoluto (ou módulo)**.

2. *Dado*

$$\begin{aligned} z &= (x\,,y) \\ &\overset{(2.34)}{=} x + y \cdot i \in \mathbb{C}\,, \end{aligned} \tag{2.77}$$

no plano complexo, o valor absoluto (ou módulo) do número complexo $\underline{z}$*, ou seja,* $\underline{|z|}$*, corresponderá, geometricamente no plano complexo, a distância do ponto* z *ao ponto* $\underline{O}$*, ou ainda, ao comprimento do vetor* $\underline{z}$ *(veja a figura abaixo).*



3. *Dados*

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1\,,y_1) \\ &\overset{(2.34)}{=} x_1 + y_1 \cdot i \in \mathbb{C}\,, \end{aligned} \tag{2.78}$$

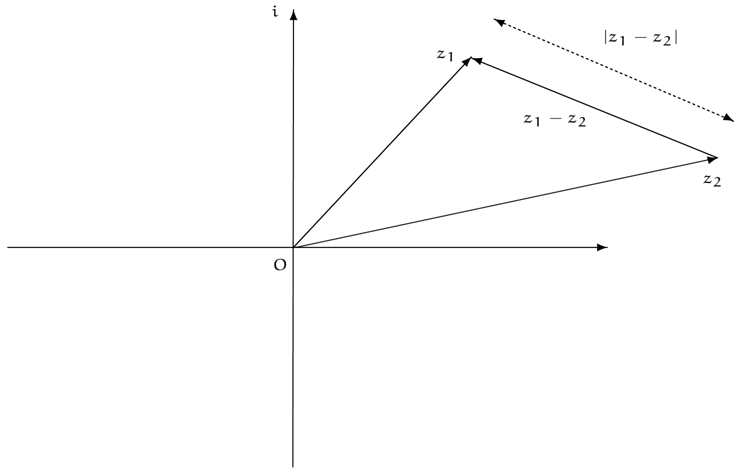
e

$$\begin{aligned} z_2 &= (x_2\,,y_2) \\ &\overset{(2.34)}{=} x_2 + y_2 \cdot i \in \mathbb{C}\,, \end{aligned} \tag{2.79}$$

no plano complexo, do item 3. da Observação 2.3.1 e do item 2. acima, segue que

$$|z_1 - z_2| \overset{(2.78),(2.79),(2.36)\ e\ (2.74)}{=} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,, \tag{2.80}$$

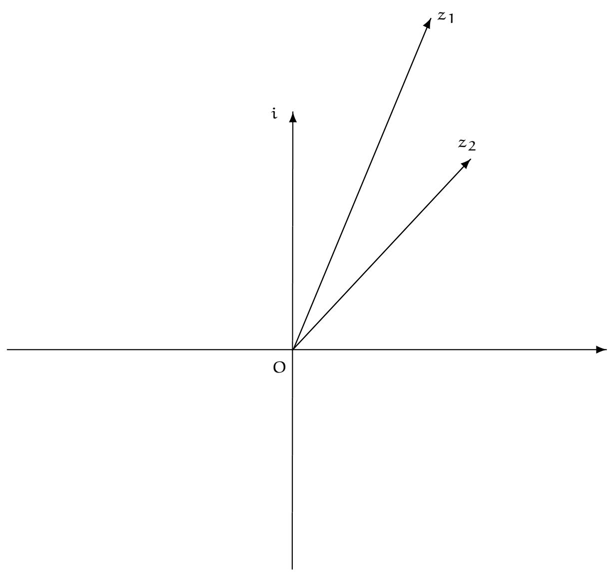
que corresponde a distância euclidiana do ponto z_1 *ao ponto* z_2*, no plano complexo, ou ainda, o comprimento do vetor* $z_1 - z_2$ *(visto na Geometria Analítica - veja a figura abaixo).*



4. *Na situação do item 3. acima, notamos que se*

$$|z_2| < |z_1|, \tag{2.81}$$

então, no plano complexo, isto significa que o ponto $\underline{z_1}$ *"está mais distante" do ponto* $\underline{O}$, *do que o ponto* $\underline{z_2}$ *(veja a figura abaixo)*



5. *Sejam* $a \in (0, \infty)$ *e* $z_o \in \mathbb{C}$.

   Do item 3. acima segue que, o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_o| = a\}, \tag{2.82}$$

no plano complexo, terá como representação geométrica, a circunferência de centro no ponto $\underline{z_o}$ *e de raio* $\underline{a}$.

De fato, pois se

$$z_o = (x_o\,, y_o) \overset{(2.34)}{=} x_o + y_o \cdot i$$

e

$$z = (x\,, y) \overset{(2.34)}{=} x + y \cdot i\,, \tag{2.83}$$

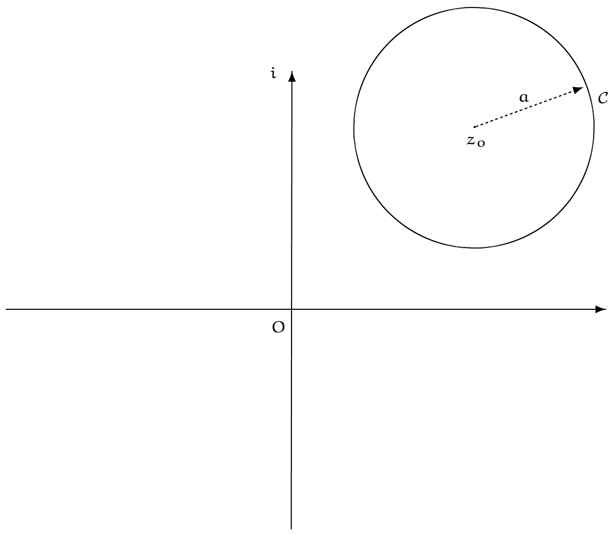
é tal que $z \in \mathcal{C}$ *se, somente se,*

$$a = |z - z_o| \overset{(2.83)\ e\ (2.80)}{=} \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = a^2\,, \tag{2.84}$$

que é a equação da circunferência de centro no ponto $\underline{z_o}$ *e de raio* $\underline{a}$.

A figura abaixo é representação geométrica do conjunto $\mathcal{C}$.



6. *Na situação do item 5. acima, novamente do item 3., segue que, o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_o| < a\}\,, \tag{2.85}$$

no plano complexo, terá como representação geométrica, a região interior de uma circunferência, de centro no ponto $\underline{z_o}$ *e de raio* $\underline{a}$.

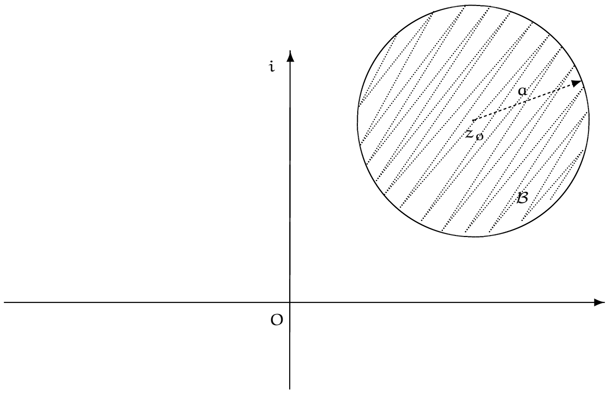
Utilizando as notações do item 5. acima, temos que $z \in \mathcal{B}$ *se, somente se,*

$$a > |z - z_o| \overset{(2.83)\ e\ (2.80)}{=} \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad a^2 > (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2\,, \tag{2.86}$$

que nos fornece geometricamente no plano complexo a região interior de uma circunferência , de centro no ponto $\underline{z_o}$ *e de raio* $\underline{a}$.

A figura abaixo é representação geométrica do conjunto $\mathcal{B}$.



7. *Na situação do item 5. acima, novamente do item 3., segue que, o conjunto*

$$\mathcal{D} \doteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_o| > a\}, \tag{2.87}$$

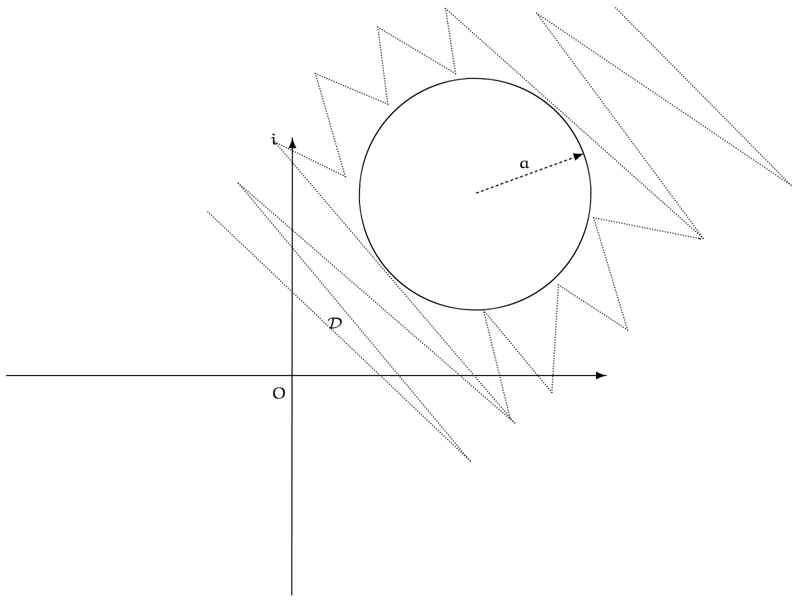
no plano complexo, terá como representação geométrica, a região exterior de uma circunferência, de centro no ponto $\underline{z_o}$ e de raio $\underline{a}$.

Utilizando as notações do item 5. acima, temos que $z \in \mathcal{B}$ se, somente se,,

$$\begin{aligned} a &< |z - z_o| \\ &\overset{(2.83)\ e\ (2.80)}{=} \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}\,, \\ \text{ou seja,} \quad a^2 &< (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2\,, \end{aligned} \tag{2.88}$$

que nos fornece geometricamente no plano complexo a região exterior de uma circunferência , de centro no ponto $\underline{z_o}$ e de raio $\underline{a}$.

A figura abaixo é representação geométrica do conjunto $\mathcal{C}$.



Deixaremos para o leitor a resolução do:

Exercício 2.5.1 *Encontrar e representar geometricamente no plano complexo, cada umas das regiões abaixo, que são dadas por:*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, |z - i| = 4\}, \quad \mathcal{B} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, |z - i| < 4\}, \quad \mathcal{C} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, |z - i| > 4\},\\
&\mathcal{D} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, \Re(z) = 2\}, \quad \mathcal{E} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, \Re(z) < 2\}, \quad \mathcal{D} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, \Re(z) > 2\},\\
&\mathcal{F} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, \Im(z) = 5\}, \quad \mathcal{G} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, \Im(z) < 5\}, \quad \mathcal{H} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, \Im(z) > 5\},\\
&\mathcal{I} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, z = \overline{z}\}, \quad \mathcal{J} \doteq \{z \in \mathbb{C};\, z + \overline{z} = 0\}.
\end{aligned}$$

□

Para finalizar esta seção temos as seguinte propriedades para o valor absoluto de números complexos:

Proposição 2.5.1 *Seja* $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$*, com* $z_3 \neq 0$.

1. *Temos que:*

$$
\begin{aligned}
|z|^2 &= [\Re(z)]^2 + [\Im(z)]^2\,, && (2.89)\\
|z| &\geq |\Re(z)| \\
&\geq \Re(z)\,, && (2.90)\\
|z| &\geq |\Im(z)| \\
&\geq \Im(z)\,, && (2.91)\\
z \cdot \overline{z} &= |z|^2\,, && (2.92)\\
|\overline{z}| &= |z|\,, && (2.93)\\
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1|\,|z_2|\,, && (2.94)\\
\left|\frac{z_1}{z_3}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_3|}\,, && (2.95)\\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|\,, && (2.96)\\
|z_1 - z_2| &\geq |z_1| - |z_2|\,. && (2.97)
\end{aligned}
$$

2. *Além disso,*

$$|z| = 0 \quad \textit{se, e somente,} \quad z = O\,.$$

3. *Finalmente, se* $z = x + i \cdot y$, *então*

$$|z| \leq |x| + |y|\,,$$

onde, para $a \in \mathbb{R}$, *temos que*

$$|a| \doteq \sqrt{a^2}\,. \tag{2.98}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.9 do capítulo 3.

□

Podemos utilizar as noções de conjugado e módulo de números complexos para escrever o quociente de dois números complexos, do seguinte modo:

Proposição 2.5.2 *Sejam* $z_1\,, z_2 \in \mathbb{C}$ *tal que* $z_2 \neq O$.

Então

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{|z_2|^2}\,, \frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{|z_2|^2}\right) \\
\frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{|z_2|^2} + \frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{|z_2|^2} \cdot i\,,
\end{aligned} \tag{2.99}
$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.10 do capítulo 3.

□

2.6 Forma polar de um número complexo

Notemos que se

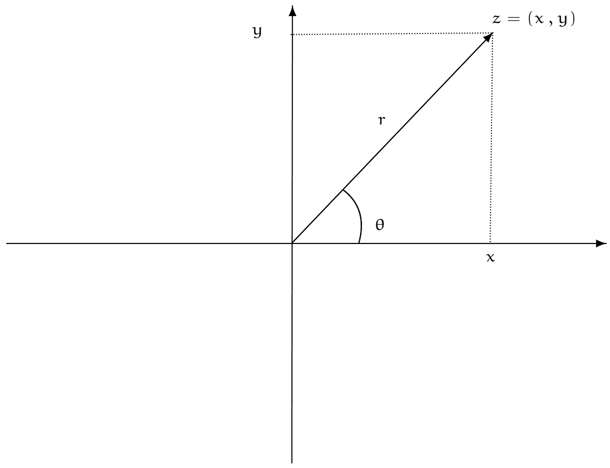
$$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C} \setminus \{O\},$$

podemos encontrar $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, tais que

$$x = r\cos(\theta) \quad (2.100)$$

$$\text{e} \quad y = r\,\text{sen}(\theta)\,. \quad (2.101)$$

Para tanto basta utilizar coordenadas polares no plano complexo (ou seja, em $\mathbb{R}^2$).
A figura abaixo ilustra a situação desfrita acima.



Observação 2.6.1 *Observemos que, na situação acima, teremos*

$$\begin{aligned} z &= x + y \cdot i \\ &\overset{(2.100)\ e\ (2.101)}{=} r\cos(\theta) + r\,\text{sen}(\theta) \cdot i \\ &= r\,[\cos(\theta) + \text{sen}(\theta) \cdot i] \end{aligned} \quad (2.102)$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.6.1 *A expressão (2.102) será dita* <u>forma polar do número complezo z</u>.

Observação 2.6.2

1. *A forma polar de um número complexo nada mais é que a representação de um elemento de $\mathbb{R}^2$ na forma polar (estudada em Geometria Analítica).*

2. *Lembremos que a função tangente, a saber,*

$$\text{tg} : D \doteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}\,;\ , k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R},$$

dada por:

$$\operatorname{tg}(\theta) \doteq \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad \textit{para cada} \quad \theta \in D, \tag{2.103}$$

é π-periódica e admite função inversa, quando restrita a um intervalo conveniente (de comprimento π).

Por exemplo, se considerarmos

$$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},$$

segue que a ela será bijetora.

Logo admitirá função inversa, a saber, a função

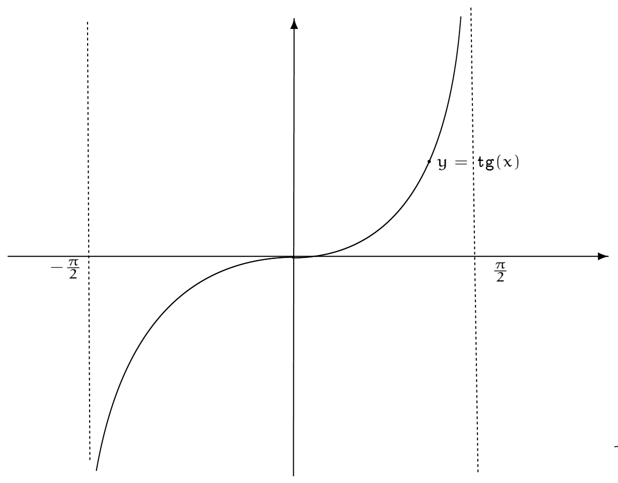
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

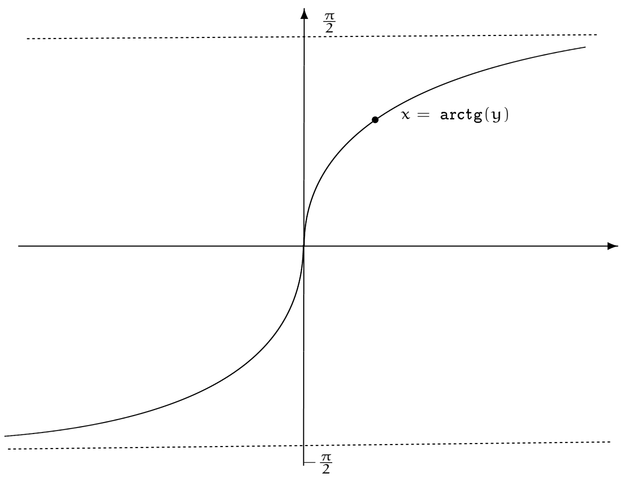
denominada **arco-tangente**.

Resumindo:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) = x, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \\ e \quad & \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\theta)) = \theta, \quad \textit{para cada} \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

3. *As figuras abaixo ilustram as representação es geométricas dos gráficos das duas funções consideradas acima.*





4. *Notemos que*

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\overset{(2.74)}{=} |z|. \end{aligned} \tag{2.104}$$

5. *Temos também que:*

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad se \quad x \neq 0 \tag{2.105}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi, \quad se \quad x = 0 \quad e \quad y > 0 \tag{2.106}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi, \quad se \quad x = 0 \quad e \quad y < 0 \tag{2.107}$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.6.2 *Um ângulo* $\underline{\theta}$ *obtido acima, será denominado* **um argumento do número complexo** $\underline{z}$.

O conjunto formado por todos os argumentos do número comlexo z *será denotado por* $\underline{\arg(z)}$.

Observação 2.6.3

1. *Notemos que se* $\theta \in \mathbb{R}$ *é um argumento do número complexo* z*, para* $k \in \mathbb{Z}$ *termeos que*

$$\theta + 2\,k\,\pi,$$

também será um argumento do número complexo z.

De fato, como

$$\cos(\theta + 2\,k\,\pi) = \cos(\theta) \tag{2.108}$$

$$e \quad \operatorname{sen}(\theta + 2\,k\,\pi) = \operatorname{sen}(\theta), \tag{2.109}$$

teremos

$$\begin{aligned} r\,[\cos(\theta + 2\,k\,\pi) + \operatorname{sen}(\theta + 2\,k\,\pi)\cdot i] &\overset{(2.108)\ e\ (2.109)}{=} r\,[\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\cdot i] \\ &\overset{(2.102)}{=} z, \end{aligned} \tag{2.110}$$

mostrando que o ângulo $\theta + 2\,k\,\pi$ *também será um argumento do número complexo* z.

2. *Logo, devido ao item acima,* $\arg(z)$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$*, a saber:*

$$\arg(z) \doteq \{\theta + 2\,k\,\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.111}$$

ou seja, $\arg(z)$ *é multivalente, ou ainda, não é uma função, pois se*

$$\theta \in \arg(z),$$

da Definição 2.6.2 e de (2.110), para cada $k \in \mathbb{Z}$*, temos que*

$$(\theta + 2\,k\,\pi) \in \arg(z).$$

3. *Devido aos fatos acima, precisaremos restringir o domínio para que* arg *torne-se uma função, a saber, qualquer intervalo de comprimento menor que* 2π*, mais explicitamente*

$$(\theta\,,\theta+2\,\pi] \quad ou \quad [\theta\,,\theta+2\,\pi)\,.$$

Em geral, consideramos o intervalo

$$\left(\frac{-\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]\,. \tag{2.112}$$

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.6.1 *Encontrar a forma polar do número complexo*

$$z \doteq 2 - 2 \cdot i\,. \tag{2.113}$$

Resolução:

Veja a resolução 4.0.5 do capítulo 4.

□

Temos também a

Proposição 2.6.1 *Suponhamos que a forma polar de um número complexo* $z \neq O$ *é dada por*

$$z = r\,[\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)]\,. \tag{2.114}$$

Então a forma polar do número complexo $\overline{z}$*, será dada por:*

$$\overline{z} = r\ [\cos(\theta) - i \cdot \operatorname{sen}(\theta)]\ . \tag{2.115}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.11 do capíulo 3.

□

Como consequência temos a:

Proposição 2.6.2 *Suponhamso que* $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$*.*

Então

$$\arg\,(\overline{z}) = -\arg(z)\,. \tag{2.116}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.12 do capítulo 3.

□

Observação 2.6.4 *Vale lembrar que* $\arg(z)$ *é um conjunto formado de infinitos valores distintos (veja* (2.111)*).*

Logo a igualdade (2.116) *acima é uma igualdade de conjuntos.*

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 2.6.3 *Suponhamos que os números complexos* $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$*, têm forma polar dadas por:*

$$\begin{aligned} & z_1 = r_1 \left[\cos(\theta_1) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1)\right], \\ e \quad & z_2 = r_2 \left[\cos(\theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_2)\right]. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Então

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \, r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right] . \tag{2.118}$$

Demonstração:
Veja a demonstração 3.0.13 do capítulo 3.

□

Podemos estender a Proposição 2.6.3 acima para o produto em um núemro finito de números complexos, mais precisamente temos o:

Corolário 2.6.1 *Suponhamos que para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, temos que o número complexo* $z_j \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$*, tem forma polar do número complexo dada por*

$$z_j \doteq r_j \, \left[\cos(\theta_j) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_j)\right] . \tag{2.119}$$

Então

$$\begin{aligned} & z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \, r_2 \cdots r_n \left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\right] , \\ \textit{ou ainda,} \quad & \prod_{j=1}^{n} z_j = \prod_{j=1}^{n} r_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j\right)\right] . \end{aligned} \tag{2.120}$$

Demonstração:
A demonstração pode ser feita utilizando-se a Proposição 2.6.3 e indução sobre $n \in \{2, 3, \cdots\}$.
Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Também como consequência Proposição 2.6.3 temos o:

Corolário 2.6.2 *Suponhamos que* $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$*.*
Então

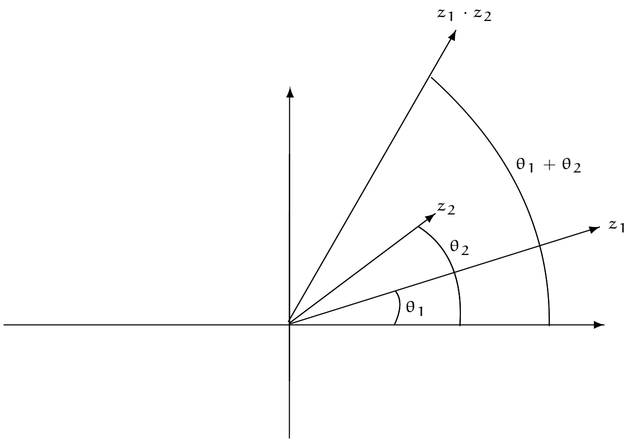
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg(z_2) . \tag{2.121}$$

Demonstração:
Veja a demonstração 3.0.14 do capítulo 3.

□

Observação 2.6.5

1. *Geometricamente, o Corolário 2.6.2 acima, pode ser interpretada pela figura abaixo.*



.

2. *Em particular, se* $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$, *do Corolário* 2.6.2, *o produto*

$$i \cdot z$$

pode ser obtido, geometricamente, rotacionando-se o vetor z, *no sentido anti-horário, de um ângulo reto, sem alterar o seu comprimento.*

De fato

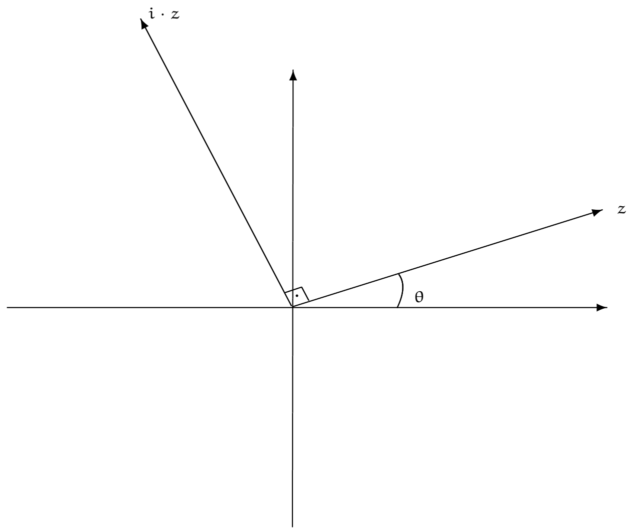
$$\text{se} \quad z = r\,[\cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta)]\,,$$

teremos:

$$\begin{aligned} i \cdot z &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot \{r\,[\cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta)]\} \\ &\overset{(3.83)}{=} 1 \cdot r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

que corresponde, geometricamente, a rotacionar o vetor z, *de um ângulo de* $\frac{\pi}{2}$ *radianos, no sentido anti-horário (dito, sentido positivo).*

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Podemos estender o Corolário 2.6.2 acima, para um número finito de números complexos, mais precisamente temos o

Corolário 2.6.3 *Suponhamos que para cada* $j \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, *temos que o número complexo* $z_j \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$, *tem forma polar do número complexo dada por*

$$z_j \doteq r_j \, [\cos(\theta_j) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_j)] \,. \tag{2.122}$$

Então

$$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \cdots + \arg(z_n) \,. \tag{2.123}$$

<u>**Demonstração:**</u>

A demonstração pode ser obtida utilizando-se o Corolário 2.6.2 e indição sobre $n \in \{2\,, 3\,\cdots\}$.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Como consequência do Corolário 2.6.1, temos o:

Corolário 2.6.4 *Suponhamos que o número complexo* $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$ *tem forma polar dada por*

$$z \doteq r \, [\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)] \,. \tag{2.124}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ *fixado, teremos*

$$z^n = r^n \, [\cos(n\,\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\,\theta)] \,. \tag{2.125}$$

e como consequência:

$$\arg(z^n) = n \, \arg(z) \,. \tag{2.126}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Veja a demonstração 3.0.15 do capítulo 3.

□

Como consequência do Corolário 2.6.4, temos o importante resultado:

Corolário 2.6.5 *Sejam $z \in \mathbb{C}$, tal que*

$$|z| = 1 \tag{2.127}$$

$$\text{ou seja,} \quad z = \cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta) \tag{2.128}$$

e $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Então

$$z^n = [\cos(n\,\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\,\theta)] \ , \tag{2.129}$$

denominada **fórmula de De Moivre**

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.16 do capítulo 3.

□

Temos também a

Proposição 2.6.4 *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$ dois número complexos, cujas formas polares são dadas por:*

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1\,[\cos(\theta_1) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1)]\,, \\ z_2 &= r_2\,[\cos(\theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_2)]\,. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \tag{2.131}$$

e como consequência

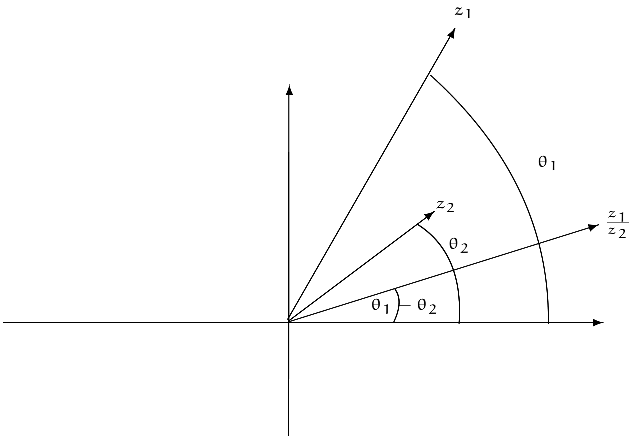
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg(z_2)\,. \tag{2.132}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.17 do capítulo 3.

□

Observação 2.6.6 *Geometricamente, a Proposição 2.6.4 acima, pode ser interpretada pela figura abaixo.*



Como consequência da Proposição 2.6.4, temos o:

Corolário 2.6.6 *Suponhamos que o número complexo $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$, tem forma polar dada por*

$$z = r\,[\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)]\,. \tag{2.133}$$

Então

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,[\cos(\theta) - i \cdot \operatorname{sen}(\theta)] \tag{2.134}$$

$$e \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,. \tag{2.135}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.18 do capítulo 3.

□

Podemos estender o Corolário 2.6.6, para a seguinte forma:

Corolário 2.6.7 *Suponhamos que o número complexo $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$, tem forma polar dada por*

$$z = r\,[\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)]\,, \tag{2.136}$$

e $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Então

$$z^{-n} = \frac{1}{r^n}\,[\cos(n\,\theta) - i \cdot \operatorname{sen}(n\,\theta)] \tag{2.137}$$

$$e \quad \arg\left(z^{-n}\right) = -n\,\arg(z)\,. \tag{2.138}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.19 do capítulo 3.

□

Observação 2.6.7 *Em algumas situações poderá ser útil utilizar uma representação de um número complexo z, na forma polar "em torno" de um ponto z_o, mais precisamente,* *considerar uma representação na forma polar do número complexo*

$$z - z_o\,,$$

ou seja, escrever

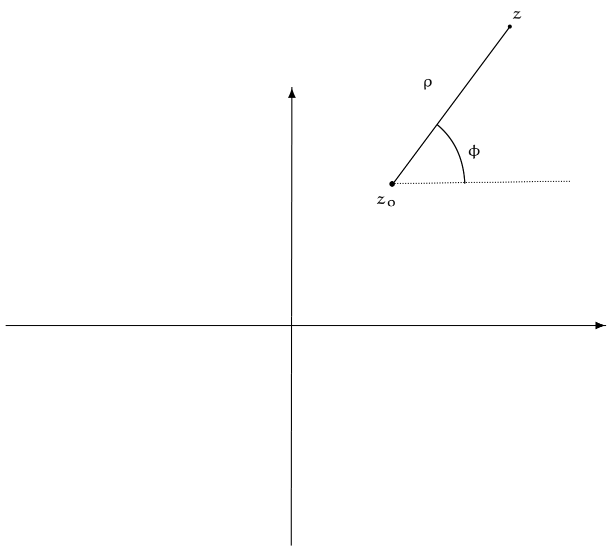
$$z - z_o = \rho\,[\cos(\phi) + i \cdot \operatorname{sen}(\phi)]\,, \tag{2.139}$$

onde

$$\rho \doteq |z - z_o| \tag{2.140}$$

e $\phi \in \mathbb{R}$ *denota o ângulo que a semireta* $\overrightarrow{z_o z}$ *faz com a semi-reta paralela ao semi-eixo real positivo.*

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Para ilustrar temos o

Exemplo 2.6.2 *Obtenha, geometricamente, uma representação do conjunto formado por todas as soluções em* $\mathbb{C}$*, da equação*

$$z + i = 4\,[\cos(\phi) + i \cdot \operatorname{sen}(\phi)]\,, \tag{2.141}$$

para $\phi \in [0\,, 2\,\pi]$.

Resolução:

Veja a resolução 4.0.5 do capítulo 4. $\square$

2.7 Extração de raiz de número complexo

O objetivo central desta seção é, dado

$$z_* \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$$

e $n \in \mathbb{N}$ fixado, encontrar todas as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

$$z^n = z_* \,. \tag{2.142}$$

Observação 2.7.1

1. *Para tanto, suponhamos que a forma polar do número complexo z_*, é dada por:*

$$z_* = r_* \left[\cos(\theta_*) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_*)\right] \tag{2.143}$$

e a forma polar do número complexo z, é dada por:

$$z = r \left[\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)\right] . \tag{2.144}$$

Logo, de (2.129), segue que

$$z^n = r^n \left[\cos(n\,\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\,\theta)\right] . \tag{2.145}$$

Logo, substituindo de (2.145) e (2.143) em (2.142), obteremos:

$$r^n \left[\cos(n\,\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\,\theta)\right] = r_* \left[\cos(\theta_*) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_*)\right] . \tag{2.146}$$

Portanto deveremos ter:

$$\begin{aligned} & r^n = r_* \,, \\ \textit{ou ainda, } (\sqrt[n]{\ } \textit{ de números reais}) \quad & r_* = \sqrt[n]{r} \,, \qquad (2.147) \\ & n\,\theta = \theta_* + 2\,k\,\pi \,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{Z} \,, \\ \textit{ou seja,} \quad & \theta_* = \frac{\theta}{n} - \frac{2\,k\,\pi}{n} \,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{Z} \,. \\ \textit{Logo} \quad & \theta_k \doteq \theta_* = \frac{\theta}{n} + \frac{2\,m\,\pi}{n} \,, \quad \textit{para cada} \quad m \in \mathbb{Z} \,. \end{aligned}$$
$$(2.148)$$

Deste modo, para cada $k \in \mathbb{Z}$, obtemos um número complexo z_k, dado por

$$z_k = \sqrt[n]{r_*} \left[\cos(\theta_k) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_k)\right] , \tag{2.149}$$

onde θ_k é dado por (2.148), que irá satisfazer a equação (2.142).

2. *Notemos que se*

$$\begin{aligned} & k_1 - k_2 = m\,n \,, \\ \textit{ou seja,} \quad & k_1 = k_2 + m\,n \,, \end{aligned} \tag{2.150}$$

teremos que

$$z_{k_1} = z_{k_2} \,, \tag{2.151}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}\theta_{k_1} &\overset{(2.148)}{=} \frac{\theta}{n} + \frac{2\,k_1\,\pi}{n}\\ &\overset{(2.150)}{=} \frac{\theta}{n} + \frac{2\,(k_2 + m\,n)\,\pi}{n}\\ &= \frac{\theta}{n} + \frac{2\,k_2\,\pi}{n} + 2\,m\,\pi,\end{aligned} \tag{2.152}$$

logo teremos:

$$\begin{aligned} z_{k_1} &\overset{(2.149)\ \textit{com}\ k=k_1}{=} \sqrt[n]{r}\,[\cos(\theta_{k_1}) + i\cdot \operatorname{sen}(\theta_{k_1})]\\ &\overset{(2.152)}{=} \sqrt[n]{r_*}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k_2\,\pi}{n} + 2\,m\,\pi\right) + i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k_2\,\pi}{n} + 2\,m\,\pi\right)\right]\\ &\overset{\cos\ \textit{e}\ \operatorname{sen}\ \textit{são}\ 2\pi\textit{-periódicas}}{=} \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k_2\,\pi}{n}\right) + i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k_2\,\pi}{n}\right)\right]\\ &= \sqrt[n]{r}\,[\cos(\theta_{k_2}) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_{k_2})]\\ &\overset{(2.149)\ \textit{com}\ k=k_2}{=} z_{k_2}\,,\end{aligned}$$

mostrando que (2.151) *ocorre.*

3. *Devido ao fato acima , podemos encontrar, exatamente,* n *soluções distintas da equação* (2.142)*, a saber:*

$$z_* = z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right) + i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right)\right], \tag{2.153}$$

   para $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$*, ou seja,*

$$z_k^{\,n} = z\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}. \tag{2.154}$$

4. *Notemos que, o módulo de todos os números complexos* z_k*, dados por* (2.153)*, é* $\sqrt[n]{r_*}$*, ou seja,*

$$|z_k| = \sqrt[n]{r}\,, \tag{2.155}$$

   para todo $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

   De fato, pois devido a (2.153)*, temos que:*

$$\left|\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right) + i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right)\right| = 1\,.$$

5. *Por outro lado, para cada* $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$*, o argumento do número complexo* z_k*, pode ser obtido por adição de* k *parcelas iguais a* $\frac{2\pi}{n}$*, à* $\frac{\theta}{n}$ *(veja* (2.148)*, ou seja,*

$$\arg(z_k) = \left\{\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{2.156}$$

6. *Notemos que as soluções complexas da equação (2.142) correspondem as raízes* n*-ésimas do número complexo* z_**, ou seja,* $z_*{}^n = z l$.

   Em particular, temos que z_* $(= z^{\frac{1}{n}})$ *é multivalente (mais precisamente, possui* n *valores distintos), ou seja, não é uma função.*

7. *Geometricamente, para obtermos todos os valores complexos de*

$$z_k\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \{0\,,1\,,\cdots,n-1\},$$

   podemos agir da seguinte maneira:

   Encontre a forma polar do número complexo $z \neq O$*, ou seja, (2.144).*

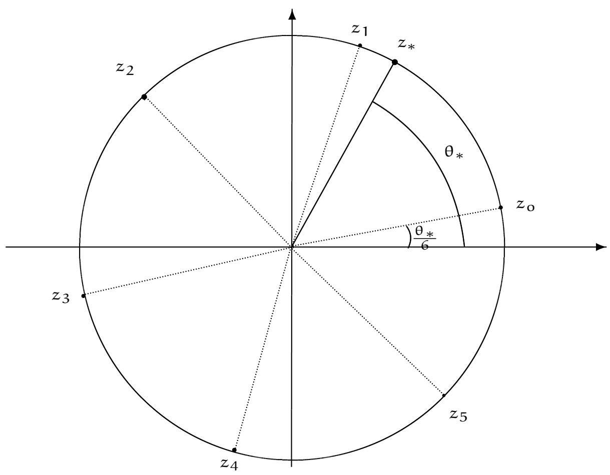
   Represente, geometricamente, o número complexo z_* *no plano complexo.*

   Trace uma circunferência, que denotaremos por $\mathcal{C}$*, de centro na origem* O *e raio igual a* $|z| = r$.

   Construa um polígono regular de n*-lados, cujos vértices pertençam a circunferência* $\mathcal{C}$ *e de modo que o número complexo* z_o *(ou seja, quando* $k = 0$ *em (2.153)) seja um dos vértices desse polígono regular.*

   Os vértices desse polígono serão todos os valores de $z^{\frac{1}{n}}$ *(ou seja, todas as soluções da equação (2.142)).*

   A figura abaixo ilustra a situação descrita acima para o caso que $n = 6$.



Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 2.7.1 *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *fixado. Encontrar todas as raízes* n*-ésimas da unidade* 1*, ou seja, todos os valores para* $1^{\frac{1}{n}}$.

Resolução:

Veja a resolução 4.0.6 do capítulo 4.

□

Observação 2.7.2

1. *Notemos que, definindo-se*

$$\omega \doteq \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right), \tag{2.157}$$

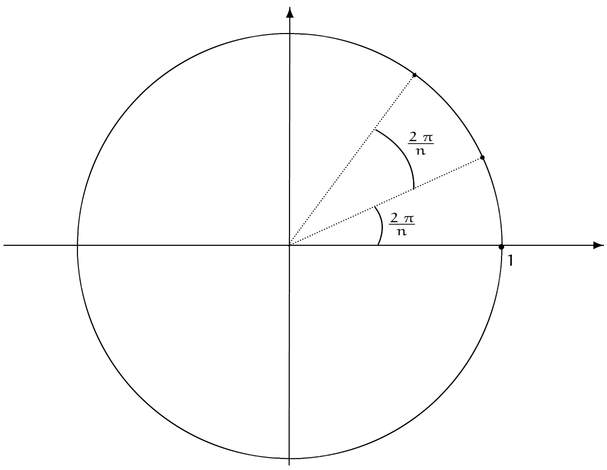
como consequência do Exemplo 2.7.1 e da fórmula de De Moivre (ou seja, (2.129)*) teremos que as raízes da unidade, ou seja, todas as soluções da equação*

$$z^n = 1, \tag{2.158}$$

serão da forma

$$1, \ \omega, \ \omega^2, \ \cdots, \ \omega^{n-1} \tag{2.159}$$

2. *Geometricamente, no plano complexo, temos a seguinte configuração para a situação acima.*

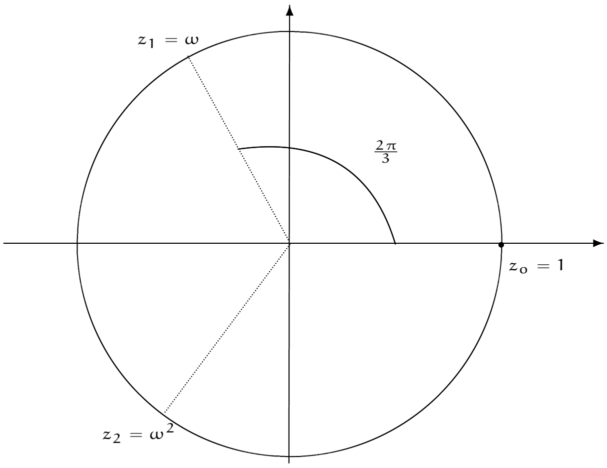


3. *Se, por exemplo* $n = 3$*, teremos que as* 3 *raízes da unidade, ou seja, as soluções complexas da equação*

$$z^3 = 1, \tag{2.160}$$

podem ser obtidas, geometricamente no plano complexo, como sendo os vértices de um triângulo equilátero, cujos vértices pertencem a circunferência centrada na origem O *e raio igual a* 1*, sendo um desses vértices o ponto* $(1, 0)$ *(ou seja, o número complexo* $z \doteq 1$*).*

A figura abaixo ilusta a situação descrita acima.



Analiticamente, teremos, por (2.153) *e* (4.6) *(com* $n = 3$*):*

$$1^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$
$$\overset{(4.6)\ e\ (4.7)}{=} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right),$$

para $k \in \{0, 1, 2\}$*, ou seja,*

$$k = 0, \quad \textit{teremos:} \quad 1^{\frac{1}{3}} = \cos(0) + i \cdot \operatorname{sen}(0) = 1,$$
$$k = 1, \quad \textit{teremos:} \quad 1^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2},$$
$$k = 2, \quad \textit{teremos:} \quad 1^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2},$$

serão todas as soluções complexas da equação (2.160)*, ou ainda, as* 3 *raízes cúbicas distintas, da unidade* 1*.*

4. *Notemos que, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, a equação*

$$z^n = 0$$

só admite a solução trivial, a saber,

$$z \doteq O,$$

ou ainda

$$O^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.7.2 *Encontrar e representar geometricamente no plano complexo, todas as soluções complexas da equação*

$$z^6 = 1\,, \tag{2.161}$$

ou seja, todas as raízes sextas da unidade.

Resolução:

Veja a resolução 4.0.7 do capítulo 4.

□

Para finalizar a seção temos a:

Proposição 2.7.1 *Sejam* $m\,, n \in \mathbb{N}$*, primos entre si e* $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$ *cuja forma polar é dada por*

$$z = r\,[\cos(\theta) + i \cdot \mathrm{sen}(\theta)]\,. \tag{2.162}$$

Então

$$(z^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \omega^k\,, \tag{2.163}$$

para cada $k \in \{0\,, 1\,, 2\,, \cdots, n-1\}$*, onde* $\omega \in \mathbb{C}$ *é dado por* (2.157)*.*

Em particular,

$$\arg\,(z^m)^{\frac{1}{n}} = \left\{\frac{m\,\theta}{n} + 2\,k\,\pi\,;\; k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{2.164}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.20 do capítulo 3.

□

Para finalizar temos a:

Proposição 2.7.2 *Se* $z \in \mathbb{C}^*$*, temos:*

$$(z^m)^{\frac{1}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m. \tag{2.165}$$

Demonstração:

Veja a demonstração 3.0.21 do capítulo 3.

□

Observação 2.7.3 *Baseado na Proposição 2.7.2 podemos definir a família de números complexos*

$$z^{\frac{m}{n}} \doteq (z^m)^{\frac{1}{n}} \tag{2.166}$$

$$\text{ou, por:}\quad z^{\frac{m}{n}} \doteq \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m. \tag{2.167}$$

Lembremos que $z^{\frac{m}{n}}$ *será multivalente, ou seja, não é função.*

Mais explicitamente, $z^{\frac{m}{n}}$*, pode ser dado:*

$$\text{por:}\quad z^{\frac{m}{n}} \overset{(2.166)\ e\ (2.163)}{=} \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \omega^k \tag{2.168}$$

$$\text{ou, por:}\quad z^{\frac{m}{n}} \overset{(2.167)\ e\ (3.96)}{=} \left(\sqrt[n]{r}\right)^m\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \omega^l\,. \tag{2.169}$$

□

Capítulo 3

Demonstrações dos resultados

Demonstração 3.0.1 *da Proposição 2.1.1:*

Sejam

$$z_1 = (x_1\,,y_1)\,, \tag{3.1}$$

$$e \quad z_2 = (x_2\,,y_2)\,. \tag{3.2}$$

Logo,

$$z_1 + z_2 \overset{(3.1)\,,(3.2)\ e\ (2.1)}{=} (x_1 + x_2\,, y_1 + y_2)\,. \tag{3.3}$$

Desta forma teremos:

$$\begin{aligned} \Re[z_1 + z_2] &\overset{(2.10)\ e\ (3.3)}{=} x_1 + x_2 \\ &\overset{(3.1)\,,(3.2)\ e\ (2.10)}{=} \Re[z_1] + \Re[z_2]\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (2.16)*.*

Também teremos:

$$\begin{aligned} \Im[z_1 + z_2] &\overset{(2.11)\ e\ (3.3)}{=} y_1 + y_2 \\ &\overset{(3.1)\,,(3.2)\ e\ (2.11)}{=} \Im[z_1] + \Im[z_2]\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (2.17)*, completando a demonstração.*

□

Demonstração 3.0.2 *da Proposição 2.1.2:*

Sejam

$$z_1 = (x_1\,,y_1) \tag{3.4}$$

$$e \quad z_2 = (x_2\,,y_2) \in \mathbb{C}\,, \tag{3.5}$$

$$logo: \quad -z_2 \overset{(2.22)}{=} (-x_2\,,-y_2) \tag{3.6}$$

de (2.22)

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &\overset{(2.23)}{=} z_1 + (-z_2) \\ &\overset{(3.4),(3.6)\ e\ (2.1)}{=} (x_1 + (-x_2)\,, y_1 + (-y_2)) \\ &= (x_1 - x_2\,, y_1 - y_2)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.27).

□

Demonstração 3.0.3 *da Proposição 2.1.3 :*
Se

$$z_1 = (x_1\,, y_1) \tag{3.7}$$
$$e \quad z_2 = (x_2\,, y_2) \in \mathbb{C}\,. \tag{3.8}$$

então, do item 3. da Observação 2.1.8, segue que:

$$z_1 \overset{(3.7)\ e\ (2.34)}{=} x_1 + i \cdot y_1 \tag{3.9}$$
$$e \quad z_2 \overset{(3.8)\ e\ (2.34)}{=} x_2 + i \cdot y_2 \in \mathbb{C}\,. \tag{3.10}$$

Logo

$$z_1 + z_2 \overset{(3.9),(3.10)\ e\ (2.34)}{=} (x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i)\,. \tag{3.11}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &\overset{(3.7),(3.8)\ e\ (2.1)}{=} (x_1 + x_2\,, y_1 + y_2) \\ &\overset{(2.34)}{=} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Logo, de (3.11) *e* (3.12)*, obtemos*

$$(x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i\,,$$

mostrando a validade de (2.36).

□

Demonstração 3.0.4 *da Proposição 2.1.4 :*
Se

$$z_1 = (x_1\,, y_1) \tag{3.13}$$
$$e \quad z_2 = (x_2\,, y_2) \in \mathbb{C}\,. \tag{3.14}$$

então, do item 3. da Observação 2.1.8, segue que:

$$z_1 \overset{(3.13)\ e\ (2.34)}{=} x_1 + i \cdot y_1 \tag{3.15}$$
$$e \quad z_2 \overset{(3.14)\ e\ (2.34)}{=} x_2 + i \cdot y_2 \in \mathbb{C}\,, \tag{3.16}$$
$$logo \quad z_1 - z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) - (x_2 + i \cdot y_2)\,. \tag{3.17}$$

Logo

$$z_1 - z_2 \overset{(2.27)}{=} (x_1 - y_1\,, x_2 - y_2)\,,$$

assim, de (2.34)*, segue que* $\quad z_1 - z_2 = (x_1 - y_1) + i \cdot (x_2 - y_2) \qquad (3.18)$

Logo

$$(x_1 + y_1 \cdot i) - (x_2 + y_2 \cdot i) \overset{(3.17)\ e\ (3.18)}{=} (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i\,,$$

mostrando a validade de (2.37).

□

Demonstração 3.0.5 *da Proposição 2.1.5 :*

Se

$$z_1 = (x_1\,, y_1) \qquad (3.19)$$

$$e \quad z_2 = (x_2\,, y_2) \in \mathbb{C}\,. \qquad (3.20)$$

então, do item 3. da Observação 2.1.8, segue que:

$$z_1 \overset{(3.19)\ e\ (2.34)}{=} x_1 + i \cdot y_1 \qquad (3.21)$$

$$e \quad z_2 \overset{(3.20)\ e\ (2.34)}{=} x_2 + i \cdot y_2\,. \qquad (3.22)$$

Então

$$z_1 \cdot z_2 \overset{(3.21)\ e\ (3.22)}{=} (x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + y_2 \cdot i)\,. \qquad (3.23)$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &\overset{(2.3)}{=} (x_1\,x_2 - y_1\,y_2\,, x_1\,y_2 + y_1\,x_2) \\ &\overset{(2.34)}{=} (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + (x_1\,y_2 + y_1\,x_2) \cdot i\,. \qquad (3.24) \end{aligned}$$

Logo

$$(x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + y_2 \cdot i) \overset{(3.23)\ e\ (3.24)}{=} (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + (x_1\,y_2 + y_1\,x_2) \cdot i\,,$$

mostrando a validade de (2.38).

□

Demonstração 3.0.6 *da Proposição 2.1.6 :*

Suponhamos que

$$z_1 = (x_1\,, y_1)\,,$$

$$z_2 = (x_2\,, y_2) \qquad (3.25)$$

$$e \quad z_3 = (x_3\,, y_3)\,. \qquad (3.26)$$

Logo, da Definição 2.1.2, segue que

$$z_1 = z_2 \cdot z_3$$

que de (3.25), (3.26) e (2.3), é o mesmo que: $$(x_1\,,y_1) = (x_2\,x_3 - y_2\,y_3\,, x_2\,y_3 + y_2\,x_3)$$

ou seja, $$\begin{cases} x_1 = x_2\,x_3 - y_2\,y_3 \\ y_1 = x_2\,y_3 + y_2\,x_3 \end{cases}$$

ou ainda (exercício para o leitor): $$\begin{cases} x_3 = \dfrac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \\[2ex] y_3 = \dfrac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \end{cases} . \tag{3.27}$$

Portanto, de (3.26) e (3.27), segue que

$$\begin{aligned} z_3 &= \left(\frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\,, \frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\right) \\ &\overset{(2.34)}{=} \left(\frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\right) + \left(\frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\right) \cdot i\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.43).

$\square$

Demonstração 3.0.7 *da Proposição 2.2.1 :*

Suponhamos que

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1\,, y_1)\,, \qquad (3.28) \\ z_2 &= (x_2\,, y_2)\,, \qquad (3.29) \\ e \quad z_3 &= (x_3\,, y_3)\,. \qquad (3.30) \end{aligned}$$

<u>Do item 1. :</u>

Notemos que

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &\overset{(3.28)\ e\ (3.29)}{=} (x_1\,, y_1) + (x_2\,, y_2) \\ &\overset{(2.1)}{=} (\overbrace{x_1 + x_2}^{\overset{\text{comutativa da + em } \mathbb{R}}{=} x_2 + x_1}\,, \overbrace{y_1 + y_2}^{\overset{\text{comutativa da + em } \mathbb{R}}{=} y_2 + y_1}) \\ &= (x_2 + x_2\,, y_2 + y_1) \\ &\overset{(2.1)}{=} (x_2\,, y_2) + (x_1\,, y_1) \\ &\overset{(3.28)\ e\ (3.29)}{=} z_2 + z_1\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.44).

Observemos também que

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &\overset{(3.28)\ e\ (3.29)}{=} (x_1\,, y_1) \cdot (x_2\,, y_2) \\
&\overset{(2.3)}{=} (\overbrace{x_1\,x_2 - y_1\,y_2}^{\text{comutativa da . em } \mathbb{R}\ \overset{}{=}\ x_2\,x_1 - y_2\,y_1}\,, \overbrace{x_1\,y_2 + y_1\,x_2}^{\text{comutativa da . em } \mathbb{R}\ \overset{}{=}\ y_2\,x_1 + x_2\,y_1}) \\
&= (x_2\,x_1 - y_2\,y_1\,, y_2\,x_1 + x_2\,y_1) \\
&\overset{(2.3)}{=} (x_2\,, y_2) \cdot (x_1\,, y_1) \\
&\overset{(3.28)\ e\ (3.29)}{=} z_2 \cdot z_1\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade de (2.45).

Do item 2. :

Notemos que

$$
\begin{aligned}
z_1 + (z_2 + z_3) &\overset{(3.28),(3.29),\ e\ (3.30)}{=} (x_1\,, y_1) + [(x_2\,, y_2) + (x_3\,, y_3)] \\
&\overset{(2.1)}{=} (x_1\,, y_1) + (x_2 + x_3\,, y_2 + y_3) \\
&\overset{(2.1)}{=} (\overbrace{x_1 + (x_2 + x_3)}^{\text{associativa da + em } \mathbb{R}\ \overset{}{=}\ (x_1+x_2)+x_3}\,, \overbrace{y_1 + (y_2 + y_3)}^{\text{associativa da + em } \mathbb{R}\ \overset{}{=}\ (y_1+y_2)+y_3}) \\
&= ((x_1 + x_2) + x_3\,, (y_1 + y_2) + y_3) \\
&\overset{(2.1)}{=} (x_1 + x_2\,, y_1 + y_2) + (x_3\,, y_3) \\
&\overset{(2.1)}{=} [(x_1\,, y_1) + (x_2 + y_2)] + (x_3\,y_3) \\
&\overset{(3.28),(3.29)\ e\ (3.30)}{=} (z_1 + z_2) + z_3\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade de (2.46).

Observemos que, denotando-se as propriedades

$$
\begin{aligned}
&\textit{associativa e comutativa de + em } \mathbb{R}. \textit{ por } (AC+), \\
&\textit{associativa e comutativa de . em } \mathbb{R}. \textit{ por } (AC.),
\end{aligned}
$$

teremos

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &\overset{(3.28),(3.29),\ e\ (3.30)}{=} (x_1\,, y_1) \cdot [(x_2\,, y_2) \cdot (x_3\,, y_3)] \\
&\overset{(2.3)}{=} (x_1\,, y_1) + (x_2\,x_3 - y_2\,y_3\,, x_2\,y_3 + y_2\,x_3) \\
&\overset{(2.3)}{=} (\overbrace{x_1\,(x_2\,x_3 - y_2\,y_3) - y_1\,(x_2\,y_3 + y_2\,x_3)}^{(AC+)\ e\ (AC.)\ \overset{}{=}\ (x_1\,x_2 - y_1\,y_2)x_3 - (x_1\,y_2 + y_1\,x_2)\,y_3}\,, \overbrace{x_1\,(x_2\,y_3 + y_2\,x_3) + y_1\,(x_2\,x_3 - y_2\,y_3)}^{(AC+)\ e\ (AC.)\ \overset{}{=}\ (x_1\,x_2 - y_1\,y_2)\,y_3 + (x_1\,y_2 + y_1\,x_2)\,x_3}) \\
&= ((x_1\,x_2 - y_1\,y_2)x_3 - (x_1\,y_2 + y_1\,x_2)\,y_3\,, (x_1\,x_2 - y_1\,y_2)\,y_3 + (x_1\,y_2 + y_1\,x_2)\,x_3) \\
&\overset{(2.3)}{=} [(x_1\,x_2 - y_1\,y_2\,, x_1\,y_2 + y_1\,x_2)] \cdot (x_3\,, y_3) \\
&\overset{(2.3)}{=} [(x_1\,, y_1) \cdot (x_2 + y_2)] \cdot (x_3\,y_3) \\
&\overset{(3.28),(3.29)\ e\ (3.30)}{=} (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade de (2.47).

<u>Do item 3. :</u>

Denotando-se as propriedades

$$\begin{aligned}&\textit{associativa e comutativa de } + \textit{ em } \mathbb{R}. \textit{ por } (AC+),\\&\textit{associativa e comutativa de } . \textit{ em } \mathbb{R}. \textit{ por } (AC.),\end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &\overset{(3.28),(3.29),\ e\ (3.30)}{=} (x_1\,,y_1) \cdot [(x_2\,,y_2) + (x_3\,,y_3)]\\
&\overset{(2.1)}{=} (x_1\,,y_1) \cdot (x_2 + x_3\,,y_2 + y_3)\\
&\overset{(2.3)}{=} \Big(\overbrace{x_1\,(x_2 + x_3) - y_1\,(y_2 + y_3)}^{(AC+)\ e\ (AC.)\ =\ [x_1\,x_2 - y_1\,y_2] + [x_1\,x_3 - y_1\,y_3]}\,,\overbrace{x_1\,(y_2 + y_3) + y_1\,(x_2 + x_3)}^{(AC+)\ e\ (AC.)\ =\ (y_1 + y_2) + y_3}\Big)\\
&= ([x_1\,x_2 - y_1\,y_2] + [x_1\,x_3 - y_1\,y_3]\,,\ [x_1\,y_2 + y_1\,x_2] + [x_1\,y_3 + y_1\,x_3])\\
&\overset{(2.3)}{=} [(x_1\,x_2 - y_1\,y_2\,,\ x_1\,y_2 + y_1\,x_2)] + [(x_1\,x_3 - y_1\,y_3\,,\ x_1\,y_3 + y_1\,x_3)]\\
&\overset{(2.1)}{=} [(x_1\,,y_1) \cdot (x_2\,,y_2)] + [(x_1\,,y_1) \cdot (x_3\,,y_3)]\\
&\overset{(3.28),(3.29)\ e\ (3.30)}{=} z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.48).

<u>Do item 4. :</u>

Notemos que

$$\begin{aligned}
z_1 + O &\overset{(3.28)\ e\ (2.9)}{=} (x_1\,,y_1) + (0\,,0)\\
&\overset{(2.1)}{=} (x_1 + 0\,, y_1 + 0)\\
&= (x_1\,,y_1)\\
&\overset{(3.28)}{=} z_1\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.49).

Para a unicidade do elemento neutro da adição em $\mathbb{C}$ *temos que, se* $O' \in \mathbb{C}$ *satifaz*

$$z + O' = z\,, \tag{3.31}$$

então

$$\begin{aligned}
O' &\overset{O\ satisfaz\ (2.49)\ com\ z \doteq O'}{=} O' + O\\
&\overset{O'\ satisfaz\ (3.31),\ com\ z \doteq O}{=} O\,,
\end{aligned}$$

mostrando a unicidade do elemento neutro da adição em $\mathbb{C}$.

<u>Do item 5. :</u>

Notemos que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot 1 &\stackrel{(3.28) \text{ e } (2.7)}{=} (x_1\,, y_1) \cdot (1\,, 0) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} (x_1\,.\,1 - y_1\,.\,0\,, x_1\,.\,0 + y_1\,.\,1) \\ &= (x_1\,, y_1) \\ &\stackrel{(3.28)}{=} z_1\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.50).

Para a unicidade do elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{C}$ *temos que, se* $1' \in \mathbb{C}$ *satifaz*

$$z \cdot 1' = z\,, \tag{3.32}$$

então

$$\begin{aligned} 1' &\stackrel{1 \text{ satisfaz } (2.50) \text{ com } z \doteq 1'}{=} 1' \cdot 1 \\ &\stackrel{1' \text{ satisfaz } (3.35),\text{ com } z \doteq 1}{=} 1\,, \end{aligned}$$

mostrando a unicidade do elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{C}$.

<u>**Do item 6. :**</u>

Se

$$z \doteq (x\,, y)\,, \tag{3.33}$$

$$\text{segue que, de (2.22), que:} \quad -z = (-x\,, -y)\,. \tag{3.34}$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} z + (-z) &\stackrel{(3.33) \text{ e } (3.34)}{=} (x_1\,, y_1) \cdot (-x\,, -y) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} (x + (-x)\,, y + (-y)) \\ &= (0\,, 0) \\ &\stackrel{(2.9)}{=} O\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.51).

Para a unicidade do elemento oposto da adição em $\mathbb{C}$ *temos que, se* $w' \in \mathbb{C}$ *satifaz*

$$z + w' = O\,, \tag{3.35}$$

então

$$\begin{aligned} w' &\stackrel{(2.49)}{=} w' + O \\ &\stackrel{(2.51)}{=} w' + (z + w) \\ &\stackrel{(2.46)}{=} (w' + z) + w \\ &\stackrel{(2.44)}{=} (z + w') + w\,, \\ &\stackrel{(3.35)}{=} O + w \\ &\stackrel{(2.49)}{=} w \end{aligned} \tag{3.36}$$

mostrando a unicidade do elemento oposto da adição em $\mathbb{C}$.

Do item 7. :

Notemos que

$$
\begin{aligned}
z \cdot w &\overset{(2.53)\ e\ (2.54)}{=} (x\,,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\\
&\overset{(2.3)}{=} \left(x\,\frac{x}{x^2+y^2}-y\,\frac{(-y)}{x^2+y^2}\,,x\,\frac{(-y)}{x^2+y^2}+y\,\frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\,,+\frac{-x\,y+y\,x}{x^2+y^2}\right)\\
&(1\,,0)\\
&\overset{(2.7)}{=} 1\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade de (2.54).

Para a unicidade do elemento inverso da multiplicação em $\mathbb{C}$ *temos que, se* $w' \in \mathbb{C}^*$ *satifaz*

$$z \cdot w' = 1\,, \tag{3.37}$$

então

$$
\begin{aligned}
w' &\overset{(2.50)}{=} w'\cdot 1\\
&\overset{(2.52)}{=} w'\cdot(z\cdot w)\\
&\overset{(2.47)}{=} (w'\cdot z)\cdot w\\
&\overset{(2.45)}{=} (z\cdot w')\cdot w\,,\\
&\overset{(3.37)}{=} 1\cdot w\\
&\overset{(2.45)}{=} w\cdot 1\\
&\overset{(2.50)}{=} w\,,
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

mostrando a unicidade do elemento inverso da multipicação em $\mathbb{C}$.

Do item 8. :

Se

$$
\begin{aligned}
(0\,,0) &\overset{(2.9)}{=} O\\
&= z_1\cdot z_2\\
&\overset{(3.28)\ e\ (3.29)}{=} (x_1\,,y_1)\cdot(x_2\,,y_2)\\
&\overset{(2.3)}{=} (x_1\,x_2-y_1\,y_2\,,\,x_1\,y_2+y_1\,x_2)
\end{aligned}
$$

$$\textit{deveremos ter:}\quad \begin{cases} x_1\,x_2-y_1\,y_2=0\\ x_1\,y_2+y_1\,x_2=0 \end{cases}. \tag{3.39}$$

Suponhamos que

$$z_1 \neq O\,,$$
$$\textit{ou seja,}\quad x_1\neq 0 \quad \textit{ou} \quad y_1\neq 0$$

satisfazem (3.39).

Consideremos o caso que

$$x_1 \neq 0 \,. \tag{3.40}$$

Logo, de (3.40) *e* (3.39), *teremos*

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{y_1\, y_2}{x_1} \\ x_1\, y_2 + y_1\, x_2 = 0 \end{cases} , \tag{3.41}$$

substituindo-se a 1.a na 2.a, obteremos: $\begin{cases} x_2 = \dfrac{y_1\, y_2}{x_1} \\ x_1\, y_2 + y_1\, \dfrac{y_1\, y_2}{x_1} = 0 \end{cases}$,

ou, equivalentemente: $\begin{cases} x_2 = \dfrac{y_1\, y_2}{x_1} \\ x_1^2\, y_2 + y_1^2\, y_2 = 0 \end{cases}$,

ou ainda, : $\begin{cases} x_2 = \dfrac{y_1\, y_2}{x_1} \\ \Bigg(\underbrace{x_1^2 + y_1^2}_{\neq 0\,, pois\ x_1 \neq 0} \Bigg)\ y_2 = 0 \end{cases}$,

ou seja: $\begin{cases} x_2 = \dfrac{y_1\, y_2}{x_1} \\ y_2 = 0 \end{cases}$,

substituindo a 2.a na 1.a, obteremos: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$,

mostrando que a única solução do sistema (não linear) (3.41) *será:*

$$(x_2\,, y_2) = (0\,, 0)\,, \tag{3.42}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} z_2 &\overset{(3.29)}{=} (x_2\,, y_2) \\ &\overset{(3.42)}{=} (0\,, 0) \\ &\overset{(2.9)}{=} O\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.56), *se*

$$z_1 = (x_1\,, y_1) \neq (0\,, y_1)\,.$$

Os outros casos, a saber

$$z_1 = (x_1\,, y_1) \neq (x_1\,, 0)\,,$$

ou seja, $\quad y_1 \neq 0\,,$

bem como o caso

$$z_2 \neq O$$

são semelhantes e serão deixados como exercício para o leitor, completando assim a demonstração do item 8. .

$\square$

Demonstração 3.0.8 *da Proposição 2.4.1 :*

Suponhamos que

$$z_1 = (x_1\,, y_1) \tag{3.43}$$
$$z_2 = (x_2\,, y_2) \tag{3.44}$$
$$\text{e} \quad z_3 = (x_3\,, y_3) \tag{3.45}$$

De (2.64):

Notemos que

$$z_1 + z_2 \overset{(3.43),(3.44)\ \text{e}\ (2.1)}{=} (x_1 + x_2\,, y_1 + y_2)\,. \tag{3.46}$$

Da Definição 2.4.1, temos

$$\overline{z_1} \overset{(3.43)\ \text{e}\ (2.59)}{=} (x_1\,, -y_1) \tag{3.47}$$
$$\overline{z_2} \overset{(3.44)\ \text{e}\ (2.59)}{=} (x_2\,, -y_2)\,, \tag{3.48}$$
$$\text{e} \quad \overline{z_1 + z_2} \overset{(3.46)\ \text{e}\ (2.59)}{=} (x_1 + x_2\,, -(y_1 + y_2))\,, \tag{3.49}$$

Logo

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &\overset{(3.49)}{=} (x_1 + x_2\,, -(y_1 + y_2)) \\ &= (x_1\,, -y_1) + (x_2\,, y_2) \\ &\overset{(3.47)\ \text{e}\ (3.48)}{=} \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.64).

De (2.65):

Notemos que

$$z_1 - z_2 \overset{(3.43),(3.44)\ \text{e}\ (2.27)}{=} (x_1 - x_2\,, y_1 - y_2)\,. \tag{3.50}$$

Da Definição 2.4.1, temos

$$\overline{z_1 - z_2} \overset{(3.50)\ \text{e}\ (2.59)}{=} (x_1 - x_2\,, -(y_1 - y_2))\,, \tag{3.51}$$

Logo

$$\begin{aligned} \overline{z_1 - z_2} &\overset{(3.51)}{=} (x_1 - x_2\,, -(y_1 - y_2)) \\ &= (x_1 - x_2\,, -y_1 - (-y_2)) \\ &\overset{(2.27)}{=} (x_1\,, -y_1) - (x_2\,, -y_2) \\ &\overset{(3.47)\ \text{e}\ (3.48)}{=} \overline{z_1} - \overline{z_2}\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.65).

De (2.66):

Notemos que

$$z_1 \cdot z_2 \overset{(3.43),(3.44)\ e\ (2.38)}{=} (x_1\,x_2 - y_1\,y_2\,,\, x_1\,y_2 + y_1\,x_2)\,. \tag{3.52}$$

Da Definição 2.4.1, temos

$$\overline{z_1 \cdot z_2} \overset{(3.52)\ e\ (2.59)}{=} (x_1\,x_2 - y_1\,y_2\,,\, -(x_1\,y_2 + y_1\,x_2))\,, \tag{3.53}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &\overset{(3.47),(3.48)\ e\ (2.38)}{=} (x_1\,x_2 - (-y_1)\,(-y_2)\,,\, x_1\,(-y_2) + (-y_1)\,x_2) \\ &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2\,,\, -(x_1\,y_2 + y_1\,x_2))\,,\end{aligned} \tag{3.54}$$

ou seja, comparando de (3.53) *com* (3.54), *teremos:*

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,,$$

mostrando a validade de (2.65).

De (2.67):

Da Definição 2.4.1, temos

$$\overline{z_3} \overset{(3.45)\ e\ (2.59)}{=} (x_3\,,\, -y_3) \tag{3.55}$$

Notemos que, de (3.43), (3.45) *e* (2.43), *temos*

$$\frac{z_1}{z_3} = \left(\frac{x_1\,x_3 + y_1\,y_3}{{x_3}^2 + {y_3}^2}\,,\, \frac{y_1\,x_3 - x_1\,y_3}{{x_3}^2 + {y_3}^2}\right)\,. \tag{3.56}$$

Logo:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_3}\right)} \overset{(3.56)\ e\ (2.59)}{=} \left(\frac{x_1\,x_3 + y_1\,y_3}{{x_3}^2 + {y_3}^2}\,,\, -\frac{y_1\,x_3 - x_1\,y_3}{{x_3}^2 + {y_3}^2}\right) \tag{3.57}$$

e de (3.47), (3.55) *e* (2.43), *temos*

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}} &= \left(\frac{x_1\,x_3 + (-y_1)\,(-y_3)}{{x_3}^2 + (-y_3)^2}\,,\, \frac{(-y_1)\,x_3 - x_1\,(-y_3)}{{x_3}^2 + (-y_3)^2}\right) \\ &= \left(\frac{x_1\,x_3 + y_1\,y_3}{{x_3}^2 + {y_3}^2}\,,\, -\frac{y_1\,x_3 - x_1\,y_3}{{x_3}^2 + {y_3}^2}\right) \\ &\overset{(3.56)}{=} \overline{\left(\frac{z_1}{z_3}\right)}\,,\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.67).

De (2.68):

Da Definição 2.4.1, temos

$$\overline{z} \overset{(2.63)\ e\ (2.59)}{=} (x\,,\, -y) \tag{3.58}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{z})} &\overset{(3.58)\ e\ (2.59)}{=} (x\,,\, -(-y)) \\ &= (x\,,\, y) \\ &\overset{(2.63)}{=} z\,,\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.68).

De (2.69):

Lembremos do item 5. da Observação 2.1.3 que, fazemos o seguinte abuso de notação (veja (2.7)*)*

$$x = (x\,,0)\,.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & x \overset{(2.7)}{=} (x\,,0)\,, && (3.59)\\ \textit{então} \quad & \overline{w} \overset{(3.59)\ e\ (2.59)}{=} (x\,,0)\\ & \overset{(2.7)}{=} x\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.69).

De (2.70):

Notemos que

$$\begin{aligned} z+\overline{z} & \overset{(2.63)\ e\ (3.58)}{=} (x+x\,,y+(-y))\\ & = (2\,x\,,0)\\ & \overset{(2.7)}{=} 2\,x\\ & \overset{(2.10)}{=} 2\,\Re(x) \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.70).

De (2.71):

Notemos que

$$\begin{aligned} z-\overline{z} & \overset{(2.63)\ e\ (3.58)}{=} (x-x\,,(-y)+(-y))\\ & = (0\,,-2\,y)\\ & = -2\,y\,(0\,,1)\\ & \overset{(2.8)}{=} -2\,y\cdot i\\ & \overset{(2.11)}{=} -2\,\Im(x)\cdot i \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.71).

De (2.72):

Notemos que, da Definição 2.4.1 temos que:

$$\overline{z} \overset{(2.63)\ e\ (2.59)}{=} x-y\cdot i\,. \tag{3.60}$$

Logo

$$\begin{aligned} z\cdot\overline{z} & \overset{(3.60)}{=} (x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)\\ & \overset{(2.38)}{=} [x\,x-y\,(-y)] + \underbrace{[x\,(-y)+x\,y]}_{=0}\cdot i\\ & = x^2+y^2\,. \end{aligned} \tag{3.61}$$

mostrando a validade de (2.72), completando a demonstração do resultado.

□

Demonstração 3.0.9 *da Proposição 2.5.1 :*

Suponhamos que

$$z = (x\,,y)\,, \tag{3.62}$$

$$z_1 = (x_1\,,y_1)\,, \tag{3.63}$$

$$z_2 = (x_2\,,y_2) \tag{3.64}$$

$$e \quad z_3 = (x_3\,,y_3)\,. \tag{3.65}$$

Do item 1. :

De (2.89):

Da Definição 2.5.1, temos

$$\begin{aligned} |z|^2 &\overset{(2.74)}{=} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \\ &= x^2+y^2 \\ &\overset{(2.10)\ e\ (2.11)}{=} [\Re(z)]^2 + [\Im(z)]^2\ , \end{aligned} \tag{3.66}$$

mostrando a validade de (2.89).

De (2.90):

Da Definição 2.5.1, temos

$$\begin{aligned} |z| &\overset{(2.74)}{=} \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq x^2}} \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \\ &\overset{(2.10)}{=} |\Re(z)| \\ &\geq \Re(z)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.90).

De (2.91):

Da Definição 2.5.1, temos

$$\begin{aligned} |z| &\overset{(2.74)}{=} \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq x^2}} \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \\ &\overset{(2.11)}{=} |\Im(z)| \\ &\geq \Im(z)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.91).

De (2.92):

Da Definição 2.5.1, temos

$$\begin{aligned}|z|^2 &\overset{(2.74)}{=} \left(\sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq x^2}}\right)^2 \\ &= x^2+y^2 \\ &\overset{(2.72)}{=} z\cdot\bar{z}\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.92).

De (2.93):

Notemos que

$$\bar{z} = (x\,,-y)\,. \tag{3.67}$$

Da Definição 2.5.1, temos

$$\begin{aligned}|\bar{z}| &\overset{(3.67)\ e\ (2.74)}{=} \left(\sqrt{x^2+(-y)^2}\right)^2 \\ &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &\overset{(2.74)}{=} |z|\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.93).

De (2.94):

Notemos que

$$\begin{aligned}|z_1\cdot z_2| &\overset{(3.63),(3.64),(2.3)\ e\ (2.74)}{=} \sqrt{(x_1\,x_2-y_1\,y_2)^2+(x_1\,y_2+x_2\,y_1)^2} \\ &= \sqrt{[(x_1\,x_2)^2-2\,x_1\,x_2\,y_1\,y_2+(y_1\,y_2)^2]+[(x_1\,y_2)^2+2\,x_1\,y_2\,x_2\,y_1+(x_2\,y_1)^2]} \\ &= \sqrt{(x_1\,x_2)^2+(y_1\,y_2)^2+(x_1\,y_2)^2+(x_2\,y_1)^2}\,.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}|z_1|\,|z_2| &\overset{(3.63),(3.64)\ e\ (2.74)}{=} \sqrt{(x_1)^2+(y_1)^2}\,\sqrt{(x_2)^2+(y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1)^2\,(x_2)^2+(x_1)^2\,(y_2)^2+(y_1)^2\,(x_2)^2+(y_1)^2\,(y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1\,x_2)^2+(y_1\,y_2)^2+(x_1\,y_2)^2+(x_2\,y_1)^2} \\ &\overset{(3.68)}{=} |z_1\cdot z_2|\,.\end{aligned} \tag{3.69}$$

mostrando a validade de (2.94).

De (2.95):

Notemos que

$$\left|\frac{z_1}{z_3}\right| \overset{(3.63),(3.65),(2.43)\ e\ (2.74)}{=} \sqrt{\left(\frac{x_1\,x_3+y_1\,y_3}{{x_3}^2+{y_3}^2}\right)^2+\left(\frac{x_3\,y_1-x_1\,y_3}{{x_3}^2+{y_3}^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(x_1\,x_3)^2+2\,x_1\,x_3\,y_1\,y_3+(y_1\,y_3)^2}{({x_3}^2+{y_3}^2)^2}+\frac{(x_3\,y_1)^2-2\,x_3\,y_1\,x_1\,y_3+(x_1\,y_3)^2}{({x_3}^2++{y_3}^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x_1\,x_3)^2+(y_1\,y_3)^2+(x_3\,y_1)^2+(x_1\,y_3)^2}{({x_3}^2+{y_3}^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{\left[{x_1}^2+{y_1}^2\right]\,\left({x_3}^2+{y_3}^2\right)}{({x_3}^2+{y_3}^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x_1)^2+(y_1)^2}{{x_3}^2+{y_3}^2}}\,. \tag{3.70}$$

Por outro lado,

$$\frac{|z_1|}{|z_3|} \overset{(3.63),(3.64)\ e\ (2.74)}{=} \frac{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}{\sqrt{{x_3}^2+{y_3}^2}}$$
$$\overset{(3.70)}{=} \left|\frac{z_1}{z_3}\right|\,.$$

mostrando a validade de (2.95).

De (2.96):

Como

$$z_1+z_2 \overset{(3.62),(3.63)\ e\ (2.1)}{=} (x_1+x_2\,,y_1+y_2) \tag{3.71}$$

teremos

$$|z_1+z_2|^2 \overset{(3.71)\ e\ (2.74)}{=} (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$
$$= \left({x_1}^2+2\,x_1\,x_2+{x_2}^2\right)+\left({y_1}^2+2\,y_1\,y_2+{y_2}^2\right)$$
$$= {x_1}^2+{y_1}^2+{x_2}^2+{y_2}^2+2\,(x_1\,x_2+y_1\,y_2)\,. \tag{3.72}$$

Por outro lado,

$$(|z_1|+|z_2|)^2 \overset{(3.62),(3.63)\ e\ (2.74)}{=} \left(\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}+\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}\right)^2$$
$$= \left({x_1}^2+{y_1}^2\right)+2\,\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\,\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}+\left({x_2}^2+{y_2}^2\right)$$
$$= {x_1}^2+{y_1}^2+{x_2}^2+{y_2}^2+2\sqrt{{x_1}^2\,{x_2}^2+{x_1}^2\,{y_2}^2+{y_1}^2\,{x_2}^2+{y_1}^2\,{y_2}^2}\,. \tag{3.73}$$

Notemos que

$$0 \le (x_1\,y_2-x_2\,y_1)^2$$
$$= {x_1}^2\,{y_2}^2-2\,x_1\,y_2\,x_2\,y_1+{x_2}^2\,{y_1}^2$$
$$\textit{implicando que:}\quad 2\,x_1\,y_2\,x_2\,y_1 \le {x_1}^2\,{y_2}^2+{x_2}^2\,{y_1}^2\,. \tag{3.74}$$

Portanto, utilizando-se (3.74) *em* (3.73) *(e o fato que a função* $\sqrt{\ }$ *é crescente), obteremos:*

$$\begin{aligned}
(|z_1| + |z_2|)^2 &\geq {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2 + 2\sqrt{{x_1}^2\,{x_2}^2 + 2\,x_1\,y_2\,x_2\,y_1 + {y_1}^2\,{y_2}^2} \\
&= {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2 + 2\sqrt{(x_1\,x_2 + y_1\,y_2)^2} \\
&= {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2 + 2\,|x_1\,x_2 + y_1\,y_2| \\
&\geq {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2 + 2\,(x_1\,x_2 + y_1\,y_2) \\
&\overset{(3.72)}{=} |z_1 + z_2|^2\,, \\
\textit{ou seja,} \quad |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.96).

De (2.97):

Notemos que

$$\begin{aligned}
|z_1| &= |(z_1 - z_2) + z_2| \\
&\overset{(2.96)}{\leq} |z_1 - z_2| + |z_2|\,, \\
\textit{ou seja,} \quad |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 - z_2|\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.97).

Do item 2. :

Notemos que

$$\begin{aligned}
|z| &= 0\,, \\
\textit{de 2.74, é o mesmo que:} \quad \sqrt{x^2 + y^2} &= 0\,, \\
\textit{que é equivalente a:} \quad x^2 + y^2 &= 0\,, \\
\textit{isto é::} \quad x = y &= 0\,, \\
\textit{ou seja,} \quad z &= O\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do item 2. .

Do item 3. :

Notemos que

$$\begin{aligned}
|z|^2 &\overset{(2.89)}{=} [\overbrace{\Re(z)}^{\overset{(3.62)}{=} x}]^2 + [\overbrace{\Im(z)}^{\overset{(3.62)}{=} y}]^2 \\
&= x^2 + y^2\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
&\overset{\sqrt{\ } \text{ é crescente}}{\leq} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \\
&\overset{(2.98)}{=} |x| + |y|\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do item 3. e do resultado.

□

Demonstração 3.0.10 *da Proposição 2.5.2 :*

Se

$$z_1 = (x_1\,,y_1) \tag{3.75}$$

$$e \quad z_2 = (x_2\,,y_2) \in \mathbb{C}\,. \tag{3.76}$$

Como $z_2 \neq O$, *de* (2.41), *segue que*

$$x_2 \neq 0 \quad ou \quad y_2 \neq 0$$

$$\text{implicando que:} \quad \overline{z_2} \overset{(2.59)}{\neq} O\,. \tag{3.77}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 \cdot i}{x_2 + y_2 \cdot i} \\
&\overset{\overline{z_2}=x_2-y_2\cdot i\neq O}{=} \frac{x_1 + y_1 \cdot i}{x_2 + y_2 \cdot i} \cdot \frac{x_2 - y_2 \cdot i}{x_2 - y_2 \cdot i} \\
&= \frac{(x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 - y_2 \cdot i)}{(x_2 + y_2 \cdot i) \cdot (x_2 - y_2 \cdot i)} \\
&\overset{(2.38)}{=} \frac{[x_1\,x_2 - y_1\,(-y_2)] + [x_1\,(-y_2) + y_1\,x_2)] \cdot i}{[x_2\,x_2 - y_2\,(-y_2)] + \underbrace{[x_2\,(-y_2) + x_2\,y_2]}_{=0} \cdot i} \\
&= \frac{[x_1\,x_2 + y_1\,y_2] + [-x_1\,y_2 + y_1\,x_2] \cdot i}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \\
&= \frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \cdot i\,,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

que coincide com a expressão obtida em (2.43).

□

Demonstração 3.0.11 *da Proposição 2.6.1 :*

Notemos que

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{r\,[\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)]} \\
&\overset{(2.66)\ e\ (2.64)}{=} \overline{r}\,[\overline{\cos(\theta)} + \overline{i} \cdot \overline{\operatorname{sen}(\theta)}] \\
&\overset{(2.69)}{=} r\,[\cos(\theta) - i \cdot \operatorname{sen}(\theta)] \\
&\overset{\cos(-\theta)=\cos(\theta)\ e\ \operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}(\theta)}{=} r\left[\underbrace{\cos(-\theta)}_{=\cos(\theta)} + i \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(-\theta)}_{=-\operatorname{sen}(\theta)}\right] \\
&= r\,[\cos(\theta) - i \cdot \operatorname{sen}(\theta)]\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.115)

□

Demonstração 3.0.12 *da Proposição 2.6.2 :*

Notemos que $r > 0$ *e* $\theta \in \mathbb{R}$, *são tais que*

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & z = r\,[\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)]\,, && (3.79)\\ \textit{então, de (2.115), teremos:} \quad & \overline{z} = r\,[\cos(-\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(-\theta)]\,. && (3.80)\\ \textit{De (3.79), (3.80) e (2.111), segue:} \quad & \arg(\overline{z}) = \{-\theta + 2\,k\,\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} = -\arg(z)\,, \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{Z}$, *completado a demonstração.*

□

Demonstração 3.0.13 *da Proposição 2.6.3 :*

Notemos que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &\overset{(2.117)}{=} \{r_1\,[\cos(\theta_1) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1)]\} \cdot \{r_2\,[\cos(\theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_2)]\} \\ &\overset{(2.44)\ e\ (2.45)}{=} r_1\,r_2 \left\{ \underbrace{\cos(\theta_1)\,\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\,\operatorname{sen}(\theta_2)}_{=\cos(\theta_1+\theta_2)} + i \cdot \left[\underbrace{\operatorname{sen}(\theta_1)\,\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\,\operatorname{sen}(\theta_2)}_{=\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)} \right] \right\} \\ &= r_1\,r_2\,\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot [\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]\}\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.118) e completando a demonstração.

□

Demonstração 3.0.14 *do Corolário 2.6.2 :*

Suponhamos que as formas polares dos números complexos z_1 *e* z_2 *são dadas por*

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1\,[\cos(\theta_1) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1)]\,,\\ z_2 &= r_2\,[\cos(\theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_2)]\,, \qquad (3.81) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\arg z_1 \doteq \{\theta_1 + 2\,k\,\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} \quad e \quad \arg z_2 \doteq \{\theta_2 + 2\,m\,\pi;\, m \in \mathbb{Z}\}, \qquad (3.82)$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Então, da Proposição 2.6.3, temos

$$z_1 \cdot z_2 \overset{(2.118)}{=} r_1\,r_2\,\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot [\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]\}\,. \qquad (3.83)$$

Logo, de (3.83), segue que

$$\begin{aligned} \arg(z_1 \cdot z_2) &= \{\theta_1 + \theta_2 + 2\,l\,\pi;\, l \in \mathbb{Z}\} \\ &\overset{(3.82)}{=} \arg(z_1) + \arg(z_2)\,, \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{Z}$, *como queríamos demonstrar.*

□

Demonstração 3.0.15 *do Corolário 2.6.4 :*

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$*, de* (2.124) *e do Corolário 2.6.1, com*

$$z_j \doteq z\,, \tag{3.84}$$

$$\text{ou seja,} \quad r_j \cdot r \tag{3.85}$$

$$\text{e} \quad \theta_j \doteq \theta\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,, \tag{3.86}$$

teremos

$$\begin{aligned} z^n &\overset{(3.84)}{=} \prod_{j=1}^{n} z_j \\ &\overset{(2.120)}{=} \prod_{j=1}^{n} r_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j\right)\right] \\ &\overset{(3.85)\,e\,(3.86)}{=} r^n\,\left[\cos\left(n\,\theta\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(n\,\theta\right)\right] \end{aligned} \tag{3.87}$$

mostrando a validade de (2.125)*.*

Como consequência temos

$$\begin{aligned} \arg\left(z^n\right) &\overset{(2.125)}{=} \{n\,\theta + 2\,k\,\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} \\ &\overset{(2.124)}{=} n\,\arg(z)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.126) *e completando a demonstração.*

□

Demonstração 3.0.16 *do Corolário 2.6.5 :*

Notemos que

$$\begin{aligned} r &\overset{(2.104)}{=} |z| \\ &\overset{(2.127)}{=} 1\,. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Logo, de (3.88)*,* (2.128) *e* (2.125)*, segue que*

$$z^n = [\cos(n\,\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\,\theta)]$$

mostrando a validade de (2.129) *e completando a demonstração.*

□

Demonstração 3.0.17 *da Proposição 2.6.4 :*

Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &\overset{(2.130)}{=} \frac{r_1\,[\cos(\theta_1)+i\cdot \operatorname{sen}(\theta_1)]}{r_2\,[\cos(\theta_2)+i\cdot \operatorname{sen}(\theta_2)]}\\
&= \frac{r_1\,[\cos(\theta_1)+i\cdot \operatorname{sen}(\theta_1)]}{r_2\,[\cos(\theta_2)+i\cdot \operatorname{sen}(\theta_2)]}\cdot\frac{r_1\,[\cos(\theta_1)-i\cdot \operatorname{sen}(\theta_1)]}{r_2\,[\cos(\theta_2)-i\cdot \operatorname{sen}(\theta_2)]}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos(\theta_1)\overbrace{\cos(\theta_2)}^{=\cos(-\theta_2)}+\operatorname{sen}(\theta_1)\overbrace{\operatorname{sen}(\theta_2)}^{=-\operatorname{sen}(-\theta_2)}+i\cdot[-\operatorname{sen}(\theta_1)\overbrace{\cos(\theta_2)}^{=\cos(\theta_2)}\overbrace{-\operatorname{sen}(\theta_2)}^{=\operatorname{sen}(-\theta_2)}\cos(\theta_1)]}{\underbrace{\cos^2(\theta_1)+\operatorname{sen}^2(\theta_1)}_{=1}}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\left\{\overbrace{\cos(\theta_1)\cos(-\theta_2)-\operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(-\theta_2)}^{=\cos(\theta_1-\theta_2)}+i\cdot\overbrace{[-\operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)+\operatorname{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1)]}^{=\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)}\right\}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\cdot \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)]\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.131).

De (2.130) *temos*

$$\arg z_1 \doteq \{\theta_1+2\,m\,\pi;\, m\in\mathbb{Z}\} \quad e \quad \arg z_2 \doteq \{\theta_2+2\,n\,\pi;\, n\in\mathbb{Z}\}\,. \tag{3.89}$$

Logo, como consequência (2.131), (3.89), *segue:*

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &\overset{(2.131)}{=} \{\theta_1-\theta_2+2\,k\,\pi;\, k\in\mathbb{Z}\}\\
&\overset{(3.89)}{=} \arg(z_1)-\arg(z_2)\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.132) *e demonstração.*

□

Demonstração 3.0.18 *do Corolário 2.6.6 :*

Como uma forma polar do número complexo 1 *é dada por*

$$1 = 1\,[\cos(0)+i\cdot \operatorname{sen}(0)] \tag{3.90}$$

de (2.134) *e da Proposição 2.6.4 (com* $r_1 \doteq 1$, $r_2 \doteq r$, $\theta_1 = 0$ *e* $\theta_2 \doteq \theta$*), teremos:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &\overset{(2.131)}{=} \frac{1}{r}\,[\cos(0-\theta)+i\cdot \operatorname{sen}(0-\theta)]\\
&= \frac{1}{r}\,[\cos(-\theta)+i\cdot \operatorname{sen}(-\theta)]\\
&\overset{\cos(-\theta)=\cos(\theta)\ e\ \operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}(\theta)}{=} \frac{1}{r}\,[\cos(\theta)-i\cdot \operatorname{sen}(\theta)]\,,
\end{aligned} \tag{3.91}$$

mostrando a validade (2.134).

Como consequência temos

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{1}{z}\right) &\overset{(3.91)}{=} \{-\theta+2\,k\,\pi;\, k\in\mathbb{Z}\}\\
&\overset{(2.133)}{=} \arg(-z)\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade (2.135) *e completando a demonstração.*

□

Demonstração 3.0.19 *do Corolário 2.6.7 :*

Dos Corolários 2.6.6 e 2.6.4, segue que

$$
\begin{aligned}
z^{-n} &= \frac{1}{z^n} \\
&= \left(\frac{1}{z}\right)^n \\
&\overset{(3.91)\ e\ (2.125)}{=} \left(\frac{1}{r}\right)^n \{\cos[n(-\theta)] + i \cdot \operatorname{sen}[n(-\theta)]\} \\
&= \left(\frac{1}{r}\right)^n \{\cos[-n\,\theta] + i \cdot \operatorname{sen}[-n\,\theta]\} \qquad (3.92)\\
&\overset{\cos(-\theta)=\cos(\theta)\ e\ \operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}(\theta)}{=} \frac{1}{r^n}\left[\cos(n\,\theta) - i \cdot \operatorname{sen}(n\,\theta)\right],
\end{aligned}
$$

mostrando a validade de (2.137).

Notemos que, (3.92) *implicará*

$$
\begin{aligned}
\arg\left(z^{-n}\right) &= \{-n\,\theta + 2\,k\,\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \\
&= -n\ \arg(z)\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade de (2.138) *e completando a demonstração.*

□

Demonstração 3.0.20 *da Proposição 2.7.1 :*

Notemos que, de (2.162) *e* (2.125), *segue que*

$$
z^m = r^m\left[\cos(m\,\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(m\,\theta)\right]. \qquad (3.93)
$$

Logo, de (3.93) *e* (2.153), *segue que, para cada* $k \in \{0\,,1\,,2\,,\cdots\,,n-1\}$, *teremos:*

$$
\begin{aligned}
(z^m)^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{r^m}\left[\underbrace{\cos\left(\frac{m\,\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right)}_{\overset{(2.117)}{=}\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{n}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\,k\,\pi}{n}\right)\right]}\right] \\
&= \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \left[\underbrace{\cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\,k\,\pi}{n}\right)}_{\overset{(2.129)}{=}\left[\cos\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)\right]^k}\right] \\
&= \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{2\,\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)\right]^k \\
&\overset{(2.157)}{=} \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \omega^k\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade de (2.163).

A identidade (2.164) *segue de* (2.163), *completando a demonstação.*

$\square$

Demonstração 3.0.21 *da Proposição 2.7.2 :*

Se a forma polar do número complexo $z \neq O$ *é dada por*

$$z = r\,[\cos(\theta) + i \cdot \mathrm{sen}(\theta)]\,. \tag{3.94}$$

entao de, (2.153), *teremos*

$$z_* \overset{(2.142)}{=} z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right)\right], \tag{3.95}$$

para $k \in \{0\,, 1\,, \cdots, n-1\}$,

Notemos que:

$$\begin{aligned}
(z_*)^m &= \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m \\
&\overset{(3.95)\ e\ (2.125)}{=} \left(\sqrt[n]{r}\right)^m \left[\underbrace{\cos\left(\frac{m\,\theta}{n} + \frac{2\,m\,k\,\pi}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n} + \frac{2\,k\,m\,\pi}{n}\right)}_{\overset{(2.117)}{=}\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{2\,k\,m\,\pi}{n}\right) + i\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\,k\,m\,\pi}{n}\right)\right]}\right] \\
&= \left(\sqrt[n]{r}\right)^m \left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \left[\underbrace{\cos\left(\frac{2\,k\,m\,\pi}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\,k\,m\,\pi}{n}\right)}_{\overset{(2.129)}{=}\left[\cos\left(\frac{2\,\pi}{n}\right) + i\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)\right]^{k\,m}}\right] \\
&\overset{k\,m = l \in \mathbb{Z}}{=} \left(\sqrt[n]{r}\right)^m \left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{2\,\pi}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)\right]^l \\
&\overset{(2.157)}{=} \left(\sqrt[n]{r}\right)^m \left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \omega^l \qquad (3.96) \\
&\overset{\text{em } \mathbb{R} \text{ temos: } \left(\sqrt[n]{r}\right)^m = \sqrt[n]{r^m}}{=} \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\,\theta}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{m\,\theta}{n}\right)\right] \cdot \omega^l \\
&\overset{(2.163)}{=} (z^m)^{\frac{1}{n}}\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.165), *completando a demonstração.*

$\square$

Capítulo 4

Resoluções dos exemplos

Resolução 4.0.1 *do Exemplo 2.1.1 :*

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{(-1+3\cdot i)\cdot(2+3\cdot i)}{1-i}+8\cdot i &\overset{(2.3)}{=} \frac{(-1\cdot 2-3\cdot 3\,,-1\cdot 3+3\cdot 3)}{1-i}+8\cdot i\\
&= \frac{-11+3\cdot i}{1-i}+8\cdot i\\
&= \frac{-11+3\cdot i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}+8\cdot i\\
&= \frac{(-11-3)+(3-11)\cdot i}{1^1+1^2}+8\cdot i\\
&= (-7-4\cdot i)+8\cdot i\\
&= -7+4\cdot i\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Resolução 4.0.2 *do Exemplo 2.4.1 :*

Pela Definição 2.4.1, temos que:

$$\overline{z_1} \overset{(2.60)\ e\ (2.59)}{=} (2\,,-3)$$

e

$$\overline{z_2} \overset{(2.60)\ e\ (2.59)}{=} 3+\pi\cdot i\,.$$

$\square$

Resolução 4.0.3 *do Exemplo 2.5.1 :*

Pela Definição 2.5.1, temos que:

$$\begin{aligned}
|z| &\overset{(2.74)\ e\ (2.75)}{=} \sqrt{3^2+(-\pi)^2}\\
&= \sqrt{9+\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Resolução 4.0.4 *do Exemplo 2.6.1 :*

Notemos que, de (2.113)*, teremos:*

$$x \doteq 2 \quad e \quad y \doteq -2 \neq 0\,. \tag{4.1}$$

Logo de (2.102)*,* (2.104)*,* (2.105) *e* (4.1)*, segue que*

$$\begin{aligned} r &\overset{(2.104)}{=} \sqrt{x^2+y^2} \\ &\overset{(4.1)}{=} \sqrt{2^2+(-2)^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

e

$$\begin{aligned} \theta &\overset{(2.105)}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-2}\right) \\ &= \operatorname{arctg}(-1) \\ &\overset{z \text{ está no } 4.\underline{o} \text{ quadrante}}{=} \frac{-\pi}{4} + 2k\pi\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Logo, uma forma polar do número complexo z (tomando-se $k = 0$ *em* (4.3)*), dado por* (2.113)*, será dada por:*

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right] \\ &\overset{\cos(-\theta)=\cos(\theta) \;e\; \operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}(\theta)}{=} 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \end{aligned}$$

□

Resolução 4.0.5 *do Exemplo 2.6.2 :*

Geometricamente o subconjunto de $\mathbb{C}$*, formado por todas as soluções da equação* (2.141)*, é uma circunferência de centro no ponto*

$$z_o \doteq -i = (0\,,-1)$$

e raio

$$\rho \doteq 4\,.$$

De fato, podemos reescrever (2.141)*, da seguinte forma:*

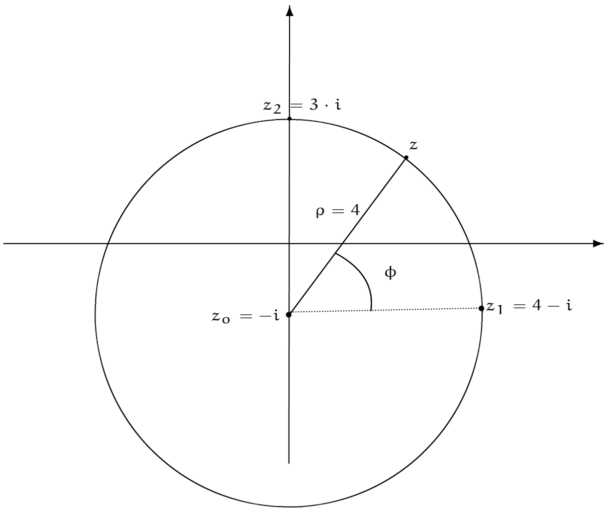
$$z - (-i) = \underbrace{4}_{\doteq r}\left[\cos(\phi) + i\cdot \operatorname{sen}(\phi)\right]. \tag{4.4}$$

Desta forma temos que:

$$\begin{aligned} |z+i| &= |z-(-i)| \\ &\overset{(4.4)}{=} r \\ &= 4\,, \end{aligned}$$

ou seja, as soluções a equação (2.141) *serão* $z \in \mathbb{C}$ *cuja distância à* $-i$ *é igual a* 4*, isto é, uma circunferência de centro no ponto* $-i$ *e raio* 4.

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Notemos também que, quando:

$$
\begin{aligned}
\phi_1 \doteq 0\,, \qquad \textit{teremos:} \quad & z_1 + i = 4\,[\cos(0) + i \cdot \operatorname{sen}(0)] \\
& = 4\,, \\
\textit{ou seja,} \qquad & z_1 = 4 - i\,, \\
\phi_2 \doteq \frac{\pi}{2}\,, \qquad \textit{teremos:} \quad & z_2 + i = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
& = 4 \cdot i\,, \\
\textit{ou seja,} \qquad & z_2 = 3 \cdot i\,.
\end{aligned}
$$

Notemos também que, quando ϕ *varia de* 0 *e* 2π*, a circunferência acima é percorrida no sentido anti-horário.*

□

Resolução 4.0.6 *do Exemplo 2.7.1 :*

Notemos que a forma polar do número complexo $z \doteq 1 \neq O$ *é dada por*

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot [\cos(0) + i \cdot \operatorname{sen}(0)] \\
&= [\cos(0) + i \cdot \operatorname{sen}(0)]\,,
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

ou seja,

$$
r \doteq 1 \quad e \quad \theta \doteq 0\,. \tag{4.6}
$$

Logo, teremos

$$
\sqrt[n]{r} = 1 \tag{4.7}
$$

e assim, de (2.153) *e* (4.6)*, segue que*

$$\begin{aligned}1^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{r}\,\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\,k\,\pi}{n}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\,k\,\pi}{n}\right)\\ &\overset{(4.6)\ e\ (4.7)}{=} \cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{n}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\,k\,\pi}{n}\right),\end{aligned}$$

para $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$.

□

Resolução 4.0.7 *do Exemplo 2.7.2 :*

Analiticamente, teremos, por (2.153) *e* (4.6) *(com* $n=6$*):*

$$\begin{aligned}1^{\frac{1}{6}} &= \sqrt[6]{r}\,\cos\left(\frac{\theta}{6}+\frac{2\,k\,\pi}{3}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{6}+\frac{2\,k\,\pi}{3}\right)\\ &\overset{(4.6)\ e\ (4.7)}{=} \cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{6}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\,k\,\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{3}\right),\end{aligned}$$

para $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$*, serão todas as soluções complexas da equação* (2.160)*, ou ainda, as* 3 *raízes cúbicas distintas, da unidade* 1*, ou ainda, de* (2.159)*, serão:*

$$1\,,\omega\,,\omega^2\,,\omega^3\,,\omega^4\,,\omega^5\,.$$

onde ω *é dado por*

$$\omega \doteq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

□

F I M

Referências Bibliográficas

[C] CHURCHILL, R. V. - *Variáveis Complexas e Aplicações*, Editora McGrawHill, 1975, São Paulo. 1

[H] HÖNIG, C. S. - *Introdução às Funções de Uma Variável Complexa*, Editora Guanabara Dois, 1981, Rio de Janeiro.

[L] LEVINSON, N.; REDHEFFER, R. M. - *Complex Variables*, HoldenDay, Inc., 1970, San Francisco.

Índice Remissivo