Limites de sequências numéricas em $\mathbb{R}$

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

junho de 2019

Sumário

Capítulo 1

Fatos básicos

Neste capítulo enunciaremos alguns resultado básicos importantes relacionados com propriedades dos números reais, que serão utilizados ao longo destas notas.

As demonstrações serão omitidas e referências serão dadas para o leitor encontrá-las.

Para o que segue vamos supor que os números reais, ou seja $\mathbb{R}$, seja conhecido, bem como suas operações de adição, multiplicação e a relação de ordem usuais.

Proposição 1.0.1 *Sejam e* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Então

1. *(propriedade transitiva) se*
$$x < y \quad e \quad y < z, \quad \text{deveremos ter:} \quad x < z; \tag{1.1}$$

2. *(propriedade da tricotomia)*
$$\text{ou} \quad x < y, \quad \text{ou} \quad y < x, \quad \text{ou} \quad x = y; \tag{1.2}$$

3. *(propriedade da monotonicidade da adição) se*
$$x < y, \quad \text{teremos:} \quad x + z < y + z; \tag{1.3}$$

4. *(propriedade da monotonicidade da adição) se*
$$x < y, \quad e \quad z < w \quad \text{teremos:} \quad x + z < y + w; \tag{1.4}$$

5. *(propriedade da monotonicidade da multiplicação) se*
$$0 < z \quad e \quad x < y, \quad \text{teremos:} \quad x z < y z; \tag{1.5}$$

6. *(propriedade da monotonicidade da multiplicação) se*
$$0 < z < w \quad e \quad x < y, \quad \text{teremos:} \quad x z < y w; \tag{1.6}$$

7. *(propriedade da monotonicidade da multiplicação) se*

$$z < 0 \quad e \quad x < y\,, \qquad \textit{teremos:} \qquad x\,z > y\,z\,; \tag{1.7}$$

8. *(propriedade da monotonicidade da multiplicação) se*

$$w < z < 0 \quad e \quad x < y\,, \qquad \textit{teremos:} \qquad x\,w > y\,z\,; \tag{1.8}$$

9. *Se*

$$O < x\,, \qquad \textit{teremos:} \qquad 0 < \frac{1}{x}\,; \tag{1.9}$$

10. *(propriedade da monotonicidade da inversão na multiplicação) se*

$$O < x < y\,, \qquad \textit{teremos:} \qquad 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}\,. \tag{1.10}$$

Temos também a: Com isto temos a:

Proposição 1.0.2 *Se* $x\,, y\,, z \in \mathbb{R}$ *e* $0 < a$, *temos:*

$$|x| = \sqrt{x^2}\,; \tag{1.11}$$

$$\textit{se} \quad 0 \leq x \leq y\,, \quad \textit{então} \quad |x| \leq |y|\,, \tag{1.12}$$

$$0 \leq |x|\,, \tag{1.13}$$

$$e \quad x \leq |x|\,, \tag{1.14}$$

$$|x| \leq a \quad \textit{se, e somente se,} \quad -a \leq x \leq a\,, \tag{1.15}$$

$$\textit{(desigualdade triangular)} \quad |x + y| \leq |x| + |y|\,;, \tag{1.16}$$

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|\,, \tag{1.17}$$

$$|x\,y| = |x|\,|y|\,; \tag{1.18}$$

$$|-x| = |x|\,, \tag{1.19}$$

$$|x| = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad x = 0\,. \tag{1.20}$$

Temos também a:

Proposição 1.0.3 *Se* $a\,, b \in [0\,, \infty)$ *então*

$$\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}\,. \tag{1.21}$$

Como consequência de (1.11) e (1.12), temos o:

Corolário 1.0.1 *A função* $\sqrt{\ }\ : [0\,, \infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função crescente, ou seja,*

$$\begin{aligned} &\textit{se} \quad 0 \leq x \leq y\,, \\ &\textit{teremos:} \quad \sqrt{x} \leq \sqrt{y}\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Na verdade ela é estritamente crescente, ou seja,

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & 0 \leq x < y\,, \\ \textit{teremos:} \quad & \sqrt{x} < \sqrt{y}\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Proposição 1.0.4 *(propriedade archimediana de* $\mathbb{R}$*) Sejam* $a\,, b \in K$ *com*

$$0 < a\,.$$

Então, podemos encontrar $n_o = n(a\,, b) \in \mathbb{N}$ *de modo que*

$$b < n_o \cdot a\,. \tag{1.24}$$

Um resultado importante é dado pela

Proposição 1.0.5 *Seja* $a \in [0\,, \infty)$.
Se

$$\begin{aligned} & a < \varepsilon\,, \quad \textit{para todo} \quad \varepsilon > 0\,, \\ \textit{então deveremos ter:} \quad & a = 0\,. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Capítulo 2

Sequências numéricas reais

2.1 Definição

Começaremos tratando de:

Definição 2.1.1 *Uma* <u>**sequência**</u> *de números reais (ou, simplesmente, sequência numérica) é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a(n) \end{array} \tag{2.1}$$

isto é, uma lei que associa a cada número natural $\underline{n}$ *um, único, número real* $\underline{a(n)}$*, que indicaremos por* $\underline{a_n}$*.*

Denotaremos a sequência numérica (2.1) acima por:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \quad (a_n)\,, \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,, \quad \{a_n\}\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ *fixado, o elemento* $\underline{a_n}$ *será dito* <u>**termo**</u> *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

O conjunto

$$\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$$

será dito <u>**conjunto dos valores**</u> *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *.*

Exemplo 2.1.1 *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.2}$$

Logo o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\left\{1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \cdots\right\}.$$

Exemplo 2.1.2 *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.3}$$

Notemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\{0\}\,.$$

Exemplo 2.1.3 *Considere a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$\begin{aligned} a_n &\doteq \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0\,, & \textit{quando a} \quad n \textit{ for par} \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}}\,, & \textit{quando} \quad n \textit{ for ímpar} \end{cases}\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Observemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\{1\,,0\,,-1\}\,.$$

Exemplo 2.1.4 *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.5}$$

Notemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\{1\,,2\,,3\,,4\,,\cdots\}\,.$$

Exemplo 2.1.5 *Considere a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq (-1)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.6}$$

Notemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\{1\,,-1\}\,.$$

Exemplo 2.1.6 *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{n+1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.7}$$

Observemos que o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\left\{2\,,\frac{3}{2}\,,\frac{4}{3}\,,\frac{5}{4}\,,\cdots\right\}\,.$$

Exemplo 2.1.7 *Considere a sequência numérica (real)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1+(-1)^n}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.8}$$

Logo, o conjunto dos valores da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será:*

$$\left\{0\,,1\,,0\,,\frac{1}{2}\,,0\,,\frac{1}{3}\,,0\,,\cdots\right\}\,.$$

2.2 Operações com sequências numéricas

Como sequências numéricas são funções a valores reais , cujo domínio é $\mathbb{N}$, podemos somá-las, multiplicá-las por números reais (ou complexos) de maneira semelhante a quando tratamos de quaisquer funções a valores reais , isto é,

Definição 2.2.1 *Dadas as sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definimos a sequência numérica* <u>**soma**</u> *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, denotada por*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

como sendo a seguinte sequência numérica:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.9}$$

ou seja, a sequência numérica soma, a saber, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, é obtida somando-se os correspondentes termos de cada uma das sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observação 2.2.1 *Notemos que a soma das sequências numéricas* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *com a sequêmcia* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é a soma das funções* a *e* b*, ou seja, será a função* $a + b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$(a + b)(n) \doteq a(n) + b(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.10}$$

Definição 2.2.2 *Definimos a sequência numérica* <u>**produto**</u> *do número real* <u>α</u>*, pela sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, indicada por*

$$\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

como sendo a seguinte sequência numérica:

$$\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (\alpha\, a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.11}$$

ou seja, a sequência numérica produto, isto é, $\alpha\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, é obtida multiplicando-se os correspondentes termos de cada sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pelo número real (respectivamente, complexo)* <u>α</u>.

Observação 2.2.2 *Notemos que a multiplicação do número real* α *pela sequência numérica* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é a multiplicação do número real* α *pela função* a*, ou seja, será a função* $\alpha \cdot a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$(\alpha \cdot a)(n) \doteq \alpha\, a(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.12}$$

Definição 2.2.3 *Definimos a sequência* **produto** *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pela sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, indicada por*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.13}$$

como sendo a seguinte sequência numérica:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.14}$$

ou seja, a sequência numérica produto, isto é, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\cdot(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, é obtida multiplicando-se os correspondentes termos de cada uma das sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Observação 2.2.3 *Notemos que o produto das sequências numéricas* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *com a sequência numérica* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é o produto das funções* a *e* b*, ou seja, será a função* $a \cdot b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$(a \cdot b)(n) \doteq a(n)\, b(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.15}$$

Definição 2.2.4 *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *,* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências numéricas reais, de modo que*

$$b_n \neq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Definimos a sequência numérica **quociente** *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pela sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, indicada por*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{ou} \quad \frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}\,,$$

como sendo a seguinte sequência numérica:

$$\begin{aligned} &(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \\ \textit{ou} \quad &\frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} \doteq \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

ou seja, a sequência numérica quociente, isto é, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, é obtida dividindo-se os correspondentes termos de cada uma das sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(observe que* $b_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*).*

Observação 2.2.4

1. *Se* $a_n \neq 0$ *para* $n \in \mathbb{N}$*, definimos a sequência numérica* $\dfrac{1}{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}$*, como*

$$\frac{1}{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} \doteq \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.17}$$

2. *Notemos que o quociente da sequência numérica* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *pela sequência* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é o quociente das funções* a *e* b*, ou seja, será a função* $\frac{a}{b} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$\frac{a}{b}(n) \doteq \frac{a(n)}{b(n)}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Para ilustrar temos o

Exercício 2.2.1 *Se as sequências numéricas (reais)* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sãos dadas por:*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}, \tag{2.19}$$

$$b_n \doteq (-1)^n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.20}$$

$$\textit{e} \quad \alpha \doteq 2, \tag{2.21}$$

encontrar as sequências numéricas:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \alpha\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{e} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Resolução:

Logo, de (2.9), segue que

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &\overset{(2.9)}{=} (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\overset{(2.19)}{=} \left(\frac{1}{n} + (-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\frac{1 + (-1)^n\, n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

De (2.11), temos que:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\overset{(2.11)}{=} (\alpha\, a_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\overset{(2.19) \text{ e } (2.21)}{=} \left(2\,\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

De (2.14), segue que

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &\overset{(2.14)}{=} (a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\overset{(2.19) \text{ e } (2.20)}{=} \left(\frac{1}{n}\,(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Finalmente, de (2.16), temos que:

$$\frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} \overset{(2.16)}{=} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.19)\text{ e }(2.20)}{=} \left(\frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(-1)^n\, n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

□

Observação 2.2.5 *Como sequências numéricas são funções a valores reais, cujo domínio é $\mathbb{N}$, podemos representar seus gráficos em $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$.*

Denotaremos o gráfico da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $G\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, e será definido por:

$$G\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \doteq \{(n\,,a_n)\,;\, n\in\mathbb{N}\}.$$

Na verdade, isto não terá muito interesse no estudo das sequências numéricas.

2.3 Convergência de sequências numéricas

Iniciaremos com a

Definição 2.3.1 *Diremos que uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é* **convergente** *(ou converge, ou tende) para $l\in\mathbb{R}$, quando $\underline{n}$ vai para infinito, denotando-se por:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l\,, \quad \textit{ou} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l\,, \quad \textit{ou ainda,} \quad a_n \to l\,,$$

se, e somente se: dado $\varepsilon>0$, podemos encontrar $n_o(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, de modo que,

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & n\geq n_o\,,\\ \textit{deveremos ter} \quad & |a_n - l| < \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Observação 2.3.1

1. *A Definição 2.3.1 acima "nos diz", formalmente, que podemos ficar tão próximo de $\underline{l}$, quanto se queira (isto é, dado $\varepsilon>0$), desde que o índice da sequência numérica (ou seja, $\underline{n}$), seja suficientemente grande (isto é, tenhamos $n\geq n_o$).*

2. *Na linguagem dos intervalos, a Definição 2.3.1 acima, "nos diz" que dado o intervalo*

$$(l-\varepsilon\,, l+\varepsilon)$$

(ou seja, dado $\varepsilon > 0$), todos os termos da sequência numérica caem dentro desse intervalo excetuando-se, eventualmente, os $\underline{n_o}$ primeiros termos da sequência numérica (ou seja, um número finito de termos da mesma).

3. *A Definição (2.3.1) acima, é semelhante à definição de limites no infinito, para funções a valores reais, de uma variável real, estudadas no Cálculo I.*

O resultado a seguir, garante a unicidade do limite de uma sequência numérica, caso ele existe, mais precisamente:

Proposição 2.3.1 *(unicidade do limite de uma sequência convergente) Se o limite da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existir ele deverá ser único, isto é, se*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} a_n = l_2\,,$$

então

$$l_1 = l_2\,.$$

Demonstração:

Mostremos que, para cada $\varepsilon > 0$, teremos

$$|l_1 - l_2| < \varepsilon\,,$$

o que implicará, pela Proposição 1.0.5, que

$$\begin{aligned} & |l_1 - l_2| = 0\,, \\ \text{que, de (1.20), é equivalente a:}\quad & l_1 - l_2 = 0\,, \\ \text{ou ainda,}\quad & l_1 = l_2\,. \end{aligned}$$

Para isto temos que, para cada $\varepsilon > 0$, como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1\,,$$

pela Definição 2.3.1, podemos encontar $n_1 \in \mathbb{N}$, de modo

$$\text{se} \quad n \geq n_1\,, \quad \text{deveremos ter:} \quad |a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.23}$$

De modo análogo, como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_2\,,$$

pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq n_2\,, \quad \text{deveremos ter:} \quad |a_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.24}$$

Logo, se

$$n \geq n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,, \tag{2.25}$$

segue que

$$\begin{aligned}
|l_1 - l_2| &= |(l_1 - a_n) + (a_n - l_2)| \\
&\overset{(1.16)}{\leq} \underbrace{|l_1 - a_n|}_{=|a_n - l_1|} + |a_n - l_2| \\
&\leq \underbrace{|a_n - l_1|}_{n \geq n_o \overset{(2.290)}{\geq} \geq n_1, \text{ logo vale } (2.23) \underset{<}{} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_n - l_2|}_{n \geq n_o \overset{(2.290)}{\geq} \geq n_2, \text{ logo vale } (2.24) \underset{<}{} \frac{\varepsilon}{2}} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Um primeiro exemplo é dado por:

Exemplo 2.3.1 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado e consideremos a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por*

$$a_n \doteq \alpha, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.26}$$

é convergente para α, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha. \tag{2.27}$$

Resolução:

De fato, observemos que dado $\varepsilon > 0$, se considerarmos $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$n_o \in \mathbb{N} \quad \text{qualquer}. \tag{2.28}$$

Então, para

$$n \geq n_o, \tag{2.29}$$

teremos

$$\begin{aligned}
|a_n - l| &\overset{a_n \overset{(2.26)}{=} \alpha \text{ e } l \doteq \alpha}{=} |\alpha - \alpha| \\
&= 0 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, pela Definição 2.3.1, segue a validade afirmação.

$\square$

Um exemplo importante é dado pelo:

Exemplo 2.3.2 *A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.30}$$

é convergente para zero, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{2.31}$$

Resolução:

De fato, observemos que dado $\varepsilon > 0$, da propriedade archimediana de $\mathbb{R}$ (isto é, da Proposição 1.0.4, com $b \doteq 1$ e $a \doteq \varepsilon$), podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$1 < n_o\,\varepsilon\,,$$

$$\text{ou, equivalentemente:} \quad n_o > \frac{1}{\varepsilon}\,, \tag{2.32}$$

$$\text{ou ainda:} \quad \frac{1}{n_o} < \varepsilon\,. \tag{2.33}$$

Então, para

$$n \geq n_o \geq 1\,,$$

$$\text{que, de (1.10), implicará em:} \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o}\,, \tag{2.34}$$

teremos

$$\begin{aligned}
|a_n - l| &\overset{a_n \overset{(2.30)}{=} \frac{1}{n} \text{ e } l \doteq 0}{=} \left|\frac{1}{n} - 0\right| \\
&\overset{n>0}{=} \frac{1}{n} \\
&\overset{(2.34)}{\leq} \frac{1}{n_o} \\
&\overset{(2.33)}{<} \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Logo, pela Definição 2.3.1, segue a validade afirmação.

□

Temos temabém o:

Exemplo 2.3.3 *A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por*

$$a_n \doteq \frac{2\,n}{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.35}$$

é convergente para $\underline{2}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n}{n+1} = 2\,. \tag{2.36}$$

Resolução:

De fato, observemos que dado $\varepsilon > 0$, da propriedade archimediana de $\mathbb{R}$ (isto é, da Proposição 1.0.4, com $b \doteq 2$ e $a \doteq \varepsilon$), podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$2 < n_o\,\varepsilon\,,$$

$$\text{ou, equivalentemente:} \quad n_o > \frac{2}{\varepsilon}\,, \tag{2.37}$$

$$\text{ou ainda:} \quad \frac{2}{n_o} < \varepsilon\,. \tag{2.38}$$

Então, se

$$\begin{aligned} & n \geq n_o\,, \\ \text{teremos,} \quad & n+1 \geq n \geq n_o \geq 1\,, \\ \text{que, de (1.10), implicará em:} \quad & \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_o}\,, \\ \text{e, como } 0<2, \text{ de (1.5), teremos:} \quad & \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n_o}\,. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} |a_n - l| & \overset{a_n \overset{(2.35)}{=} \frac{2n}{n+1} \text{ e } l=2}{=} \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| \\ & = \left| \frac{2n - 2n - 2}{n+1} \right| \\ & = \left| \frac{-2}{n+1} \right| \\ & = \frac{2}{n+1} \\ & \overset{n+1 \geq n \overset{(2.39)}{\geq} n_o \geq 1}{\leq} \frac{2}{n_o} \\ & \overset{(2.37)}{<} \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Logo, pela Definição 2.3.1, segue a validade afirmação.

□

Um outro caso é dado pelo:

Exemplo 2.3.4 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, dada por*

$$a_n \doteq \cos(n\,\pi)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.40}$$

não é convergente.

Resolução:

De fato, observemos que

$$\begin{aligned} a_n &= \cos(n\,\pi) \\ &= (-1)^n\,, \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Se a sequência fosse convergente para algum $l \in \mathbb{R}$, então dado

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0\,,$$

deveria existir um $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que, para

$$n \geq n_o\,, \quad \text{deveríamos ter} \quad |(-1)^n - l| < \frac{1}{2}\,,$$

isto é,

$$l - \frac{1}{2} < (-1)^n < l + \frac{1}{2}\,,$$

o que um absurdo, pois isto implicaria que os termos da sequência numérica,

$$-1 \overset{(2.41)}{=} a_{2n+1} \quad \text{e} \quad 1 \overset{(2.41)}{=} a_{2n}\,,$$

deveriam pertencer ao intervalo

$$\left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right)\,,$$

cujo comprimento é igual a $\underline{1}$ (notemos que se os números $\underline{-1}$ e $\underline{1}$ pertencem a um mesmo intervalo, este intervalo deverá ter um comprimento maior ou igual a 2), o que é um absurdo.

Portanto a sequência numérica não é convergente.

□

A seguir temos o:

Exercício 2.3.1 *Consideremos a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde seus termos são dados por*

$$a_1 \doteq 0.3\,, \quad a_2 \doteq 0.33\,, \quad a_3 \doteq 0.333\,, \quad a_4 \doteq 0.3333\,, \cdots, a_n \doteq 0.\underbrace{33\cdots3}_{n-casas}\,, \cdots. \tag{2.42}$$

Mostre que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\frac{1}{3}$*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\doteq l}\,. \tag{2.43}$$

Resolução:

De fato, dado $\varepsilon > 0$, que podemos considerar pequeno o suficiente de modo que

$$\begin{aligned} & 3\,\varepsilon \in (0\,,1)\,, \\ \text{ou seja,}\quad & \log(3\,\varepsilon) < 0\,, \\ \text{ou ainda,}\quad & \underbrace{-\log(3\,\varepsilon)}_{(-1)\,\log(3\,\varepsilon)=\log[(3\,\varepsilon)^{-1}]} > 0\,, \\ \text{isto é,}\quad & \log\frac{1}{3\,\varepsilon} > 0\,. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Logo da propriedade archimediana de $\mathbb{R}$ (isto é, da Proposição 1.0.4, com $b \doteq \log \frac{1}{3\,\varepsilon}$ e $a \doteq 1$), podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$
\begin{aligned}
& n_o > \log \frac{1}{3\,\varepsilon}\,, \\
\text{que, do fato que a função potenciação é crescente, teremos:}\quad & 10^{n_o} > \frac{1}{3\,\varepsilon}\,, \\
\text{ou ainda,}\quad & \frac{1}{3\,10^{n_o}} < \varepsilon\,. \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

Logo, para

$$
\begin{aligned}
& n \geq n_o\,, \\
\text{que, do fato que a função potenciação é crescente, teremos:}\quad & 10^n \geq 10^{n_o} > 0\,, \\
\text{que, de (1.10), implicará em:}\quad & \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^{n_o}}\,. \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

Desta forma,

$$
\begin{aligned}
|a_n - l| &\overset{(2.42)\text{ e }(2.43)}{=} \left|0.\underbrace{3\cdots3}_{n-\text{casas}} - \frac{1}{3}\right| \\
&= \left|\frac{0.\overbrace{9\cdots9}^{n-\text{casas}} - 1}{3}\right| \\
&= \left|-\frac{0.\ \overbrace{0\cdots0}^{(n-1)-\text{casas}}\ 1}{3}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{3\cdot 10^n}\right| \\
&= \frac{1}{3\cdot 10^n} \\
&\overset{(2.46)}{<} \frac{1}{3\cdot 10^{n_o}} \\
&\overset{(2.45)}{<} \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

Logo, pela Definição 2.3.1, segue a validade afirmação.

$\square$

Definição 2.3.2 *Diremos que uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* **limitada**, *se podemos encontrar* $M > 0$, *de modo que*

$$
|a_n| \leq M\,, \qquad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \qquad (2.47)
$$

Observação 2.3.2 *Nos Exemplos 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 e Exercício 2.3.1 acima, todas sequências numéricas são limitadas.*

Observemos que nem todas elas são sequência numéricas convergentes (veja o Exemplo 2.3.4).

Como veremos a seguir existe uma relação entre sequências numéricas convergentes e sequências numéricas limitadas, a saber:

Proposição 2.3.2 *Toda sequência numérica convergente é limitada, isto é, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, então ela será uma sequência numérica limitada.*

Demonstração:

Como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, segue que existe $l \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l\,,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - l| < \varepsilon\,.$$

Em particular, se tomarmos

$$\varepsilon \doteq 1\,,$$

poderemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned}
&\text{para} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - l| < 1\,,\\
\text{ou seja,}\quad &\text{para} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{teremos:} \quad -1 < a_n - l < 1\\
\text{ou, equivalentemente,}\quad &\text{para} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{teremos:} \quad l - 1 < a_n < 1 + l\,,\\
\text{ou ainda,}\quad &\text{para} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{teremos:} \quad -|l| - 1 < a_n < |l| + 1\,,\\
\text{isto é,}\quad &\text{para} \quad n \geq n_o\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n| < |l| + 1\,. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Definamos

$$M \doteq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_o-1}|, |l| + 1\}\,. \qquad (2.49)$$

Como isto temos que

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 2.3.3 *A recíproca do resultado acima é falsa, isto é, nem toda sequência numérica limitada é convergente, como mostra o Exemplo 2.3.4.*

2.4 Operações com sequências numéricas convergentes

A seguir temos algumas propriedades gerais para convergência de sequências numéricas.

Começaremos pela soma de duas sequências convergentes, a saber:

Proposição 2.4.1 *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências numéricas.*

Se as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, então a sequência numérica

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será convergente para $\underline{a+b}$, isto é, se existem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,,$$

então existirá o $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.

Além disso, terremos

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b\,,$$

$$\text{isto é,} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,. \tag{2.50}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq n_1 \quad \text{teremos:} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.51}$$

e

$$\text{se} \quad n \geq n_2\,, \quad \text{teremos:} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.52}$$

Logo, tomando-se

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,, \tag{2.53}$$

temos para

$$n \geq n_o\,, \tag{2.54}$$

segue que

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\overset{(1.16)}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\
&\underset{n \overset{(2.54)}{\geq} n_o \overset{(2.53)}{\geq} n_1 \text{ e } n \overset{(2.54)}{\geq} n_o \overset{(2.53)}{\geq} n_2\text{, logo valem } (2.48) \text{ e } (2.52)]}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b\,,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$

mostrando a validade da identidade (2.50).

□

Para a diferença de duas sequências convergentes, temos a:

Proposição 2.4.2 *Se as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, então a sequência numérica*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será convergente para $\underline{a - b}$, isto é, se existem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,,$$

então existirá o $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$.

Além disso, teremos:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b\,,$$

$$\textit{isto é,} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n\,. \tag{2.55}$$

Demonstração:

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq n_1\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.56}$$

$$\text{e}$$

$$\text{se} \quad n \geq n_2\,, \quad \text{teremos:} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.57}$$

Logo, tomando-se

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,, \tag{2.58}$$

temos para

$$n \geq n_o\,, \tag{2.59}$$

segue que

$$
\begin{aligned}
|(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) - (b_n - b)| \\
&= |(a_n - a) + (b - b_n)| \\
&\overset{(1.16)}{\leq} |a_n - a| + |b - b_n| \\
&\overset{(1.19)}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\
&\underset{n \overset{(2.59)}{\geq} n_o \overset{(2.58)}{\geq} n_1 \text{ e } n \overset{(2.59)}{\geq} n_o \overset{(2.58)}{\geq} n_2 \text{, logo valem } (2.56) \text{ e } (2.57)]}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = a - b\,,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n\,,$$

mostrando a validade da identidade (2.55).

□

Para o produto de duas sequências convergentes, temos a:

Proposição 2.4.3 *Se as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, então a sequência numérica*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será convergente para $\underline{a\,b}$, isto é, se existem

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b\,,$$

então existirá o $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n\, b_n)$.

Além disso, teremos:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n \to \infty} (a_n\, b_n) = a\, b\,, \\
\textit{isto é,} \quad &\lim_{n \to \infty} (a_n\ b_n) = \left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) \left(\lim_{n \to \infty} b_n\right).
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

Demonstração:

Começaremos supondo que

$$a \neq 0\,. \tag{2.61}$$

Como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, pela Proposição 2.3.2, elas serão sequências numéricas limitadas, em particular, a sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica limitada.

Logo, pela Definição 2.3.2, podemos encontrar $M > 0$, tal que

$$|b_n| \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.62}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_1\,,\, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$\text{se} \quad n \geq n_1\,, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\,M}\,, \tag{2.63}$$

$$\text{se} \quad n \geq n_2\,, \quad \text{teremos} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\,\underbrace{|a|}_{\stackrel{(2.61)}{>}0}}\,. \tag{2.64}$$

Seja

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.65}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad n \geq n_o\,, \\ &\text{segue, de (2.65), que} \quad n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,. \end{aligned} \tag{2.66}$$

logo

$$\begin{aligned}
|(a_n\, b_n) - (a\, b)| &= |(a_n - a)\, b_n + (b_n - b)\, a| \\
&\stackrel{(1.16)}{\leq} |(a_n - a)\, b_n| + |(b_n - b)\, a| \\
&\stackrel{(1.18)}{=} |a_n - a|\, |b_n| + |b_n - b|\, |a| \\
&\stackrel{(2.62)}{<} |a_n - a|\, M + |b_n - b|\, |a| \\
&\stackrel{(2.66)\text{, implica que valem: (2.63) e (2.64)}}{<} \frac{\varepsilon}{2\,M}\, M + \frac{\varepsilon}{2\,|a|}\, |a| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = a\, b\,,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\, \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)\,,$$

isto é, a validade de (2.60).

Se

$$b \neq 0\,,$$

podemos fazer uma demonstração semelhante a que fizemoz para o caso (2.61).

Esta será deixada como exercício para o leitor.

Suponhamos agora que

$$a = b = 0. \tag{2.67}$$

Enão, dado $\varepsilon > 0$, como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$\text{se} \quad n \geq n_1, \quad \text{teremos:} \quad |a_n| \overset{a\overset{(2.67)}{=}0}{=} |a_n - 0| < \sqrt{\varepsilon}, \tag{2.68}$$

$$\text{se} \quad n \geq n_2, \quad \text{teremos:} \quad |b_n| \overset{b\overset{(2.67)}{=}0}{=} |b_n - 0| < \sqrt{\varepsilon}. \tag{2.69}$$

Seja

$$n_o \doteq \max\{n_1, n_2\}. \tag{2.70}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad n \geq n_o, \\ \text{de (2.70), segue que} \quad &n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} |(a_n\, b_n) - a\, b| &\overset{a=b\overset{(2.67)}{=}0}{=} |a_n\, b_n| \\ &= |a_n|\,|b_n| \\ &\overset{\text{(2.71), implica na validade de: (2.68) e (2.69)}}{<} \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

isto é, a validade de (2.60).

□

Temos também a:

Proposição 2.4.4 *Se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, com*

$$a \neq 0. \tag{2.72}$$

Então podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\textit{para} \quad n \geq n_o, \quad \textit{teremos} \quad a_n \neq 0. \tag{2.73}$$

Demonstração:

Suponhamos primeiramente que

$$a > 0 . \tag{2.74}$$

Como

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a ,$$

dado

$$\varepsilon \doteq \frac{a}{2} , \tag{2.75}$$

pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad & n \geq n_o , \\
\text{teremos} \quad & |a_n - a| < \varepsilon \overset{(2.75)}{=} \frac{a}{2} , \\
\text{ou seja,} \quad & -\frac{a}{2} \overset{(*)}{<} a_n - a < \frac{a}{2} , \qquad (2.76) \\
\text{em particular,} \quad & 0 \overset{(2.74)}{<} \frac{a}{2} = a - \frac{a}{2} \overset{(*)\ \text{em}\ (2.76)}{<} a_n \\
\text{ou seja,} \quad & 0 < \frac{a}{2} < a_n , \qquad (2.77)
\end{aligned}$$

para $n \geq n_o$, mostrando, em particulcar, a validade de (2.124).

Suponhamos agora que

$$a < 0 . \tag{2.78}$$

Como

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a ,$$

dado

$$\varepsilon \doteq \frac{|a|}{2} \overset{(2.78)}{=} \frac{-a}{2} , \tag{2.79}$$

pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad & n \geq n_o \\
\text{teremos} \quad & |a_n - a| < \varepsilon \overset{(2.79)}{=} \frac{|a|}{2} , \\
\text{ou seja,} \quad & -\frac{|a|}{2} < a_n - a \overset{(**)}{<} \frac{|a|}{2} , \qquad (2.80) \\
\text{em particular,} \quad & a_n \overset{(**)\ \text{em}\ (2.80)}{<} a + \frac{|a|}{2} \overset{|a| = -a \ \text{por}\ (2.78)}{=} a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} < 0 \\
\text{ou seja,} \quad & a_n < \frac{a}{2} < 0 , \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

para $n \geq n_o$, mostrando , em particulcar, a validade de (2.124) e completando a demonstração.

$\square$

Observação 2.4.1

1. *Na verdade, na demonstração da Proposição 2.4.4, mostramos que:*

$$\begin{aligned} &\textit{se} \quad a > 0\,,\\ &\textit{podemos encontrar} \quad n_o \in \mathbb{N}\,,\\ &\textit{de modo que,} \quad a_n > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq n_o \end{aligned} \tag{2.82}$$

ou

$$\begin{aligned} &\textit{se} \quad a < 0\,,\\ &\textit{podemos encontrar} \quad n_o \in \mathbb{N}\,,\\ &\textit{de modo que,} \quad a_n < 0\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq n_o\,. \end{aligned} \tag{2.83}$$

2. *Notemos que, ainda na demonstração da Proposição 2.4.4, mostramos, na verdade, que (veja (2.76) e (2.81)), para $n \geq n_o$, teremos*

$$\begin{aligned} &\textit{se} \quad a > 0\,,\\ &\textit{teremos} \quad a_n > \frac{a}{2} = \frac{|a}{2} > 0\,,\\ &\textit{ou ainda} \quad |a_n| > \frac{a}{2} = \frac{|a|}{2} > 0\,.\\ &\textit{Por outro lado, se} \quad a < 0\,,\\ &\textit{teremos} \quad a_n < \frac{a}{2} = \frac{-|a|}{2} > 0\,,\\ &\textit{ou ainda} \quad \underbrace{-a_n}_{=|a_n|,\ \textit{pois}\ a_n<0} > \frac{-a}{2} \overset{a<0}{=} \frac{|a|}{2} > 0\,,\\ &\textit{ou seja,} \quad |a_n| > \frac{a}{2} = \frac{|a|}{2} > 0\,. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Logo, em qualquer um dos casos acima teremos:

$$|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0\,. \tag{2.85}$$

Podemos agora estudar o quociente de sequências convergentes, com a:

Proposição 2.4.5 *Se as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, e*

$$b \neq 0\,. \tag{2.86}$$

Então a sequência numérica $\dfrac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ é convergente para $\dfrac{a}{b}$, isto é, se existem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0\,.$$

Além disso, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

$$\text{isto é,} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \tag{2.87}$$

Demonstração:

Aplicando-se a Proposição 2.4.4 a sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que converge para $b \neq 0$), podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ (veja o item 2. da Observação 2.4.1, ou ainda (2.85)), de modo que

$$|b_n| > \frac{|b|}{2} > 0, \quad \text{para cada} \quad n \geq n_1. \tag{2.88}$$

Vamos considerar primeiramente o caso

$$a \neq 0. \tag{2.89}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, tais que (notemos que, de (2.88), $b \neq 0$):

$$\text{se} \quad n \geq n_2, \quad \text{teremos:} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4\,|b|}, \tag{2.90}$$

$$\text{se} \quad n \geq n_3, \quad \text{teremos} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon\,|a|}{4\,|b|^2}. \tag{2.91}$$

Seja

$$n_o \doteq \max\{n_1, n_2, n_3\}. \tag{2.92}$$

Observemos que

$$\text{para} \quad n \geq n_o, \tag{2.93}$$

$$\text{segue, de (2.92), que} \quad n \geq n_1, \tag{2.94}$$

$$n \geq n_2 \tag{2.95}$$

$$\text{e} \quad n \geq n_3. \tag{2.96}$$

Logo (notemos que de (2.86) e (2.88), temos $b \neq 0$ e $b_n \neq 0$, para $n \geq n_o$)

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n\,b - a\,b_n}{b_n\,b}\right| \\
&= \frac{|(a_n - a)\,b + (a\,b - a\,b_n)|}{|b_n|\,|b|} \\
&\overset{(1.16)}{\leq} \frac{|(a_n - a)\,b| + |a\,(b - b_n)|}{|b_n|\,|b|} \\
&\overset{(1.18)}{\leq} \frac{|a_n - a|\,|b| + |a|\,|b - b_n|}{\underbrace{|b_n|}_{\overset{(2.93)\text{ e }(2.88)}{>}\frac{|b|}{2}>0}\,|b|} \\
&\overset{(1.10)}{\leq} [|a_n - a|\,|b| + |a|\,|b - b_n|]\,\frac{1}{\frac{|b|^2}{2}} \\
&= \underbrace{|a_n - a|}_{\overset{(2.96)\text{ e }(2.90)}{<}\frac{\varepsilon}{4\,|b|}}\,\frac{2}{|b|} + \frac{2\,|a|}{|b|^2}\,\underbrace{|b - b_n|}_{\overset{(2.96)\text{ e }(2.91)}{<}\frac{\varepsilon\,|a|}{4\,|b|^2}} \\
&< \frac{\varepsilon}{4\,|b|}\,\frac{2}{|b|} + \frac{2\,|a|}{|b|^2}\,\frac{\varepsilon\,|a|}{4\,|b|^2} \\
&\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\,,$$

isto é, a validade de (2.87).

Consideremos agora o caso

$$a = 0\,. \tag{2.97}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$
\begin{aligned}
&\text{se} \quad n \geq n_2\,, \\
&\text{teremos:} \quad \underbrace{|a_n - a|}_{a\overset{(2.97)}{=}0\,|a_n|} < \frac{\varepsilon\,|b|}{2}\,, \\
&\text{ou seja,} \quad |a_n| < \frac{\varepsilon\,|b|}{2}\,.
\end{aligned} \tag{2.98}
$$

Seja

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.99}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{segue, de (2.99), que} \quad & n \geq n_1 \qquad (2.100) \\ \text{e} \quad & n \geq n_2\,. \qquad (2.101) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| & \overset{a\overset{(2.97)}{=}0}{=} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \\ & = \frac{\overbrace{|a_n|}^{\overset{(2.101)\text{ e }(2.98)}{<}\frac{\varepsilon\,|b|}{2}}}{\underbrace{|b_n|}_{\overset{(2.100)\text{ e }(2.88)}{>}\frac{|b|}{2}}} \\ & \overset{(1.10)}{<} \frac{\varepsilon\,|b|}{2}\,\frac{2}{|b|} \\ & = \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{2.102}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\,,$$

isto é, a validade de (2.87), completando a demonstração.

$\square$

Outro resultado importante é dado pela:

Proposição 2.4.6 *Suponhamos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja converr-gente para $\underline{a}$ e $a > 0$, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0\,. \tag{2.103}$$

Então a sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por

$$b_n \doteq \sqrt{a_n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.104}$$

está bem definida e será convergente para $\sqrt{a}$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}\,,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}\,. \tag{2.105}$$

Demonstração:

Notemos que, do item 1. da Observação 2.4.1, como temos (2.103), podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$a_n > 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq n_1\,,$$

Logo, para $n \geq n_1$, faz sentido calcularmos

$$\sqrt{a_n}\,.$$

Por outro lado, de (2.103) e da Definição 2.3.1, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n \geq n_2\,,$$

$$\text{tenhamos:} \quad |a_n - a| < \sqrt{a}\,\varepsilon\,. \tag{2.106}$$

Então, para

$$n \geq n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,, \tag{2.107}$$

teremos

$$\begin{aligned}
|b_n - l| &\overset{b_n \overset{(2.104)}{=} \sqrt{a_n} \text{ e } l \doteq \sqrt{a}}{=} \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| \\
&\overset{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}>0}{=} \left|\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right)\right| \\
&\left|\frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right| \\
&= \left|\frac{\left(\sqrt{a_n}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right| \\
&= \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right| \\
&\overset{\sqrt{a_n}+\sqrt{a} \overset{\sqrt{a_n}>0}{>} \sqrt{a}}{<} \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \underbrace{|a_n - a|}_{\overset{(2.107) \text{ e } (2.106)}{<} \sqrt{a}\,\varepsilon} \\
&< \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a}\,\varepsilon\right) \\
&= \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, a validade de (2.105) e completando a resolução.

□

2.5 Propriedes gerais de sequências numéricas convergentes

Começaremos pela

Proposição 2.5.1 *Se as sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*, respectivamente, e*

$$a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.108}$$

$$\textit{então} \quad a \leq b\,,$$

$$\textit{isto é,} \quad \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,. \tag{2.109}$$

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que

$$a > b\,,$$

$$\text{isto é,} \quad \lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Logo,

$$a - b > 0\,,$$

dado

$$\varepsilon \doteq \frac{a-b}{2} > 0\,, \tag{2.110}$$

como as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_1\,, n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad n \geq n_1\,, \quad &\text{teremos} \quad |a_n - a| < \varepsilon\,,\\
\text{ou seja,} \quad & -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon\,,\\
\text{isto é,} \quad & -\varepsilon + a < a_n < \varepsilon + a\,,\\
\text{que, de (2.110), é o mesmo que:} \quad & \underbrace{-\frac{a-b}{2} + a}_{=\frac{a+b}{2}} < a_n < \frac{a-b}{2} + a\,,\\
\text{em particular, teremos:} \quad & \frac{a+b}{2} < a_n
\end{aligned} \tag{2.111}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad n \geq n_2\,, &\quad \text{teremos} \quad |b_n - b| < \varepsilon\,, \\ \text{ou seja,} &\quad -\varepsilon < b_n - b < \varepsilon\,, \\ \text{isto é,} &\quad -\varepsilon + b < b_n < \varepsilon + b\,, \\ \text{que, de (2.110), é o mesmo que:} &\quad -\frac{a-b}{2} + b < b_n < \underbrace{\frac{a-b}{2} + b}_{=\frac{a+b}{2}}\,, \\ \text{em particular, teremos:} &\quad b_n < \frac{a+b}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{se} &\quad n \geq \max\{n_1\,, n_2\}\,, \\ \text{teremos} &\quad n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \end{aligned} \tag{2.113}$$

assim

$$b_n \overset{(2.113),\ \text{implicará na validade de: } (2.112)}{<} \frac{a+b}{2} \overset{(2.113),\ \text{implicará na validade de: } (2.111)}{<} a_n,$$

isto é,

$$b_n < a_n\,, \quad \text{se} \quad n \geq \max\{n_1\,, n_2\},$$

contrariando (2.108), o que seria um absurdo.

Portanto vale (2.109), completando a demonstração.

□

Temos também a:

Proposição 2.5.2 *Se a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero e a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada, então a sequência numérica*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será convergente para zero, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = 0\,. \tag{2.114}$$

Resolução:

Como a sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica limitada, pela Definição 2.3.2, podemos encontrar $M > 0$, tal que

$$|b_n| \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.115}$$

Por outro lado, como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica convergente para zero, dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad n \geq n_o \\ &\text{teremos:} \quad \underbrace{|a_n - 0|}_{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{M}, \\ &\text{ou seja,} \quad |a_n| < \varepsilon . \end{aligned} \tag{2.116}$$

Logo, dado dado $\varepsilon > 0$, se $n \geq n_o$, teremos

$$\begin{aligned} |a_n\, b_n - 0| &= |a_n\, b_n| \\ &\overset{(1.18)}{=} |a_n|\,|b_n| \\ &\overset{(2.115) \text{ e } (2.116)}{\leq} \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon , \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = 0 ,$$

ou seja, a validade de (2.114), completando a demonstração.

□

Temos també a:

Proposição 2.5.3 *Suponhamos que as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para $\underline{l}$, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l \tag{2.117}$$

e a sequência numérica $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz:

$$a_n \leq c_n \leq b_n , \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} . \tag{2.118}$$

Então a sequência numérica $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{l}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l . \tag{2.119}$$

Demonstração:

Como as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para $\underline{l}$, dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_1 , n_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$\text{se} \quad n \geq n_1 , \quad \text{teremos:} \quad |a_n - l| < \varepsilon ,$$

$$\text{que implicará em:} \quad -\varepsilon \overset{(*)}{<} a_n - l < \varepsilon \tag{2.120}$$

$$\text{e se} \quad n \geq n_2 , \quad \text{teremos:} \quad |b_n - l| < \varepsilon ,$$

$$\text{que implicará em} \quad -\varepsilon < b_n - l \overset{(**)}{<} \varepsilon \tag{2.121}$$

Logo definido-se

$$n_o = \max\{n_1\,, n_2\}\,, \tag{2.122}$$

para $n \geq n_o$, teremos

$$n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,,$$

assim

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\overset{(*)\text{ em }(2.120)}{<} a_n - l \\ &\overset{a_n \overset{(2.118)}{\leq} c_n}{\leq} c_n - l \\ &\overset{c_n \overset{(2.118)}{\leq} b_n}{\leq} b_n - l \\ &\overset{(**)\text{ em }(2.121)}{<} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad -\varepsilon < c_n - l < \varepsilon\,,$$

$$\text{ou, equivalentemente,} \quad |c_n - l| < \varepsilon\,,$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l\,,$$

isto é, a validade de (2.119), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.5.1

1. *A Proposição 2.5.1, é conhecida como o* **Teorema da Comparação** *para sequências numéricas.*
2. *Uma sequência numérica que tem limite zero será dita* **infinitésimo** .

   Com isto a Proposição 2.5.2, pode ser resumida como: "o produto de uma sequência numérica que é um infinitésimo, por uma sequência numérica limitada é uma sequência numérica que é um infinitésimo".
3. *A Proposição 2.5.3, é conhecida como o* **Teorema do sanduiche ou do confronto** *para sequências numéricas.*

Apliquemos os resultados acima ao:

Exemplo 2.5.1 *Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2\,n)^2}}_{(n+1)-parcelas} \right) = 0\,.$$

Resolução:

Para isto observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos:

$$c_n \doteq \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-\text{parcelas}} . \tag{2.123}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
a_n &\doteq 0 \qquad (2.124) \\
&\leq \overbrace{\underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-\text{parcelas}}}^{\overset{(2.123)}{=} c_n} \\
&\overset{\begin{pmatrix} n+1 \geq n \\ n+2 \geq n \\ \cdots \\ 2n \geq n \end{pmatrix} \text{ e } (1.10)}{\leq} \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{(n+1)-\text{parcelas}} \\
&= \frac{n+1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \doteq b_n .
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Notemos que:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \overset{a_n \overset{(2.124)}{=} 0}{=} 0 . \tag{2.126}$$

Do Exemplo 2.3.2, da Proposição 2.4.1 e da Proposição 2.4.3, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} b_n &\overset{(2.125)}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\
&\overset{(2.50) \text{ e } (2.60)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \right) \\
&\overset{(2.31)}{=} 0 + 0 \cdot 0 = 0 ,
\end{aligned} \tag{2.127}$$

ou seja, de (2.126) e (2.127), teremos:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \underbrace{0}_{\doteq l} = \lim_{n \to \infty} b_n .$$

Logo, da Proposição 2.5.3 (isto é, do Teorema do sanduiche), segue que

$$\lim_{n\to\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-\text{parcelas}}\Bigg) = \lim_{n\to\infty} c_n$$
$$\overset{(2.117)\text{ e }(2.119)}{=} \lim_{n\to\infty} a_n \quad (= \lim_{n\to\infty} b_n)$$
$$\overset{(2.127)}{=} 0\,,$$

completando a resolução. □

Observação 2.5.2 *Vale observar que no Exemplo 2.5.1 acima,* **não** *podemos aplicar a propriedade de soma de limites, isto é, limite da soma é a soma dos limites, pois o número de parcelas de* $\underline{a_n}$ *aumenta, quando* $\underline{n}$ *aumenta.*

Observemos que para:

$$\begin{aligned} &n=1 \text{ (duas parcelas)}, && \text{temos que: } a_1 = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}\\ &n=2 \text{ (três parcelas)}, && \text{temos que: } a_2 = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\\ &n=3 \text{ (quatro parcelas)}, && \text{temos que: } a_3 = \frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2} \end{aligned}$$

e assim por diante.

Um resultado bastante importante no estudo da convergência de sequências numéricas é o que relaciona limites de sequências numéricas com limites, no infinito, de funções a valores reais, de uma variável real (estudado no Cálculo 1), a saber:

Proposição 2.5.4 *Seja* $f:[1\,,\infty)\to\mathbb{R}$ *uma função e suponhamos que*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,. \tag{2.128}$$

Então a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \text{para} \quad n\in\mathbb{N}\,, \tag{2.129}$$

é convergente para $\underline{l}$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = l\,. \tag{2.130}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, da Definição de limite no infinito para função de uma variável real a valores reais, podemos encontrar $R > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad x \geq R, \quad \text{teremos:} \quad |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{2.131}$$

Da propriedade archimediana de $\mathbb{R}$ (ou seja, a Proposição 1.0.4, com $a \doteq 1$ e $b \doteq R$), podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$n_o \geq R. \tag{2.132}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad & n \geq n_o \overset{(2.132)}{\geq} R, \\
\text{de (2.131), teremos:} \quad & |\underbrace{f(n)}_{\overset{(2.129)}{=} a_n} - l| < \varepsilon, \\
\text{ou seja,} \quad \text{se} \quad & n \geq n_o, \\
\text{teremos:} \quad & |a_n - l| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{l}$, ou seja, vale (2.130), completando a demonstração.

□

Observação 2.5.3 *As Proposições 2.5.1, 2.5.3 e 2.5.4 acima permanecem verdadeiros se substituirmos a hipótese*

$$n \in \mathbb{N}, \quad \textit{por} \quad n \geq n_o,$$

para algum $n_o \in \mathbb{N}$ fixado.

Mais precisamente:

1. *Para a Proposição 2.5.1 temos: se as sequências numéricas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = b$$

e, para $n_o \in \mathbb{N}$, temos que

$$a_n \leq b_n, \quad \textit{para cada} \quad n \geq n_o, \tag{2.133}$$

$$\begin{aligned}
\textit{então} \quad & a \leq b, \\
\textit{isto é,} \quad & \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.
\end{aligned}$$

2. *Para a Proposição 2.5.3 temos: suponhamos que as sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $\underline{l}$*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$$

e a sequência numérica $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaz:*

$$a_n \leq c_n \leq b_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq n_o\,,$$

para $n_o \in \mathbb{N}$ *fixado.*

Então a sequência numérica $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{l}$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l\,.$$

3. *Para a Proposição 2.5.4 temos seja* $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função e suponhamos que*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,.$$

Então a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \text{para} \quad n \geq n_o\,,$$

para algum $n_o \in \mathbb{N}$ *fixado, será convergente para* $\underline{l}$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)\,.$$

Observação 2.5.4 *Como vimos anteriormente (veja a Proposição 2.3.2) toda sequência numérica convergente é limitada, mas* <u>não</u> *vale a recíproca (veja o Exemplo 2.3.4).*

A questão que podemos colocar é a seguinte: além de ser limitada, que é uma propriedade necessária para que uma sequência numérica seja convergente (veja a Proposição 2.3.2), o que mais precisamos para garantir que a mesma seja convergente ?

A seguir introduziremos uma nova classe de sequências numéricas que nos ajudará a responder essa pergunta.

2.6 Sequências numéricas monótonas

Definição 2.6.1 *Diremos que uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é:*

1. <u>**crescente**</u> *se:*

$$a_{n+1} \geq a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.134}$$

2. <u>**decrescente**</u> *se:*

$$a_{n+1} \leq a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.135}$$

3. <u>**estritamente crescente**</u> *se:*

$$a_{n+1} > a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.136}$$

4. <u>**estritamente decrescente**</u> *se*

$$a_{n+1} < a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.137}$$

Se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for de um dos tipos acima ela será dita* <u>**monótona**</u>.

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.6.1 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.138}$$

é estritamente crescente (portanto monótona)

Resolução:

De fato, pois

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(2.138)}{=} n+1 \\ &> n \\ &\overset{(2.138)}{=} a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

mostrando, pelo item 3. da Definição 2.6.1, que a equência numérica

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$$

é estritamente crescente, completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 2.6.2 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde por*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.139}$$

é estritamente decrescente (portanto monótona).

Resolução:

De fato, pois

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(2.139)}{=} \frac{1}{n+1} \\ &\overset{n+1>n>0 \text{ e } (1.10)}{<} \frac{1}{n} \\ &\overset{(2.139)}{=} a_n\,, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, mostrando, pelo item 4. da Definição 2.6.1, que a sequência numérica

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é estritamente decrescente, completando a resolução.

□

Um caso de sequência numérica não monótona é dado pelo:

Exemplo 2.6.3 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde por*

$$a_n \doteq \cos(n\,\pi)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.140}$$

<u>**não**</u> *é monótona.*

Resolução:

Notemos que

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.140)}{=} \cos(n\,\pi) \\ &= (-1)^n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

que mostra que nenhuma das condições da Definição 2.6.1 ocorrerá, ou seja, a sequência numérica

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos(n\,\pi))_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

<u>**não**</u> é monótona.

□

Por fim temos o:

Exemplo 2.6.4 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1}{2^n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.141}$$

é estritamente decrescente (portanto monótona).

Resolução:

De fato, pois, como

$$2^{n+1} > 2^n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.142}$$

(pois a função exponenciação é crescente), segue que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(2.141)}{=} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\overset{(2.142)\text{ e }(1.10)}{<} \frac{1}{2^n} \\ &\overset{(2.141)}{=} a_n\,, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, mostrando, pelo item 4. da Definição 2.6.1, que a sequência numérica

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é estritamente decrescente, completando a resolução.

$\square$

Observação 2.6.1

1. *Podemos estudar a monotonicidade de uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, estudando-se o comportamento da sequência numérica dada por:*

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n_{n\in\mathbb{N}}},$$

se

$$a_n \neq 0\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

de várias maneiras.

A seguir vamos elencar algumas possibilidades:

(a) *Suponhamos que*

$$a_n > 0\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.143}$$

i. *Então*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.144}$$

se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

De fato, pois como temos (2.143) e (1.5), segue-se

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \geq a_n\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ se,\ e\ somente\ se,\quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

ii. *Então*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.145}$$

se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente.

De fato, pois como temos (2.143) e (1.5), segue-se

$$\begin{aligned} & a_{n+1} > a_n\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ se,\ e\ somente\ se,\quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\,, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

iii. *Então*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.146}$$

se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente.*
De fato, pois como temos (2.143) *e* (1.5), *segue-se*

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \leq a_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \textit{se, e somente se,} \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

iv. *Então*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.147}$$

se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente decrescente.*
De fato, pois como temos (2.143) *e* (1.5), *segue-se*

$$\begin{aligned} & a_{n+1} < a_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \textit{se, e somente se,} \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(b) *Suponhamos agora que*

$$a_n < 0, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.148}$$

i. *Então*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.149}$$

se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente.*
De fato, pois como temos (2.148) *e* (1.7), *segue-se*

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \geq a_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \textit{se, e somente se,} \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ii. *Então*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.150}$$

se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente crescente.*
De fato, pois como temos (2.148) *e* (1.7), *segue-se*

$$\begin{aligned} & a_{n+1} > a_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \textit{se, e somente se,} \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

iii. *Então*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.151}$$

se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente.*
De fato, pois como temos (2.148) *e* (1.7), *segue-se*

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \leq a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ \textit{se, e somente se,} \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

iv. *Então*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.152}$$

se, e somente se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente decrescente.*
De fato, pois como temos (2.148) *e* (1.7), *segue-se*

$$\begin{aligned} & a_{n+1} < a_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ \textit{se, e somente se,} \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

2. **Conclusão:** *supondo que*

$$a_n > 0 \quad (\textit{analogamente, } a_n < 0)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será monótona se, e somente se,*

$$\begin{aligned} & \textit{ou} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \left(\textit{analogamente, } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1\right)\,, \\ & \textit{ou} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \left(\textit{analogamente, } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\right) \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.153}$$

3. *Podemos, quando possível, estudar a monotonicidade de uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *estudando-se a monotonicidade de uma função* $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$, *onde*

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Por exemplo, se a função $\underline{f}$ *é crescente (respectivamente, estritamente crescente, decrescente, estritamente decrescente), isto é,*

$$f(x) \geq f(y) \quad (\textit{respectivamente, } >\,, \leq\,, <)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \geq y \geq 1\,,$$

então a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_n \doteq f(n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

será crescente (respectivamente, estritamente crescente, decrescente, estritamente decrescente).

4. *Pode ocorrer da função* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ **não** *ser uma função monótona, mas a sequência numérica* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq f(n), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

ser monótona, como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(\pi x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [1, \infty).$$

Então a função $\underline{f}$ **não** *é monótona, mas a sequência numérica* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *onde*

$$\begin{aligned} a_n &\doteq f(n) \\ &= \operatorname{sen}(\pi n) \\ &= 0, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

é uma sequência numérica monótona, pois

$$a_{n+1} = 0 \geq 0 = a_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 2.6.5 *A sequência numérica* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq \frac{-n}{n+1}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.154}$$

é estritamente decrescente.

Resolução:

De fato, pois

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(2.154)}{=} \frac{\frac{-(n+1)}{(n+1)+1}}{\frac{-n}{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \\ &= 1 + \frac{1}{\underbrace{n^2+2}_{>0}} > 1. \end{aligned} \tag{2.155}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$a_n \overset{(2.154)}{=} \frac{-n}{n+1} < 0\,,\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, multiplicando-se (2.155) por $a_n < 0$, de (1.7), segue que

$$a_{n+1} < a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

mostrando, pelo item 4. da Definição 2.6.1, que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente, em particular, será uma sequência numérica monótona.

□

Temos também o:

Exemplo 2.6.6 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{2\,n}{3\,n+2}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.156}$$

é estritamente crescente.

Resolução:

De fato, pois

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(2.156)}{=} \frac{\dfrac{2\,(n+1)}{3\,(n+1)+2}}{\dfrac{2\,n}{3\,n+2}} \\ &= \frac{2\,n+2}{3\,n+5}\,\frac{3\,n+2}{2\,n} \\ &= \frac{6\,n^2+10\,n+4}{6\,n^2+10\,n} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{4}{6\,n^2+10\,n}}_{>0} > 1\,, \end{aligned} \tag{2.157}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$a_n \overset{(2.156)}{=} \frac{2\,n}{3\,n+2} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, multiplicando-se (2.157) por $\underline{a_n}$, de (1.5), segue que

$$a_{n+1} > a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

mostrando, pelo item 3. da Definição 2.6.1, que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente, em particular, será sequência numérica monótona.

□

Observação 2.6.2 *Sabemos que toda sequência numérica convergente é limitada (veja a Proposição 2.3.2), mas nem toda sequência numérica limitada é convergente (veja o Exemplo 2.3.4).*

A pergunta que podemos formular é a seguinte: que outra propriedade a sequência numérica poderá ter (além de ser limitada), para que possamos garantir que ela seja convergente ?

A resposta será dada no:

Teorema 2.6.1 *Toda sequência numérica real, limitada e monótona será convergente em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

1. Trataremos primeiramente do caso em que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja crescente.

   Como a sequência numérica $(a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ é limitada, da Definição 2.3.2, podemos encontrar $M > 0$, de modo que

   $$\begin{aligned} |a_n| &\leq M\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ \text{ou seja,} \quad -M \leq a_n &\leq M\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.158}$$

   Logo o conjunto

   $$A \doteq \{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}\,, \tag{2.159}$$

   será limitado superiormente em $\mathbb{R}$ (de (2.164) vemos que o número real M será um limitante superior do conjunto A).

   Como

   $$A \neq \emptyset,,$$

   por um resutado de Análise Real, podemos encontrar

   $$\begin{aligned} U &\doteq \sup(A) \\ &\overset{(2.159)}{=} \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{2.160}$$

   Afirmamos que

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = U\,. \tag{2.161}$$

   De fato, dado $\varepsilon > 0$, da definição de supremo, como

   $$U \overset{(2.161)}{=} \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\,,$$

   podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

   $$U - \varepsilon < a_{n_o}\,. \tag{2.162}$$

Como estamos supondo que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente

$$
\text{para } n \geq n_o, \text{ teremos:}
$$

$$
\begin{aligned}
U - \varepsilon &\overset{(2.162)}{<} a_{n_o} \\
&\overset{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é crescente e } n \geq n_o}{\leq} a_n \\
&\overset{U \text{ é limitante superior do conjunto } \underline{A}}{\leq} U \\
&\overset{0<\varepsilon}{<} U + \varepsilon\,,
\end{aligned} \tag{2.163}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\
\text{teremos} \quad & U - \varepsilon < a_n < U + \varepsilon\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & |a_n - U| < \varepsilon\,, \quad \text{para} \quad n \geq n_o\,.
\end{aligned}
$$

Logo, da Definição 2.3.1, segue que

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = U \overset{(2.161)}{=} \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,,
$$

como queríamos demonstrar.

2. Trataremos agora do caso em que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja decrescente.

   Como a sequência numérica $(a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ é limitada, da Definição 2.3.2, podemos encontrar $M > 0$, de modo que

$$
\begin{aligned}
& |a_n| \leq M\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \\
\text{ou seja,} \quad & -M \leq a_n \leq M\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned} \tag{2.164}
$$

   Logo o conjunto

$$
B \doteq \{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,, \tag{2.165}
$$

   será limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ (de (2.164) vemos que o número real $-M$ será um limitante inferior do conjunto B).

   Como

$$
B \neq \emptyset\,,
$$

   por um resutado de Análise Real, podemos encontrar

$$
\begin{aligned}
L &\doteq \inf(B) \\
&\overset{(2.165)}{=} \inf\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}\,.
\end{aligned} \tag{2.166}
$$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, da definição de ínfimo, como

$$L \overset{(2.166)}{=} \inf\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\,,$$

podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$a_{n_o} < L + \varepsilon\,. \tag{2.167}$$

Como estamos supondo que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente

$$\text{para } n \geq n_o, \text{ teremos:}$$

$$\begin{aligned} L + \varepsilon &\overset{(2.167)}{>} a_{n_o} \\ &\overset{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é decrescente e } n \geq n_o}{\geq} a_n \\ &\overset{L \text{ é limitante inferior do conjunto } \underline{B}}{\geq} L \\ &\overset{0<\varepsilon}{<} L - \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{2.168}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{teremos} \quad & L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon\,, \\ \text{ou ainda} \quad & |a_n - L| < \varepsilon\,, \quad \text{para} \quad n \geq n_o\,. \end{aligned}$$

Logo, da Definição 2.3.1, segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \overset{(2.166)}{=} \inf\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 2.6.3

1. *O item 1. da demonstração Teorema 2.6.1 acima, "nos diz" que se uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada, então ela será convergente para algum $U \in \mathbb{R}$.*

   Além disso, teremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = U = \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,. \tag{2.169}$$

2. *O item 2 da demonstração Teorema 2.6.1 acima, "nos diz" que se uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente e limitada, então ela será convergente para algum* $L \in \mathbb{R}$.

   Além disso, teremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}. \tag{2.170}$$

3. *O resultado acima nos dá uma condição suficiente (mas* **não** *necessária) para que uma sequência numérica real limitada, seja convergente em* $\mathbb{R}$, *a saber, que ela seja monótona.*

   Notemos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq \frac{(-1)^n}{n}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.171}$$

   não *é monótona mas é convergente para zero.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 2.6.7 *Mostre que a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq \frac{2^n}{n!}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.172}$$

é convergente para zero, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Resolução:

Para garantir a convergência em $\mathbb{R}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mostremos que ela é uma sequência numérica limitada e monótona.

Com isto, pelo Teorema 2.6.1, segue que ela será convergente em $\mathbb{R}$.

Após isto, mostraremos que o valor do seu limite é zero.

1. Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

   De fato, notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(2.172)}{=} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} \\ &= \frac{2^{n+1}\, n!}{2^n\,(n+1)!} \\ &= 2\,\frac{1}{n+1} \\ &\overset{n+1\geq 2 \text{ e } (1.10)}{\leq} 2\,\frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \tag{2.173}$$

Como

$$a_n \overset{(2.172)}{=} \frac{2^n}{n!} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.174}$$

mutiplicando (2.173) por $a_n > 0$, de (1.5), segue que

$$a_{n+1} \leq a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.175}$$

ou seja, a sequência numérica é decrescente (em particular, monótona).

2. Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

   Do item 1. acima, temos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

   Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.174)}{>} 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ \text{seque que} \quad -2 \leq 0 < a_n &\overset{(2.175)}{\leq} a_1 \overset{(2.172)\text{ com } n=1}{=} 2\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ \text{em particular,} \quad |a_n| &\leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

   Portanto a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Logo, do Teorema (2.6.1), segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, existe $L \in \mathbb{R}$, tal que

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} a_n\,. \tag{2.176}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &\overset{(2.172)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{n}\,\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &\overset{(2.172)}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{n}\,a_{n-1}\right]\,. \end{aligned} \tag{2.177}$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} a_{n-1} \overset{(2.176)}{=} L \tag{2.178}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} &\overset{(2.60)}{=} \left(\lim_{n\to\infty} 2\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \\ &\overset{(2.27)\text{ e }(2.30)}{=} 2 \cdot 0 \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.179}$$

Logo, da Proposição 2.4.3 , de (2.178), (2.179) e (2.177), segue que

$$\begin{aligned} L &\overset{(2.177)}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n}\,a_{n-1}\right] \\ &\overset{(2.60)}{=} \left[\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right]\left[\lim_{n\to\infty}a_{n-1}\right] \\ &\overset{(2.179)\ \text{e}\ (2.178)}{=} 0\cdot L \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$L = 0\,,$$

$$\text{ou ainda,}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para zero, completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 2.6.8 *Mostre que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$\begin{aligned} a_1 &\doteq \sqrt{2}\,, \\ a_2 &\doteq \sqrt{2\sqrt{2}}\,, \\ &\vdots \\ a_n &\doteq \sqrt{2\,a_{n-1}}\,, \quad \textit{para cada} \quad n\in\mathbb{N}\,, \end{aligned} \tag{2.180}$$

é convergente para $\underline{2}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,.$$

Resolução:

Para garantir a convergência em $\mathbb{R}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mostremos que ela é uma sequência numérica limitada e monótona.

Logo, pelo Teorema 2.6.1, segue que ela será convergente em $\mathbb{R}$.

Após isto, mostraremos que o valor do seu limite é igual a $\underline{2}$.

1. Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

   Na verdade, mostraremos que

$$0 < a_n \leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N}\,, \tag{2.181}$$

   que implicará, em particular, que

$$|a_n| \leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N}\,,$$

ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada.

Para mostrar (2.181), utilizaremos **indução matemática**, isto é, precisaremos mostrar que:

(a) a propriedade (2.181) é válida para $n = 1$;

(b) se a propriedade (2.181) for válida para $n = k-1$, ela será válida para $n = k$.

Notemos que a propriedade (2.181) é válida para $n = 1$, pois

$$0 < a_1 \overset{(2.180)}{=} \sqrt{2} \leq 2\,,$$

ou seja, vale o item (1a) acima.

Além disso, se a propriedade (2.181) for válida para $n = k-1$, teremos:

$$0 < a_{k-1} \leq 2\,. \tag{2.182}$$

Mas

$$\begin{aligned} 0 < a_k &\overset{(2.180)}{=} \sqrt{2\,\underbrace{a_{k-1}}_{\overset{(2.182)}{\leq}\,2}} \\ &\overset{\sqrt{\ }\ \text{é uma função crescente}}{\leq} \sqrt{2\cdot 2} = 2\,, \end{aligned}$$

mostrando a propriedade (2.181) será válida para $n = k$, isto é, vale (1b) acima.

Assim segue, da indução matemática, que (2.181) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, em particular, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

2. Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

   Para isto observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\overset{(2.180)}{=} \frac{\sqrt{2\,a_n}}{a_n} \\ &\overset{(1.21)}{=} \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_n}}{(\sqrt{a_n})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\underbrace{\sqrt{a_n}}_{\overset{(2.181)}{\leq}\,\sqrt{2}}} \\ &\overset{(1.10)}{\geq} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\,, \end{aligned} \tag{2.183}$$

Como

$$a_n \overset{(2.180)}{>} 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

multiplicando-se (2.181) por $a_n > 0$, de (1.5), segue que

$$a_{n+1} \geq a_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente (em particular, monótona).

Logo, do Teorema (2.6.1), segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Seja

$$U \doteq \lim_{n\to\infty} a_n\,. \tag{2.184}$$

Então

$$\begin{aligned} U &\overset{(2.184)}{=} \lim_{n\to\infty} a_n \\ &\overset{(2.180)}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\,a_{n-1}} \\ &\overset{(2.105)}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty} (2\,a_{n-1})} \\ &\overset{(2.60)}{=} \sqrt{\left(\lim_{n\to\infty} 2\right)\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right)} \\ &\overset{(2.27)\text{ e }(2.184)}{=} \sqrt{2\,U} \end{aligned}$$

ou seja, $\quad U^2 = 2\,U\,.$

Com isto poderemos ter as seguintes únicas possibildades:

$$U = 0\,,$$
$$\text{ou} \quad U = 2\,.$$

Notemos que

$$L = 0\,,$$

não poderá ocorrer pois a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, assim teremos

$$a_n \geq a_1 = \sqrt{2} > 0\,.$$

Portanto deveremos ter

$$L = 2\,,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{2}$, completando a resolução.

$\square$

Observação 2.6.4 *Observemos que na sequência numérica do Exemplo 2.6.8 acima, temos*

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^{\frac{1}{2}}\,, \\ a_2 &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\,, \\ a_3 &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\,, \\ &\vdots \\ a_n &= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}\,,\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

é uma P.G. (progressão geométrica) de razão

$$r \doteq \frac{1}{2}\,, \tag{2.185}$$

cujo primeiro termo é

$$a_1 \doteq \frac{1}{2}\,, \tag{2.186}$$

sabemos que a soma da mesma será igual a

$$\frac{a_1}{1-r} \overset{(2.185)\ e\ (2.186)}{=} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1\,.$$

Logo é natural que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2^1 = 2\,,$$

como vimos no Exemplo 2.6.8.

Temos também o:

Exemplo 2.6.9 *Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$\begin{aligned} a_1 &\doteq \sqrt{2}\,, \\ a_2 &\doteq \sqrt{2+\sqrt{2}}\,, \\ &\vdots \\ a_n &\doteq \sqrt{2+a_{n-1}}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned} \tag{2.187}$$

é convergente para $\underline{2}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,.$$

Resolução:

Para garantir a convergência em $\mathbb{R}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mostremos que ela é uma sequência numérica limitada e monótona.

Logo, pelo Teorema 2.6.1, segue que ela será convergente em $\mathbb{R}$.

Após isto, mostraremos que o valor do seu limite é igual a $\underline{2}$.

1. Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, isto é,

$$a_n \leq a_{n+1}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.188}$$

Para isso usaremos indução matemática, ou seja, mostraremos que:

(a) a propriedade é válida para $n = 1$

e

(b) se a propriedade for válida para $n = k-1$, então ela também será válida para $n = k$.

Notemos que

$$\begin{aligned} a_1 &\overset{(2.187)}{=} \sqrt{2} \\ &\overset{2\leq 2+\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{\ } \text{ é crescente}}{\leq} \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ &\overset{(2.187)}{=} a_2\,, \\ \text{portanto:}\quad a_1 &\leq a_2\,, \end{aligned}$$

ou seja, vale a propriedade (2.188) para $n = 1$, isto vale (1a).

Suponhamos que a propriedade for válida para $n = k - 1$, isto é,

$$a_{k-1} \leq a_k\,. \tag{2.189}$$

Com isto, teremos:

$$\begin{aligned} a_k &\overset{(2.187)}{=} \sqrt{2 + \underbrace{a_{k-1}}_{\overset{(2.189)}{\leq} a_k}} \\ &\overset{\sqrt{\ } \text{ é crescente}}{\leq} \sqrt{2+a_k} \\ &\overset{(2.187)}{=} a_{k+1}\,, \end{aligned}$$

mostrando que a propriedade será válida para $n = k$, ou seja, vale (1b).

Assim, segue da indução matemática, que (2.188) vale para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

2. Mostremos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$0 < a_n \leq 2\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.190}$$

em particular, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada.

Para isso usaremos, novamente, indução matemática para mostrar (2.190), ou seja, mostremos que

(a) a propriedade é válida para $n = 1$.

e

(b) se a propriedade for válida para $n = k - 1$, então ela será válida para $n = k$.

Notemos que a propriedade é válida para $n = 1$, pois

$$0 < a_1 \overset{(2.187)}{=} \sqrt{2} \leq 2\,,$$

ou seja, vale (2a).

Observemos também que, se a propriedade for válida para $n = k - 1$, isto é, se

$$0 < a_{k-1} \leq 2\,, \tag{2.191}$$

então ela será válida para $n = k$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} a_k &\overset{(2.187)}{=} \sqrt{2 + a_{k-1}} \\ &\overset{(2.191)\text{ e } \sqrt{\ }\text{ é crescente}}{\leq} \sqrt{2+2} \\ &= 2\,, \end{aligned}$$

mostrando que a propriedade é válida para $n = k$, ou seja, vale 2b.

Assim, do processo de indução matemática, segue que vale (2.190), em particular, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Logo, do Teorema 2.6.1, segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Seja

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} a_n\,. \tag{2.192}$$

Então

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} a_n \\
&\overset{(2.187)}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_{n-1}} \\
&\overset{(2.105)}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty} (2+a_{n-1})} \\
&\overset{(2.50)}{=} \sqrt{\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} 2\right)}_{\overset{(2.27)}{=}2} + \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right)}_{\overset{(2.192)}{=}L}} \\
&= \sqrt{2+L}\,,
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,}\quad L^2 = 2+L\,,$$

ou seja, temos as seguintes possibilidades:

$$L = -1\,, \quad \text{ou} \quad L = 2\,.$$

Observemos que

$$L = -1$$

não poderá ocorrer, pois a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, assim

$$a_n \geq a_1 \overset{(2.187)}{=} \sqrt{2} > 0\,.$$

Portanto, deveremos ter

$$L = 2\,,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{2}$, completando a resolução.

$\square$

Alguns tipos de a sequências numéricas que são divergentes, podem ser importantes, como veremos a seguir.

2.7 Sequências numéricas divergentes para $\pm\infty$

Inciaremos com a:

Definição 2.7.1 *Diremos que uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergente para $\underline{+\infty}$**, *se dado* $K > 0$, *podemos encontrar* $n_o \in \mathbb{N}$, *de modo que*

$$\begin{aligned}
&\textit{para} \quad n \geq n_o\,, \\
&\textit{temos} \quad a_n \geq K\,.
\end{aligned} \tag{2.193}$$

Neste caso escreveremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,. \tag{2.194}$$

De modo semelhante temos a:

Definição 2.7.2 *Diremos que uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergente para $\underline{\underline{-\infty}}$**, *se dado* $K > 0$, *podemos encontrar* $n_o \in \mathbb{N}$, *de modo que*

$$\begin{aligned} &\textit{para} \quad n \geq n_o\,, \\ &\textit{temos} \quad a_n \leq -K\,. \end{aligned} \tag{2.195}$$

Neste caso escreveremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad . \tag{2.196}$$

Para ilustrar temos o:

Exemplo 2.7.1 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.197}$$

é uma sequência numérica divergente para $\underline{\infty}$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty\,. \tag{2.198}$$

Resolução:

De fato, dado $K > 0$, pela propriedade archimediana (isto é, a Proposição 1.0.4, com $a \doteq 1$ e $b \doteq K$) podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$n_o \geq K\,. \tag{2.199}$$

Logo,

$$\text{para} \quad n \geq n_o\,, \tag{2.200}$$

$$\begin{aligned} \text{teremos} \quad a_n &\overset{(2.197)}{=} n \\ &\overset{(2.200)}{\geq} n_o \\ &\overset{(2.199)}{\geq} K\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,,$$

isto é, vale (2.198), completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 2.7.2 *A sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n \doteq \frac{1-n^3}{1+n^2}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.201}$$

é uma sequência numérica divergente para $\underline{-\infty}$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{1+n^2} = -\infty\,, \tag{2.202}$$

Resolução:

De fato, dado $K > 0$, pela propriedade archimediana (isto é, a Proposição 1.0.4, com $a \doteq 1$ e $b \doteq K+1$) podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$n_o > K + 1$$

$$\text{que, de (1.7) e (1.3), é equivalente a:} \quad 1 - n_o < -K\,. \tag{2.203}$$

Desta forma:

$$\text{para} \quad n \geq n_o \tag{2.204}$$

de (1.7) e (1.3), teremos:

$$1 - n \leq 1 - n_o\,, \tag{2.205}$$

e assim, segue que:

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(2.201)}{=} \frac{1-n^3}{1+n^2} \\ &\overset{1\leq n^2 \text{ e } (1.6)}{<} n^2 \frac{1-n^3}{1+n^2} \\ &= \frac{n^2-n^3}{1+n^2} \\ &\overset{n^2+1\geq n^2\geq 1 \text{ e } (1.10)}{<} \frac{n^2-n^3}{n^2} \\ &= \frac{n^2(1-n)}{n^2} \\ &\overset{n^2>0}{<} 1-n \\ &\overset{(2.205)}{<} 1-n_o \\ &\overset{(2.203)}{<} -K, \end{aligned} \tag{2.206}$$

mostrando, pela Definição 2.7.2, que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,,$$

isto é, vale (2.202), completando a resolução.

□

Observação 2.7.1

1. *Notemos que, se a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente e não é limitada superiormente, então ela será divergente para* $\underline{\infty}$ *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,.$$

De fato, pois se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *fosse convergente, deveria ser limitada, em particular, limitada superiormente, contrariando a hipótese.*

2. *De modo semelhante, se a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente e não é limitada inferiormente, então ela será divergente para* $\underline{-\infty}$ *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,.$$

De fato, pois se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *fosse convergente, deveria ser limitada, em paritular, limitada superiormente, contrariando a hipótese.*

3. *Outra classe de a sequências numéricas que não serão alvo de nosso estudo é a classe formada pelas sequências numéricas que são* **<u>oscilatórias</u>**, *ou seja, sequências numéricas que não são sequências numéricas convergentes, nem divergentes para* $\underline{\infty}$ *ou* $\underline{-\infty}$.

Por exemplo, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$a_n \doteq (-1)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n\in\mathbb{N}\,,$$

não é nem convergente, nem divergente para $\underline{\infty}$ *ou* $\underline{-\infty}$, *ou seja, é uma sequência numérica oscilatória.*

2.8 Propriedades de sequências numéricas divergentes

Temos um teorema da comparação para sequência numérica divergentes para $\underline{\infty}$ (respectivamente, $\underline{-\infty}$), a saber:

Teorema 2.8.1 *Suponhamos que as a sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfazem:*

$$a_n \leq b_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n\in\mathbb{N}\,. \tag{2.207}$$

Então:

1. *Se*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,,$$
$$\textit{deveremos ter:} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty\,. \tag{2.208}$$

2. Por outro lado, se

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty\,,$$

$$\textit{deveremos ter:} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,. \tag{2.209}$$

Demonstração:

De 1. :

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,,$$

dado $K > 0$, pela Definição 2.7.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{para} \quad n \geq n_o \\ &\text{teremos} \quad a_n \geq K\,. \end{aligned} \tag{2.210}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad n \geq n_o\,, \\ &\text{segue que:} \quad b_n \overset{(2.207)}{\geq} a_n \overset{(2.210)}{\geq} K\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty\,,$$

completando a demonstração do item 1. .

De 2. :

Como

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty\,,$$

dado $K > 0$, pela Definição 2.7.2, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{para} \quad n \geq n_o \\ &\text{teremos} \quad b_n \geq -K\,. \end{aligned} \tag{2.211}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad n \geq n_o\,, \\ &\text{segue que:} \quad a_n \overset{(2.207)}{\leq} b_n \overset{(2.211)}{\leq} -K\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.2, que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,,$$

completando a demonstração do item 2. e da Proposição .

□

2.9 Operações com sequências numéricas divergentes

Temos também o:

Teorema 2.9.1 *Suponhamos que as a sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *satisfazem:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,, \tag{2.212}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty\,, \tag{2.213}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty\,, \tag{2.214}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = -\infty\,, \tag{2.215}$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e > 0 \tag{2.216}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f < 0\,. \tag{2.217}$$

$$e \quad \lim_{n\to\infty} g_n = g \in \mathbb{R}\,. \tag{2.218}$$

Então:

1. *a sequência*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \stackrel{(2.9)}{=} (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para ∞, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty\,. \tag{2.219}$$

2. *a sequência*

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} + (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \stackrel{(2.9)}{=} (c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para $-\infty$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (c_n + d_n) = -\infty\,. \tag{2.220}$$

3. *a sequência*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \stackrel{(2.14)}{=} (a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para ∞, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \infty\,. \tag{2.221}$$

4. *a sequência*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \stackrel{(2.14)}{=} (a_n\, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para $-\infty$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, c_n) = -\infty\,. \tag{2.222}$$

5. *a sequência*

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.14)}{=} (c_n\, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para ∞, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (c_n\, d_n) = \infty\,. \tag{2.223}$$

6. *a sequência*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.9)}{=} (a_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para ∞, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + g_n) = \infty\,. \tag{2.224}$$

7. *a sequência*

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} + (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.9)}{=} (c_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para $-\infty$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (c_n + g_n) = -\infty\,. \tag{2.225}$$

8. *a sequência*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.14)}{=} (a_n\, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para ∞, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, e_n) = \infty\,. \tag{2.226}$$

9. *a sequência*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.14)}{=} (a_n\, f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para $-\infty$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, f_n) = -\infty\,. \tag{2.227}$$

10. *a sequência*

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.14)}{=} (c_n\, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para $-\infty$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (c_n\, e_n) = -\infty\,. \tag{2.228}$$

11. *a sequência*

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(2.14)}{=} (c_n\, f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para ∞, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} (c_n\, f_n) = \infty\,. \tag{2.229}$$

12. *Se*

$$a_n \neq 0 \,, \qquad \textit{para} \qquad n \in \mathbb{N} \,, \tag{2.230}$$

temos que a sequência

$$\frac{1}{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} \overset{(2.17)}{=} \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

será convergente para 0*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \,. \tag{2.231}$$

13. *Se*

$$b_n \neq 0 \,, \qquad \textit{para} \qquad n \in \mathbb{N} \,, \tag{2.232}$$

temos que a sequência

$$\frac{1}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} \overset{(2.17)}{=} \left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

será convergente para 0*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0 \,. \tag{2.233}$$

Demonstração:

Do item 1. :

Como

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \\ \text{e} \quad &\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \,, \end{aligned}$$

dado $K > 0$, pela Definição 2.7.1, podemos encontrar $n_1 \,, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_1 \,, \\ \text{teremos} \quad & a_n \geq \frac{K}{2} \qquad (2.234) \\ \text{e para} \quad & n \geq n_2 \,, \\ \text{teremos} \quad & b_n \geq \frac{K}{2} \,. \qquad (2.235) \end{aligned}$$

Consideremos

$$n_o \doteq \max\{n_1 \,, n_2\} \,. \tag{2.236}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad & n \geq n_o\,, \\
\text{de (2.236), segue que:} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \\
\text{e assim, de (2.234) e (2.235), teremos:} \quad & a_n + b_n \overset{(1.4)}{\geq} \frac{K}{2} + \frac{K}{2} \\
& = K\,, \\
\text{ou seja, para } n \geq n_o\text{, teremos:} \quad & a_n + b_n \geq K\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty\,,$$

completando a demonstração do item 1. .

Do item 2. :

Como

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \\
\text{e} \quad & \lim_{n\to\infty} d_n = -\infty\,,
\end{aligned}$$

dado $K > 0$, pela Definição 2.7.2, podemos encontrar $n_1\,, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned}
\text{para} \quad & n \geq n_1\,, \\
\text{teremos} \quad & a_n \leq -\frac{K}{2} \qquad (2.237) \\
\text{e para} \quad & n \geq n_2\,, \\
\text{teremos} \quad & b_n \leq -\frac{K}{2}\,. \qquad (2.238)
\end{aligned}$$

Consideremos

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.239}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad & n \geq n_o\,, \\
\text{de (2.239), segue que:} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \\
\text{e assim, de (2.237) e (2.238), teremos:} \quad & a_n + b_n \overset{(1.4)}{\leq} -\frac{K}{2} + \left(-\frac{K}{2}\right) \\
& = -K\,, \\
\text{ou seja, para } n \geq n_o\text{, teremos:} \quad & a_n + b_n \leq -K\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.2, que

$$\lim_{n\to\infty} (c_n + d_n) = -\infty\,,$$

completando a demonstração do item 2. .

Do item 3. :

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
$$\text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty\,,$$

dado $K > 0$, pela Definição 2.7.1, podemos encontrar $n_1\,, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_1\,, \\ \text{teremos} \quad & a_n \geq \sqrt{K} > 0 \qquad (2.240) \\ \text{e para} \quad & n \geq n_2\,, \\ \text{teremos} \quad & b_n \geq \sqrt{K} > 0\,. \qquad (2.241) \end{aligned}$$

Consideremos

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \qquad (2.242)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{de (2.242), segue que:} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \\ \text{e assim, de (2.240) e (2.241), teremos:} \quad & a_n \cdot b_n \overset{(1.5)}{\geq} \sqrt{K}\,\sqrt{K} \\ & = \sqrt{K^2} \\ & \overset{(1.11)}{=} |K| \\ & \overset{K>0}{=} K\,, \\ \text{ou seja, para } n \geq n_o \text{, teremos:} \quad & a_n \cdot b_n \geq K\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty\,,$$

completando a demonstração do item 3. .

Do item 4. :

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
$$\text{e} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = -\infty\,,$$

dado $K > 0$, pelas Definição 2.7.1 e Definição 2.7.2, podemos encontrar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_1 , \\ \text{teremos} \quad & a_n \geq \sqrt{K} > 0 \qquad (2.243) \\ \text{e para} \quad & n \geq n_2 , \\ \text{teremos} \quad & c_n \leq -\sqrt{K} < 0 . \qquad (2.244) \end{aligned}$$

Consideremos

$$n_o \doteq \max\{n_1 , n_2\} . \qquad (2.245)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & n \geq n_o , \\ \text{de (2.245), segue que:} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2 , \\ \text{e assim, de (2.243) e (2.244), teremos:} \quad & a_n \cdot c_n \overset{(1.8)}{\leq} -\sqrt{K}\sqrt{K} \\ & = -\sqrt{K^2} , \\ & \overset{(1.11)}{=} -|K| , \\ & \overset{K>0}{=} -K , \\ & = -K , \\ \text{ou seja, para } n \geq n_o \text{, teremos:} \quad & a_n \cdot c_n \leq -K , \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.2, que

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot c_n) = -\infty ,$$

completando a demonstração do item 4. .

<u>**Do item 5. :**</u>

Como

$$\begin{aligned} & \lim_{n \to \infty} c_n = -\infty \\ \text{e} \quad & \lim_{n \to \infty} d_n = -\infty , \end{aligned}$$

dado $K > 0$, pela Definição 2.7.2, podemos encontrar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_1 , \\ \text{teremos} \quad & c_n \leq -\sqrt{K} < 0 \qquad (2.246) \\ \text{e para} \quad & n \geq n_2 , \\ \text{teremos} \quad & d_n \leq -\sqrt{K} < 0 . \qquad (2.247) \end{aligned}$$

Consideremos

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.248}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad & n \geq n_o\,,\\
\text{de (2.248), segue que:} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,,\\
\text{e assim, de (2.246) e (2.247), teremos:} \quad & c_n \cdot d_n \overset{(1.8)}{\geq} (-\sqrt{K})\,(-\sqrt{K})\\
& = \sqrt{K^2}\,,\\
& \overset{(1.11)}{=} |K|\,,\\
& \overset{K \geq 0}{=} K\,,\\
\text{ou seja, para } n \geq n_o\text{, teremos:} \quad & c_n \cdot d_n \geq K\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$\lim_{n \to \infty} (c_n \cdot d_n) = \infty\,,$$

completando a demonstração do item 5. .

Do item 6. :

Como a sequência numérica $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente (veja (2.218)), da Proposição 2.3.2, ou seja, (veja a Definição 2.3.2), podemos encontrar $M > 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
& |g_n| \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,,\\
\text{ou ainda,} \quad & -M \leq g_n \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned} \tag{2.249}$$

Dado, $K > 0$, consideremos

$$K' \doteq K + M > 0\,. \tag{2.250}$$

$$\text{Como} \lim_{n \to \infty} a_n = \infty\,,$$

pela Definição 2.7.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned}
\text{para} \quad & n \geq n_o\,,\\
\text{teremos} \quad & a_n \geq K'\\
& \overset{(2.250)}{=} K + M\,.
\end{aligned} \tag{2.251}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\text{para} \quad & n \geq n_o\,,\\
\text{teremos:} \quad & \\
a_n + g_n & \overset{(2.250) \text{ e } (2.249)}{\geq} (K + M) - M\\
& = K\,,\\
\text{ou seja,} \quad & a_n + g_n \geq K\,, \text{ para todo } \; n \geq n_o\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + g_n) = \infty\,,$$

completando a demonstração do item 6. .

Do item 7. :

Como a sequência numérica $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente (veja (2.218)), da Proposição 2.3.2, ou seja, (veja a Definição 2.3.2), podemos encontrar $M > 0$, de modo que

$$\begin{aligned} |g_n| \leq M\,, &\quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,,\\ \text{ou ainda,} \quad -M \leq g_n \leq M\,, &\quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.252}$$

Dado, $K > 0$, consideremos

$$K' \doteq K + M > 0\,. \tag{2.253}$$

$$\text{Como} \lim_{n\to\infty} c_n = -\infty\,,$$

pela Definição 2.7.2, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} &\quad n \geq n_o\,,\\ \text{teremos} &\quad c_n \leq -K'\\ &\quad \stackrel{(2.250)}{=} -(K+M)\,. \end{aligned} \tag{2.254}$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{para} &\quad n \geq n_o\,,\\ \text{teremos:}&\\ c_n + g_n &\stackrel{(2.254)\text{ e }(2.252)}{\leq} -(K+M) + M\\ &= -K\,,\\ \text{ou seja,} &\quad c_n + g_n \leq -K\,, \text{ para todo } \quad n \geq n_o\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.2, que

$$\lim_{n\to\infty} (c_n + g_n) = -\infty\,,$$

completando a demonstração do item 7. .

Do item 8. :

Dado, $K > 0$, como

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\\ \text{e} \quad &\lim_{n\to\infty} e_n = e > 0\,, \end{aligned}$$

considerando-se

$$K' \doteq \frac{2\,K}{e} > 0\,, \tag{2.255}$$

$$\text{e} \quad \varepsilon \doteq \frac{e}{2} \overset{(2.216)}{>} 0\,, \tag{2.256}$$

pelas Definição 2.7.1 e Definição 2.3.1 , podemos encontrar $n_1\,, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_1\,, \\ \text{teremos} \quad & a_n \geq K' \\ & \overset{(2.255)}{=} \frac{2\,K}{e} \end{aligned} \tag{2.257}$$

$$\begin{aligned} \text{e para} \quad & n \geq n_2\,, \\ \text{teremos} \quad & |e_n - e| < \varepsilon \overset{(2.256)}{=} \frac{e}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.258}$$

Notemos que, para $n \geq n_2$, de (2.259), segue que

$$\begin{aligned} & -\frac{e}{2} < e_n - e < \frac{e}{2}\,, \\ \text{ou seja,} \quad & \underbrace{-\frac{e}{2} + e}_{=\frac{e}{2}} < e_n < e + \frac{e}{2}\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & \frac{e}{2} < e_n < \frac{3\,e}{2}\,, \\ \text{em particular, temos:} \quad & 0 \overset{(2.216)}{<} \frac{e}{2} < e_n\,. \end{aligned} \tag{2.259}$$

Consideremos

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.260}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{de (2.266), segue que:} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \\ \text{e assim, de (2.257) e (2.259), teremos:} \quad & a_n \cdot e_n \overset{(1.6)}{\geq} \frac{2\,K}{e}\,\frac{e}{2} \\ & = K\,, \\ \text{ou seja, para } n \geq n_o \text{, teremos:} \quad & a_n \cdot e_n \geq K\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot e_n) = \infty\,,$$

completando a demonstração do item 8. .

<u>**Do item 9. :**</u>

Dado, $K > 0$, como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$\text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f < 0\,,$$

considerando-se

$$K' \doteq \frac{2\,K}{|f|} > 0\,, \tag{2.261}$$

$$\text{e} \quad \varepsilon \doteq \frac{|f|}{2} \overset{(2.217)}{>} 0\,, \tag{2.262}$$

pelas Definição 2.7.1 e Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_1\,, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_1\,, \\ \text{teremos} \quad & a_n \geq K' \\ & \overset{(2.255)}{=} \frac{2\,K}{|f|} \end{aligned} \tag{2.263}$$

$$\begin{aligned} \text{e para} \quad & n \geq n_2\,, \\ \text{teremos} \quad & |f_n - f| < \varepsilon \overset{(2.262)}{=} \frac{|f|}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.264}$$

Notemos que, para $n \geq n_2$, de (2.264), segue que

$$\begin{aligned} & -\frac{|f|}{2} < f_n - f < \frac{|f|}{2}\,, \\ \text{ou seja,} \quad & \underbrace{-\frac{|f|}{2} + f}_{|f| \overset{(2.217)}{=} -f\ -\frac{3\,f}{2}} < f_n < \underbrace{f + \frac{|f|}{2}}_{|f| \overset{(2.217)}{=} -f\ \frac{f}{2}}\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & \frac{3\,f}{2} < f_n < \frac{f}{2}\,, \end{aligned}$$

$$\text{em particular, temos:} \quad f_n < \frac{f}{2} \overset{(2.217)}{<} 0\,. \tag{2.265}$$

Consideremos

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.266}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{de (2.266), segue que:} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \\ \text{e assim, de (2.263) e (2.265), teremos:} \quad & a_n \cdot f_n \overset{(1.7)}{\leq} \frac{2\,K}{|f|}\,\frac{f}{2} \\ & \overset{\frac{f}{|f|} \overset{(2.217)}{=} -1}{=} -K\,, \\ \text{ou seja, para } n \geq n_o\text{, teremos:} \quad & a_n \cdot f_n \leq -K\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.2, que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot f_n) = -\infty\,,$$

completando a demonstração do item 9. .

Do item 10. :

Dado, $K > 0$, como

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \\ \text{e} \quad &\lim_{n\to\infty} e_n = e > 0\,, \end{aligned}$$

considerando-se

$$K' \doteq \frac{2\,K}{e} > 0\,, \tag{2.267}$$

$$\text{e} \quad \varepsilon \doteq \frac{e}{2} \overset{(2.216)}{>} 0\,, \tag{2.268}$$

pelas Definição 2.3.1 e Definição 2.7.2, podemos encontrar $n_1\,, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_1\,, \\ \text{teremos} \quad & c_n \leq -K' \\ & \overset{(2.267)}{=} -\frac{2\,K}{e} \end{aligned} \tag{2.269}$$

$$\begin{aligned} \text{e para} \quad & n \geq n_2\,, \\ \text{teremos} \quad & |e_n - e| < \varepsilon \overset{(2.268)}{=} \frac{e}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.270}$$

Notemos que, para $n \geq n_2$, de (2.270), segue que

$$\begin{aligned} & -\frac{e}{2} < e_n - e < \frac{e}{2}\,, \\ \text{ou seja,} \quad & \underbrace{-\frac{e}{2} + e}_{=\frac{e}{2}} < f_n < \frac{3\,e}{2}\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & \frac{e}{2} < e_n < \frac{3\,e}{2}\,, \\ \text{em particular, temos:} \quad & 0 \overset{(2.216)}{<} \frac{e}{2} < e_n\,. \end{aligned} \tag{2.271}$$

Consideremos

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.272}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{se} \quad & n \geq n_o\,, \\
\text{de (2.272), segue que:} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \\
\text{e assim, de (2.269) e (2.271), teremos:} \quad & c_n \cdot e_n \overset{(1.7)}{\leq} -\frac{2\,K}{e}\,\frac{e}{2} \\
& = -K\,, \\
\text{ou seja, para } n \geq n_o\text{, teremos:} \quad & c_n \cdot e_n \leq -K\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.2, que

$$\lim_{n\to\infty} (c_n \cdot e_n) = -\infty\,,$$

completando a demonstração do item 10. .

Do item 11. :

Dado, $K > 0$, como

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \\
\text{e} \quad & \lim_{n\to\infty} f_n = f < 0\,,
\end{aligned}$$

considerando-se

$$K' \doteq \frac{2\,K}{3\,|f|} > 0\,, \tag{2.273}$$

$$\text{e} \quad \varepsilon \doteq \frac{|f|}{2} \overset{(2.217)}{>} 0\,, \tag{2.274}$$

pelas Definição 2.7.2 e Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_1\,, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned}
\text{para} \quad & n \geq n_1\,, \\
\text{teremos} \quad & c_n \leq -K' \\
& \overset{(2.273)}{=} -\frac{2\,K}{3\,|f|} \qquad (2.275) \\
\text{e para} \quad & n \geq n_2\,, \\
\text{teremos} \quad & |f_n - f| < \varepsilon \overset{(2.274)}{=} \frac{|f|}{2}\,. \qquad (2.276)
\end{aligned}$$

Notemos que, para $n \geq n_2$, de (2.276), segue que

$$
\begin{aligned}
& -\frac{|f|}{2} < f_n - f < \frac{|f|}{2}\,,\\
\text{ou seja,}\quad & -\frac{|f|}{2} + f < f_n < \underbrace{-\frac{|f|}{2} + f}_{\overset{(2.217)}{=} -\frac{(-f)}{2}+f=\frac{3\,f}{2}}\,,\\
\text{ou ainda,}\quad & \frac{f}{2} < f_n < \frac{3\,f}{2}\,,\\
\text{em particular, temos:}\quad & f_n < \frac{3\,f}{2} \overset{(2.217)}{<} 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.277}
$$

Consideremos

$$
n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.278}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\text{se}\quad & n \geq n_o\,,\\
\text{de (2.278), segue que:}\quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,,\\
\text{e assim, de (2.275) e (2.277), teremos:}\quad & c_n \cdot e_n \overset{(1.8)}{\geq} \left(-\frac{2\,K}{3\,|f|}\right)\left(\frac{3\,f}{2}\right)\\
& = \underbrace{\frac{-f|}{|f|}}_{\overset{(2.217)}{=}1} K\\
& = -K\,,\\
\text{ou seja, para } n \geq n_o\text{, teremos:}\quad & e_n \cdot f_n \geq K\,,
\end{aligned}
$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$
\lim_{n\to\infty} (e_n \cdot f_n) = \infty\,,
$$

completando a demonstração do item 11. .

Do item 12. :

Dado, $\varepsilon > 0$, como

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \infty
$$

considerando-se

$$
K \doteq \frac{1}{\varepsilon} > 0\,, \tag{2.279}
$$

pela Definição 2.7.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{teremos} \quad & a_n \geq K \\ & \overset{(2.279)}{=} \frac{1}{\varepsilon} > 0\,. \end{aligned} \tag{2.280}$$

Logo

$$\text{se} \quad n \geq n_o\,,$$

teremos,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| & \overset{a_n \overset{(2.280)}{\geq} 0}{=} \frac{1}{a_n} \\ & \overset{(2.280) \text{ e } (1.10)}{\leq} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}\varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0\,,$$

completando a demonstração do item 12. .

<u>**Do item 13. :**</u>

Dado, $\varepsilon > 0$, como

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

considerando-se

$$K \doteq \frac{1}{\varepsilon} > 0\,, \tag{2.281}$$

pela Definição 2.7.2, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{teremos} \quad & b_n \leq -K \\ & \overset{(2.281)}{=} -\frac{1}{\varepsilon} < 0\,, \\ \text{que, de (1.7), implicará que:} \quad & -b_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0\,. \end{aligned} \tag{2.282}$$

Logo

$$\text{se} \quad n \geq n_o\,,$$

teremos,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - 0\right| & \overset{b_n \overset{(2.282)}{\leq} 0}{=} -\frac{1}{b_n} \\ & \overset{(2.282) \text{ e } (1.10)}{\leq} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = 0\,,$$

completando a demonstração do item 13., completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.9.1 *Notemos que os itens do Teorema 2.9.1, de modo empírico, "nos diz" em como "operar" com algumas expressões matemáticas que envolvem*

$$+\infty \quad e/ou \quad -\infty\,.$$

Mais explicitamente:

1. *O item 1. do Teorema 2.9.1, ""nos diz"" que:*

$$\infty + \infty = \infty\,;$$

2. *O item 2. do Teorema 2.9.1, ""nos diz"" que:*

$$-\infty + (-\infty) = -\infty\,;$$

3. *O item 3. do Teorema 2.9.1, "nos diz" que:*

$$\infty \cdot \infty = \infty\,;$$

4. *O item 4. do Teorema 2.9.1, "nos diz" que:*

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty\,;$$

5. *O item 5. do Teorema 2.9.1, "nos diz" que:*

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\,;$$

6. *Se $g \in \mathbb{R}$, o item 6. do Teorema 2.9.1, "nos diz" que:*

$$\infty + g = \infty\,;$$

7. *Se $g \in \mathbb{R}$, o item 7. do Teorema 2.9.1, "nos diz" em que:*

$$(-\infty) + g = -\infty\,;$$

8. *Se $e > 0$, o item 8. do Teorema 2.9.1, "nos diz" em que:*

$$\infty \cdot e = \infty\,;$$

Em particular,

$$1 \cdot \infty = \infty\,;$$

9. *Se* $f < 0$, *o item* 9. *do Teorema* 2.9.1, *"nos diz"em que:*

$$\infty \cdot f = -\infty ;$$

Em particular,

$$(-1) \cdot \infty = -\infty ;$$

10. *Se* $e > 0$, *o item* 10. *do Teorema* 2.9.1, *"nos diz"em que:*

$$(-\infty) \cdot e = -\infty ;$$

Em particular,

$$1 \cdot \infty = -\infty ;$$

11. *Se* $f < 0$, *o item* 11. *do Teorema* 2.9.1, *"nos diz"em que:*

$$(-\infty) \cdot f = \infty ;$$

Em particular,

$$(-1) \cdot (-\infty) = \infty ;$$

12. *O item* 12. *do Teorema* 2.9.1, *"nos diz"em que:*

$$\frac{1}{\infty} = 0 ;$$

13. *O item* 13. *do Teorema* 2.9.1, *"nos diz"em que:*

$$\frac{1}{-\infty} = 0 .$$

Apliquemos os Teoremas 2.8.1 e 2.9.1 acima ao (compare com o Exemplo 2.5.1):

Exemplo 2.9.1 *Mostre que a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde*

$$b_n \doteq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-parcelas} , \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.283}$$

é uma sequência numérica é divergente para $\underline{\infty}$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-parcelas} \right) = \infty . \tag{2.284}$$

Resolução:

Para isto, observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos:

$$
\begin{aligned}
b_n &\overset{(2.283)}{=} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-\text{parcelas}} \\
&\underset{\geq}{\begin{pmatrix} 1 \leq n \leq 2n \\ 1 \leq n+1 \leq 2n \\ \vdots \\ 1 \leq 2n-1 \leq 2n \end{pmatrix} \text{ e } (1.10)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-\text{parcelas}} \\
&= \frac{n+1}{\sqrt{2n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \doteq a_n \,,
\end{aligned}
\tag{2.285}
$$

$$
\text{isto é,} \quad a_n \leq b_n \,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \,. \tag{2.286}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &\overset{(2.285)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\
&\overset{(2.50) \text{ e } (2.60)}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\sqrt{n}) + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
&\overset{(2.27)}{=} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{>0} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}}_{\text{Exercício } \infty} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}_{=0}}_{=0} \\
&\overset{\text{do item 5. da Proposição 2.9.1}}{=} \infty \,.
\end{aligned}
$$

Logo, pelo item 1. do Teorema 2.8.1 acima, segue que

$$
\lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-\text{parcelas}} \right) \overset{(2.283)}{=} \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \,,
$$

mostrando a validade de (2.284).

□

O resultado a seguir pode ser importante para estudarmos a divergência para $\pm\infty$ de uma sequência numérica.

Teorema 2.9.2 *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência numérica satisfazendo:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \tag{2.287}$$

Então se

$$a_n \neq 0\,, \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.288}$$

temos que a sequência numérica

$$\frac{1}{(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}} \overset{(2.17)}{=} \left(\frac{1}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

será divergente para ∞*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty\,. \tag{2.289}$$

Demonstração:

Dado $K > 0$, como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,$$

da Definição 2.3.1, dado

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{K} > 0 \tag{2.290}$$

$$\begin{aligned}
\text{podemos encontrar} \quad & n_o \in \mathbb{N}\,, \\
\text{se} \quad & n \geq n_o\,, \\
\text{teremos} \quad & 0 \overset{(2.288)}{<} |a_n| < \varepsilon \overset{(2.290)}{=} \frac{1}{K}\,, \\
\text{que, de 1.10, segue-se:} \quad & \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\frac{1}{K}} = K\,, \\
\text{isto é,} \quad & \\
\text{para } n \geq n_o\text{, teremos:} \quad & \frac{1}{|a_n|} \geq K\,,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.7.1, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty\,,$$

completando a demonstração.

□

Observação 2.9.2 *O Teorema 2.9.2 acima "nos diz" que:*

$$\frac{1}{0} = \pm\infty\,,$$

e o sinal será $+$ *se a sequência numérica (em (2.287)) aproxima-se de zero por valores positivos e será* $-$ *se a sequência numérica (em (2.287)) aproxima-se de zero por valores negativos.*

2.10 Subsequência de uma sequência numérica

Definição 2.10.1 *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência numérica e*

$$A \doteq \{n_1, n_2, \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$$

subconjunto infinito dos números naturais, satisfazendo

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

Como isto podemos construir a sequência numérica $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *(isto é, consideramos a restrição* $a_{|_A} : A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*).*

Tal sequência numérica será denominada **subsequência** *da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observação 2.10.1

1. *Um outro modo de definir subsequência de uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seria a seguinte:*

   Considere uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *que seja estritamente crescente.*

   A sequência numérica $\left(a_{f(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *será dita subsequência da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. *Em particular, uma subsequência de uma sequência numérica é uma sequência numérica.*

   Desta forma podemos estudar a convergência de subsequência de uma sequência numérica olhando a mesma como uma sequência numérica, ou seja, a subsequência $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$*, da sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, será convergente para* $l \in \mathbb{R}$ *se, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, de modo que,*

$$\begin{aligned} \textit{se} \quad & n_i \geq n_o \,, \\ \textit{deveremos ter} \quad & |a_{n_i} - l| < \varepsilon \,. \end{aligned} \qquad (2.291)$$

Temos os:

Exemplo 2.10.1 *Consideremos a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n = \operatorname{sen}\left(n\,\frac{\pi}{2}\right), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.292)$$

Encontre as subsequências da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que têm índices ímpares e tê m índices ímpares.*

Resolução:

Se considerarmos somente os índices ímpares, isto é

$$n_i \doteq 2\,i + 1\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

obteremos a subsequência $(a_{2\,i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$\begin{aligned} a_{2\,i+1} &\overset{(2.292)}{=} \text{sen}\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2}\right] \\ &= (-1)^i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

ou seja, a subsequência $(a_{2\,i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será a sequência:

$$-1\,, 1\,, -1\,, 1\,, \cdots$$

Se considerarmos somente os índices pares, isto é,

$$n_i \doteq 2\,i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

obteremos a subsequência $(a_{2\,i})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$\begin{aligned} a_{2\,n} &\overset{(2.292)}{=} \text{sen}(2\,i\,\pi) \\ &= 0\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

ou seja, a subsequência $(a_{2\,i})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será a sequência:

$$0\,, 0\,, 0\,, \cdots\,.$$

□

Temos também o

Exemplo 2.10.2 *Consideremos a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$a_n = n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.293}$$

Encontre as subsequências da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que têm índices ímpares e tê m índices ímpares.*

Resolução:

Se considerarmos somente os índices ímpares, isto é,

$$n_i \doteq 2\,i + 1\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

obteremos a subsequência $(a_{2\,i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$a_{2\,i+1} \overset{(2.293)}{=} 2\,i + 1\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a subsequência $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será a sequência

$$1\,,3\,,5\,,7\,,\cdots$$

Se considerarmos somente os índices pares, isto é,

$$n_i \doteq 2\,i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

obteremos a subsequência $(a_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$a_{2i} \overset{(2.293)}{=} 2\,i\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja, a subsequência $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será a sequência

$$2\,,4\,,6\,,\cdots$$

□

2.11 Propriedades de uma subsequência de uma sequência numérica

A seguir exibiremos alguns resultados importantes no estudo da convergência de sequências numéricas, utilizando-se subsequências da mesma.

Começaremos pelo

Proposição 2.11.1 *Se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, então toda subsequência da mesma, será convergente para $\underline{a}$.*

Em particular, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, então para cada $k_o \in \mathbb{N}$, a subsequência $(a_{n+k_o})_{n\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será convergente para $\underline{a}$.

Demonstração:

Se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

então dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que se

$$n \geq n_o\,, \quad \text{temos que} \quad |a_n - a| < \varepsilon\,. \tag{2.294}$$

Logo,

$$\text{se} \quad n_i \geq n_o\,,$$

$$\text{de (2.294), teremos} \quad |a_{n_i} - a| \overset{(2.294)}{<} \varepsilon\,, \tag{2.295}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1 (veja o item 2. da Observação 2.10.1), que a subsequência $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será convergente para $l \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a\,,$$

como queríamos demonstrar.

Observemos que para cada $k_o \in \mathbb{N}$ fixado, temos que a sequência numérica

$$(a_{n+k_o})_{n\in\mathbb{N}}$$

é uma subsequência da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$ segue, do que mostramos acima, que a subsequência $(a_{n+k_o})_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para $\underline{a}$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Temos também a:

Proposição 2.11.2 *Se toda subsequência de uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, então a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para $\underline{a}$.*

Demonstração:

Observemos que para cada $k_o \in \mathbb{N}$ fixado, a sequência numérica $(a_{n+k_o})_{n\in\mathbb{N}}$ será subsequência da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Logo, por hipótese, será convergente para $\underline{a}$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \text{se} &\quad n \geq n_1\,, \\ \text{teremos} &\quad |a_{n+k_o} - a| < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

que é equivalente a escrever

$$|a_n - a| < \varepsilon\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq n_o \doteq n_1 + k_o\,,$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Um outro resultado importante e dado pela:

Proposição 2.11.3 *Toda sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, possui uma subsequência monótona.*

Demonstração:

Consideremos

$$\mathcal{N} \doteq \{n \in \mathbb{N};\, x_m \leq x_n\,, \quad \text{para todo} \quad n < m\}. \tag{2.296}$$

Notemos que se o conjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ for infinito, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & \mathcal{N} = \{n_1\,, n_2\,, n_3\,, \cdots\}\,, \\ \text{com} \quad & n_i < n_{i+1}\,, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\,, \end{aligned} \tag{2.297}$$

segue que a subsequência $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ será decrescente.

De fato,

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & i \in \mathbb{N}\,, \\ \text{segue que} \quad & n_i\,, n_{i+1} \in \mathcal{N}\,, \\ \text{de (2.297), temos que:} \quad & n_i < n_{i+1} \\ \text{e assim, de (2.296), teremos:} \quad & x_{n_{i+1}} \leq x_{n_i}\,, \end{aligned}$$

mostrando que a subsequência $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ será decrescente.

Se o conjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ for finito ou vazio, afirmamos que existe uma subsequência da sequência numérica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que será crescente.

De fato, se o conjunto $\mathcal{N}$ (dado por (2.296)) for finito ou vazio, ou seja,

$$\mathcal{N} = \begin{cases} \{1\,, 2\,, \cdots\,, n_o\} \text{ para algum } n_o \in \mathbb{N} \\ \text{ou} \\ \emptyset \end{cases} . \tag{2.298}$$

então o conjunto

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \doteq \mathbb{N} \setminus \mathcal{N} \text{ será infinito}\,, \\ \text{que, de (2.298), teremos:} \quad & \mathcal{P} = \begin{cases} \{n_o + 1\,, n_o + 2\,, \cdots\} \\ \text{ou} \\ \mathbb{N} \end{cases} . \end{aligned} \tag{2.299}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\mathcal{P} = \mathbb{N}\,.$$

Notemos que para cada

$$k \in \mathcal{P} = \mathbb{N}\,, \tag{2.300}$$

teremos, $k \notin \mathcal{N}$.

Logo, de (2.296),

$$\text{podemos encontrar } n_k \in \mathbb{N}, \text{ como } n_k > k, \text{ de modo que} \quad x_{n_k} > x_k\,. \tag{2.301}$$

Logo,

se $k = 1$, de (2.300) e (2.301), podemos encontrar $n_1 > 1$, de modo que: $x_{n_1} > x_1$;
se $k = n_1$, de (2.300) e (2.301), podemos encontrar $n_2 > n_1$, de modo que: $x_{n_2} > x_{n_1}$;
se $k = n_2$, de (2.300) e (2.301), podemos encontrar $n_3 > n_2$, de modo que: $x_{n_3} > x_{n_2}$;

$$\vdots$$

Desta forma a subsequência $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ será crescente, completando a demonstração.

□

Temos também a:

Proposição 2.11.4 *Toda sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada, possui uma subsequência que é convergente.*

Demonstração:

Notemos que toda subsequência de uma sequência numérica limitada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada.

Por outro lado, pela Proposição 2.11.3 acima, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência monótona, que indicaremos por $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Assim, a subsequência $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ será monótona e limitada.

Portanto, do Teorema 2.6.1, segue que a subsequência $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ será convergente, completando a demonstração do resultado.

□

2.12 Sequências numéricas de Cauchy

A seguir introduziremos uma nova classe de sequências numéricas, a saber:

Definição 2.12.1 *Diremos que uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será dita uma* **sequência numérica de Cauchy***, se dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo*

$$\begin{aligned} \textit{para} \quad & n\,, m \geq n_o\,, \\ \textit{deveremos ter} \quad & |a_n - a_m| < \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{2.302}$$

Observação 2.12.1 *Uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy se a diferença, em módulo, entre dois termos da mesma for arbitrariamente pequena, para índices suficientemente grandes.*

Com isto temos o

Exemplo 2.12.1 *A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde*

$$a_n \doteq \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.303}$$

é uma sequência numérica de Cauchy.

Resolução:

De fato pois, dado $\varepsilon > 0$, considerarmos $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$n_o > \frac{2}{\varepsilon}\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad \frac{2}{n_o} < \varepsilon\,. \tag{2.304}$$

Logo,

$$\text{se} \quad n, m \geq n_o\,,$$
$$\text{teremos} \quad \frac{1}{n}, \frac{1}{m} < \frac{1}{n_o}\,, \tag{2.305}$$

e assim:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\overset{(2.303)}{=} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\ &\overset{|a-b|\leq|a|+|b|}{<} \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\overset{(2.305)}{<} \frac{1}{n_o} + \frac{1}{n_o} \\ &= \frac{2}{n_o} \overset{(2.304)}{<} \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{2.306}$$

que, pela Definição 2.12.1, é o mesmo que dizer que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência numérica de Cauchy.

□

Observação 2.12.2 *Como vimos no Exemplo 2.3.2, a sequência numérica do Exemplo 2.12.1 acima é convergente em $\mathbb{R}$.*

Isto é, no caso do Exemplo 2.12.1 acima, a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$ e é uma sequência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Isto ocorre em geral, como mostra o:

Teorema 2.12.1 *Toda sequência numérica convergente, é uma sequência numérica de Cauchy.*

Demonstração:

De fato, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$, então dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{para} \quad n \geq n_o\,,$$
$$\text{teremos} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.307}$$

Logo,

$$\text{para} \quad n\,,m \geq n_o\,, \tag{2.308}$$

$$\begin{aligned} &\text{segue que} \\ &|a_n - a_m| = |a_n + (-a + a) - a_m| \\ &\qquad = |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\qquad \overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a| + \underbrace{|a - a_m|}_{=|a_m - a|} \\ &\qquad \overset{\text{de (2.308) e (2.307) teremos:}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.12.1, que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy, completando a demonstração.

□

A seguir trataremos do seguinte importante exemplo:

Exemplo 2.12.2 *Consideremos a sequência numérica* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$\begin{aligned} S_1 &\doteq 1\,, \\ S_2 &\doteq 1 + \frac{1}{2}\,, \\ S_3 &\doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,, \\ &\cdots \\ S_n &\doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.309}$$

Mostre que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, é divergente para* $\underline{+\infty}$*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\,.$$

Resolução:

Mostraremos que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **<u>não</u>** é uma sequência numérica de Cauchy.

De fato, para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$
\begin{aligned}
|S_{2k} - S_k| &\overset{(2.309)}{=} \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{2k}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)\right| \\
&= \underbrace{\frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{2k}}_{k-\text{parcelas}} \\
&\overset{\begin{cases} k+1 \leq 2k \\ k+2 \leq 2k \\ \vdots \\ 2k-1 \leq 2k \end{cases}}{\geq} \underbrace{\frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k}}_{k-\text{parcelas}} \\
&= k \frac{1}{2k} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$|S_{2k} - S_k| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo dado, por exemplo,

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{3} > 0, \tag{2.310}$$

segue que **<u>não</u>** podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo

$$
\begin{aligned}
\text{para} &\quad n, m \geq n_o, , \\
\text{tenhamos} &\quad |S_n - S_m| < \varepsilon = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

De fato, pois para cada $n_o \in \mathbb{N}$, se tomarmos $m \geq n_o$, então para

$$n \doteq 2m \geq n_o$$

(com isto teremos que $n, m \geq n_o$) segue que

$$
\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= |S_{2m} - S_m| \\
&\geq \frac{1}{2} \\
&> \frac{1}{3} \\
&\overset{(2.310)}{=} \varepsilon,
\end{aligned}
$$

ou seja, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **<u>não</u>** é uma sequência numérica de Cauchy.

Logo, do Teorema 2.12.1, segue que numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não poderá ser convergente em $\mathbb{R}$.

Para finalizar, observemos que a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acima é estritamente crescente, pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &\overset{(2.309)}{=} \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\overset{(2.309)}{=} S_n} + \frac{1}{n+1} \\
&= S_n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} \\
&> S_n .
\end{aligned}$$

Como a sequência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e não é convergente em $\mathbb{R}$, ela não poderá ser limitada.

De fato, pois se fosse, seria monótona (crescente) e limitada e assim, do Teorema 2.6.1, deveria ser convergente em $\mathbb{R}$, o que contraria o fato dela ser divergente.

Portanto deveremos ter

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty ,$$

completando a resolução.

□

Observação 2.12.3

1. *Com isto surge a pergunta: "vale a recíproca do Teorema (2.12.1) acima? ".*

   A resposta será positiva, se considerarmos a sequência numérica tomando valores sobre o <u>**todo**</u> *o conjunto dos números reais, ou seja, em $\mathbb{R}$.*

   Para mostrar isso precisaremos de alguns resultados que serão exibidos a seguir.

Proposição 2.12.1 *Toda sequência numérica de Cauchy é uma sequência numérica limitada.*

<u>**Demonstração:**</u>

De fato, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência numérica de Cauchy, então dado

$$\varepsilon \doteq 1 ,$$

podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\text{para} \quad & n, m \geq n_o , \\
\text{teremos} \quad & |a_n - a_m| < \varepsilon = 1 , \\
\text{em particular,} \quad & |a_n - a_{n_o}| < 1 , \quad \text{para cada} \quad n \geq n_o . \qquad (2.311)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{para} \quad n \geq n_o\,,$$

teremos:

$$|a_n| - |a_{n_o}| \overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a_{n_o}| \overset{(2.311)}{<} 1\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad |a_n| \leq |a_{n_o}| + 1\,. \tag{2.312}$$

Consideremos

$$M \doteq \max\{|a_1|\,,|a_2|\,,\cdots\,,|a_{n_o-1}|\,,|a_{n_o}|+1\}\,. \tag{2.313}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ de (2.312) e (2.313), segue que

$$|a_n| \leq M\,,$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, completando a demonstração.

□

Observação 2.12.4 *A recíproca do resultado acima* **<u>não</u>** *é verdadeira, isto é, nem toda sequência numérica limitada é uma sequência numérica de Cauchy, como mostra o seguinte exemplo:*

Consideremos a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$a_n \doteq (-1)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.314}$$

A sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica limitada mas **<u>não</u>** *é uma sequência numérica de Cauchy.*

De fato, se considerarmos, por exemplo,

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{2} > 0\,, \tag{2.315}$$

segue que, para $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned}
|a_n - a_{n+1}| &\overset{(2.314)}{=} |(-1)^n - (-1)^{n+1}| \\
&= |(-1)^n\,[1-(-1)]| \\
&= |(-1)^n|\,|1+1| \\
&= 2 \\
&> \frac{1}{2} \overset{(2.315)}{=} \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **<u>não</u>** *é uma sequência numérica de Cauchy.*

Temos também o:

Proposição 2.12.2 *Se a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência numérica de Cauchy e possui uma subsequência convergente para* $\underline{a}$*, então a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente para* $\underline{a}$*.*

Demonstração:

De fato, suponhamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy, de modo que uma subsequência numérica da mesma, que indicaremos por $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, seja convergente para $\underline{a}$.

Como sequência numérica $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ (que é uma subsequência numérica da sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$), é convergente para $\underline{a}$, dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 2.3.1, podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n_i \geq n_1\,, \\ \text{teremos} \quad & |a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.316}$$

Como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy, pela Definição ??, podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$, de modo

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n\,, m \geq n_2 \\ \text{teremos} \quad & |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.317}$$

Seja

$$n_o \doteq \max\{n_1\,, n_2\}\,. \tag{2.318}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{ou seja,} \quad & n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2\,, \\ \text{teremos} \quad & \\ |a_n - a| &= |a_n + (-a_{n_o} + a_{n_o}) - a| \\ &= |(a_n - a_{n_o}) + (a_{n_o} - a)| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a_{n_o}| + |a_{n_o} - a| \\ &\overset{(2.317)\text{ e }(2.316)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.1, que a sequência numérica é convergente para $\underline{a}$, completando a demonstração.

□

Com isto podemos enunciar e demonstrar o:

Teorema 2.12.2 *(critério de Cauchy para convergência de sequências numéricas)*

Um sequência numérica é convergente em $\mathbb{R}$ *se, e somente se, ela é uma sequência numérica de Cauchy em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração:

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica em $\mathbb{R}$.

O Teorema 2.12.1 afirma que se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente, ela deverá ser uma sequência numérica de Cauchy.

Por outro lado, se a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy então, da Proposição 2.12.1, segue que ela será uma sequência numérica limitada.

Mas, da Proposição 2.11.2, temos que toda sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que é monótona, que indicaremos por $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Como a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, seque que a subsequência numérica monótona $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ também será limitada.

Logo, do Teorema 2.12.1, segue que a subsequência numérica $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ deverá ser convergente em $\mathbb{R}$.

Portanto a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em $\mathbb{R}$.

Logo, da Proposição 2.12.2 acima, segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 2.12.5 *O Teorema 2.12.2 acima, não "nos diz" para que valor a sequência numérica de Cauchy converge em $\mathbb{R}$.*

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 2.12.3 *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica que tem a seguinte propriedade:*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.319}$$

Afirmamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Resolução:

De fato, de considerarmos $n, m \in \mathbb{N}$

$$\text{com} \quad n \leq m,$$
$$\text{ou seja,} \quad m = n + k, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{N},$$

segue que

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_n - a_{n+k}| \\
&= |a_n + (-a_{n+1} + a_{n+1}) + (-a_{n+2} + a_{n+2}) + \cdots - a_{n+k}| \\
&= |(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} + \cdots - a_{n+k})| \\
&\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| \\
&\overset{(2.319)}{\leq} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k-1}} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}}_{k-\text{parcelas}}\right) \\
&\overset{(2.320)}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

pois,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.320}$$

Portanto

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{para} \quad m \geq n. \tag{2.321}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, considerando-se

$$n_o > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.322}$$

$$\text{para} \quad m \geq n \geq n_o, \tag{2.323}$$

segue que

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &\overset{(2.321)}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\overset{(2.323)}{\leq} \frac{1}{2^{n_o-1}} \\
&\overset{(2.322)}{\leq} \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.12.1, que a sequência numérica é uma sequência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Logo, do Teorema 2.12.2, segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$, completando a resolução.

□

Uma generalização do exemplo acima é dado pelo:

Exercício 2.12.1 *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência numérica que tem a seguinte propriedade:*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r^n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.324}$$

onde

$$r \in (0\,,1)$$

está fixado.

Afirmamos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente em* $\mathbb{R}$.

Resolução: De fato, de considerarmos $n\,, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\text{com} \quad n \leq m\,, \\ &\text{ou seja,} \quad m = n + k\,, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_n - a_{n+k}| \\
&= |a_n + (-a_{n+1} + a_{n+1}) + (-a_{n+2} + a_{n+2}) + \cdots - a_{n+k}| \\
&= |(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} + \cdots - a_{n+k})| \\
&\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| \\
&\overset{(2.324)}{\leq} r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \cdots + r^{n+k-1} \\
&= r^n \left(\underbrace{1 + r + r^4 + \cdots + r^{k-1}}_{k-\text{parcelas}} \right) \\
&\overset{(2.325)}{\leq} \frac{1}{1-r}
\end{aligned}$$

pois,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1} \leq \frac{r}{1-r}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.325}$$

Portanto

$$|a_n - a_m| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}\,, \quad \text{para} \quad m \geq n\,. \tag{2.326}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, consideremos $n_o \in \mathbb{N}$ de modo que (que existe pela propriedade arquimediana):

$$n_o > \frac{\ln[(1-r)\,\varepsilon]}{\ln(r)} - 1\,. \tag{2.327}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} &\text{como} \quad 0 < r < 1\,, \\ &\text{segue que} \quad \ln(r) < 0\,. \end{aligned} \tag{2.328}$$

Desta forma teremos:

$$
\begin{aligned}
& n_o + > \frac{\ln[((1-r)\,\varepsilon]}{\ln(r)}\,, \\
\text{de (2.328),} \quad & (n_o\ + 1)\ \ln(r) < \ln[(1-r)\,\varepsilon]\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & \ln\left(r^{n_o+1}\right) < \ln[(1-r)\,\varepsilon]\,, \\
\text{como ln é crescente :} \quad & r^{n_o+1} < (1-r)\,\varepsilon\,, \\
\text{ou seja,} \quad & \frac{r^{n_o+1}}{1-r} < \varepsilon\,, \qquad (2.329)
\end{aligned}
$$

$$
\text{para} \quad m \geq n \geq n_o\,, \qquad (2.330)
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_m| & \overset{(2.321)}{\leq} \frac{r^{n+1}}{1-r} \\
& \overset{(2.330)}{\leq} \frac{r^{n_o+1}}{1-r} \\
& \overset{(2.329)}{\leq} \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

mostrando, pela Definição 2.12.1, que a sequência numérica é uma sequência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Logo, do Teorema 2.12.2, segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $\mathbb{R}$, completando a resolução.

□

Com isto podemos tratar o:

Exemplo 2.12.4 *Mostre que a sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*

$$
\begin{aligned}
a_1 & \doteq 1\,, \\
a_2 & \doteq 1 + \frac{1}{3}\,, \\
& \cdots \\
a_n & = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \qquad (2.331)
\end{aligned}
$$

é uma sequência numérica convergente em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - a_n| &\overset{(2.331)}{=} \left| \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) \right| \\
&= \frac{1}{3^n} \\
&= r^n,
\end{aligned}
$$

$$
\text{onde} \qquad r \doteq \frac{1}{3} \in (0\,,1)\ .
$$

Logo, do Exemplo (2.12.1) acima, segue que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

$\square$

Índice Remissivo