Densidade de vários subconjuntos em $\mathbb{R}$

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

2 de julho de 2019

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste texto é exibir demonstrações para a densidade de vários conjuntos em $\mathbb{R}$.

Entre eles dos conjuntos dos números racionais, dos números irracionais e do conjunto das frações diádicas, no conjunto dos números reais (o capítulo 2, capítulo 3 e capítulo 4, respectivamente).

No capítulo 5 apresentamos uma generalização para as frações p-ádicas.

Para tanto precisamos da:

Definição 1.0.1 *Diremos que o subconjunto* $D \subseteq \mathbb{R}$ *é* **denso em $\mathbb{R}$**, *se qualquer intervalo aberto de* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, *temos:*

$$D \cap (a, b) \neq \emptyset .$$

Capítulo 2

Densidade do conjunto dos números racionais em $\mathbb{R}$

Seja

$$\mathbb{Q} \doteq \left\{ \frac{m}{n} \,;\, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\} , \tag{2.1}$$

conjunto formado por todos os números racionais.

Objetivo deste capítulo é mostrar que o conjunto $\mathbb{Q}$, é denso em $\mathbb{R}$

2.1 Resultado principal

O objetivo desta é apresentar a demonstração do:

Teorema 2.1.1 *O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Para tanto, dividiremos a prova em quatro Lemas.

Começaremos pelo:

Lema 2.1.1 *Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$, satisfazendo*

$$a < b\,,$$

de modo que o intervalo

$$(a\,,b)$$

tem comprimento maior que 1.

Então, podemos encontrar

$$m_o \in \mathbb{Z} \cap (a\,,b)\,. \tag{2.2}$$

Demonstração:

Considere

$$[x] \doteq n \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

$$\text{onde,} \quad n \leq x < n+1\,,$$

conhecida como parte inteira do número real x.

Desta forma teremos:

$$[a] \leq a < [a] + 1 . \tag{2.4}$$

Afirmamos que

$$[a] + 1 \in \mathbb{Z} \cap (a , b) .$$

De fato, suponhamos por absurdo que

$$b \leq [a] + 1 .$$

Desta forma, de 2.3 e 2.4, segue que

$$(a , b) \subseteq ([a] , [a] + 1]) ,$$

e o comprimento do intervalo $([a] , [a] + 1])$ é igual a 1, o que implicaria que o comprimento do intervalo (a , b) seria menor ou igual a 1, contrariando a hipótese, o que seria um absurdo.

Portanto,

$$m_o \doteq [a] + 1 \in \mathbb{Z} \cap (a , b) ,$$

completando a demonstração.

□

Podemos agora tratar do:

Lema 2.1.2 *Sejam* $a , b \in \mathbb{R}$, *tais*

$$a < b . \tag{2.5}$$

Então podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$0 < \frac{1}{n_o} < b - a ; \tag{2.6}$$

Demonstração:

Sabemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Logo, da definição de limite, dado

$$\varepsilon \doteq b - a \overset{(2.5)}{>} 0 , \tag{2.7}$$

podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o , \\ \text{tenhamos} \quad & \underbrace{\left| \frac{1}{n} - 0 \right|}_{= \frac{1}{n}} < \varepsilon \overset{(2.5)}{=} b - a , \\ \text{ou seja,} \quad & 0 < \frac{1}{n} < b - a . \end{aligned}$$

Em particular, tomando-se

$$n = n_o \,,$$

obtemos (2.6), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Lema 2.1.3 *Seja* $n_o \in \mathbb{N}$*, obtido no Lema 2.1.2.*
Então o intervalo

$$(n_o\, a\,, n_o\, b) \tag{2.8}$$

tem comprimento maior que 1*;*

Demonstração:
Notemos que, do Lema 2.1.2, temos:

$$0 < \frac{1}{n_o} < b - a\,,$$

multiplicando-se (2.6) por $n_o > 0$, obteremos: $1 < n_o\, b - n_o\, a\,,$

ou seja, o intervalo

$$(n_o\, a\,, n_o\, b)\ ,$$

terá comprimento maior que 1, completando a demonstração do resultado.

□

Com o resultado acima, temos o:

Lema 2.1.4 *Seja* $n_o \in \mathbb{N}$*, obtido no Lema 2.1.2.*
Então podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$*, de modo que*

$$n_o\, a < m_o < n_o\, b\,. \tag{2.9}$$

Em particular, segue que

$$a < \frac{m_o}{n_o} < b\,,$$

$$\textit{ou ainda,}\quad \frac{m_o}{n_o} \in (a\,, b)\,. \tag{2.10}$$

Demonstração:
Pelo Lema 2.1.3 temos que o intervalo (2.8) tem comprimento maior que 1.
Logo, do Lema 2.1.1 (ou seja, (2.2)), podemos encontrar

$$m_o \in \mathbb{Z} \cap (n_o\, a\,, n_o\, b)\ ,$$

$$\text{isto é,}\quad m_o \in (n_o\, a\,, n_o\, b)\ ,$$

$$\text{ou seja,}\quad n_o\, a < m_o < n_o\, b\,,$$

$$\text{ou ainda,}\quad \frac{m_o}{n_o} \in (a\,, b)\,, \tag{2.11}$$

onde $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Podemos agora tratar da:

Demonstração do Teorema 2.1.1:

Seja

$$(a\,,b) \subseteq \mathbb{R}$$

um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Do Lema 2.1.4, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$r \doteq \frac{m_o}{n_o} \in (a\,,b)\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad r \in \mathbb{Q} \cap (a\,,b)\,. \tag{2.12}$$

Logo, de (2.12) e da Definição 1.0.1, segue que o conjunto $\mathbb{Q}$, dado por (2.1), é denso em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do Teorema 2.1.1.

$\square$

Como consequência do Teorema 2.1.1 temos o:

Corolário 2.1.1 *Entre dois números reais, podemos encontrar um número racional, ou ainda, se* $a\,,b \in \mathbb{R}$ *satisfazem*

$$a < b\,,$$

podemos encontrar

$$r \in \mathbb{Q} \cap (a\,,b)\,,$$
$$\textit{ou seja,} \quad r \in \mathbb{Q} \quad \textit{e} \quad a < r < b\,. \tag{2.13}$$

Demonstração:

Segue do Lema 2.1.4 que podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\frac{m_o}{n_o} \in (a\,,b)$$

Mas

$$r \doteq \frac{m_o}{n_o} \in \mathbb{Q}\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad r \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad a < r < b\,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Capítulo 3

Densidade do conjunto dos números irracionais em $\mathbb{R}$

Seja

$$\mathbb{I} \doteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \tag{3.1}$$

conjunto formado por todos os números racionais.

Objetivo deste capítulo é mostrar que o conjunto $\mathbb{I}$, é denso em $\mathbb{R}$.

3.1 Resultado principal

O objetivo desta é apresentar a demonstração do:

Teorema 3.1.1 *O conjunto $\mathbb{I}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Para tanto, dividiremos a prova em 3 Lemas.

Começaremos pelo:

Lema 3.1.1 *Sejam $a\,, b \in \mathbb{R}$, tais*

$$a < b\,. \tag{3.2}$$

Então podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{n_o} < b - a\,; \tag{3.3}$$

Demonstração:

Sabemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0\,.$$

Logo, da definição de limite, dado

$$\varepsilon \doteq b - a \overset{(3.2)}{>} 0\,, \tag{3.4}$$

podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\
\text{tenhamos} \quad & \underbrace{\left|\frac{\sqrt{2}}{n} - 0\right|}_{=\frac{\sqrt{2}}{n}} < \varepsilon \overset{(3.2)}{=} b - a\,, \\
\text{ou seja,} \quad & 0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < b - a\,.
\end{aligned}$$

Em particular, tomando-se

$$n = n_o\,,$$

obtemos (3.3), completando a demonstração do resultado.

$\square$

Como consequência temos o:

Lema 3.1.2 *Seja* $n_o \in \mathbb{N}$*, obtido no Lema 3.1.1.*
Então o intervalo

$$\left(\frac{n_o\,a}{\sqrt{2}}, \frac{n_o\,b}{\sqrt{2}}\right)$$

tem comprimento maior que 1.

Demonstração:
Notemos que, do Lema 3.1.1, temos:

$$\begin{aligned}
& 0 < \frac{\sqrt{2}}{n_o} < b - a\,, \\
\text{multiplicando-se (3.3) por } \frac{n_o}{\sqrt{2}} > 0, \text{ obteremos:} \quad & 1 < \frac{n_o\,b}{\sqrt{2}} - \frac{n_o\,a}{\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

ou seja, o intervalo

$$\left(\frac{n_o\,a}{\sqrt{2}}, \frac{n_o\,b}{\sqrt{2}}\right) \tag{3.5}$$

terá comprimento maior que 1, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Com o resultado acima, temos o:

Lema 3.1.3 *Seja* $n_o \in \mathbb{N}$*, obtido no Lema 3.1.1.*
Então podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$*, de modo que*

$$\frac{n_o\,a}{\sqrt{2}} < m_o < \frac{n_o\,b}{\sqrt{2}}\,. \tag{3.6}$$

Em particular, segue que

$$\begin{aligned}
& a < \frac{m_o\sqrt{2}}{n_o} < b\,, \\
\textit{ou ainda,} \quad & \frac{m_o\sqrt{2}}{n_o} \in (a\,, b)\,.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Demonstração:

Pelo Lema 3.1.2 temos que o intervalo (3.5) tem comprimento maior que 1.

Logo, do Lema 2.1.1 (ou seja, (2.2)), podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$m_o \in \left(\frac{n_o\, a}{\sqrt{2}}, \frac{n_o\, b}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\text{ou seja,} \quad \frac{n_o\, a}{\sqrt{2}} < m_o < \frac{n_o\, b}{\sqrt{2}},$$

$$\text{ou ainda,} \quad a < \frac{m_o \sqrt{2}}{n_o} < b,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora tratar da:

Demonstração do Teorema 3.1.1:

Seja

$$(a\,, b) \subseteq \mathbb{R}$$

um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Do Lema 3.1.3, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\frac{m_o \sqrt{2}}{n_o} \in (a\,, b)$$

$$\text{e, do Lema 3.1.4 (ou seja, (3.11)), temos:} \quad \frac{m_o \sqrt{2}}{n_o} \in \mathbb{I}\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \frac{m_o \sqrt{2}}{n_o} \in \mathbb{I} \cap (a\,, b)\,. \tag{3.8}$$

Logo, de (3.8) e da Definição 1.0.1, segue que o conjunto $\mathbb{I}$, dado por (3.1), é denso em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do Teorema 3.1.1.

□

Como consequência do Teorema 3.1.1 temos o:

Corolário 3.1.1 *Entre dois números reais, podemos encontrar um número irracional, ou ainda, se* $a\,, b \in \mathbb{R}$ *satisfazem*

$$a < b\,,$$

podemos encontrar

$$i \in \mathbb{I} \cap (a\,, b)\,,$$

$$\textit{ou seja,} \quad i \in \mathbb{I}\,, \ \textit{tal que} \ \ a < i < b\,. \tag{3.9}$$

Demonstração:

Segue do Lema 3.1.3 que podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\frac{m_o \sqrt{2}}{n_o} \in (a\,, b)\,. \tag{3.10}$$

Mas, pelo Lema 3.1.4 abaixo, temos que

$$i \doteq \frac{m_o\sqrt{2}}{n_o} \in \mathbb{I}\,,$$

que juntamente com (3.10), nos fornece: $\quad i \in \mathbb{I} \cap (a\,,b)\,,$

completando a demonstração do resultado.

□

Para finalizar temos o:

Lema 3.1.4 *Sejam* $n_o \in \mathbb{N}$ *e* $m_o \in \mathbb{Z}$.
Então

$$\frac{\sqrt{2}\,m_o}{n_o} \in \mathbb{I}\,. \tag{3.11}$$

Demonstração:
Suponhamos, por absurdo, que

$$\frac{\sqrt{2}\,m_o}{n_o} \in \mathbb{Q}\,,$$

poderíamos encontrar $k_o \in \mathbb{Z}$ e $l_o \in \mathbb{N}$, de modo que $\quad \dfrac{\sqrt{2}\,m_o}{n_o} = \dfrac{k_o}{l_o}\,,$

ou seja, $\quad \sqrt{2} = \dfrac{\overbrace{k_o\,n_o}^{\in\mathbb{Z}}}{\underbrace{l_o\,m_o}_{\in\mathbb{N}}} \in \mathbb{Q} \quad$ (veja 2.1) ,

que implicaria que $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\,,$

o que seria um absurdo, completando a demonstração.

□

Capítulo 4

Densidade das frações diádicas em $\mathbb{R}$

Seja

$$D_2 \doteq \left\{ \frac{m}{2^n} \, ; \, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^+ \right\} . \tag{4.1}$$

denominado, conjunto das **frações diádicas**.

4.1 Resultado principal

O objetivo deste capítulo é mostrar que o conjunto D_2 é denso em $\mathbb{R}$, como trata

Teorema 4.1.1 *O conjunto formado pelas frações diádicas (ou seja, o conjunto* D_2*, dado por* (4.1)*) é denso em* $\mathbb{R}$.

Para tanto, dividiremos a prova em quatro Lemas.
Começaremos pelo:

Lema 4.1.1 *Sejam* $a \, , b \in \mathbb{R}$, *tais*

$$a < b \, . \tag{4.2}$$

Então podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$0 < \frac{1}{2^{n_o}} < b - a \, ; \tag{4.3}$$

Demonstração:
Sabemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \, .$$

Logo, da definição de limite, dado

$$\varepsilon \doteq b - a \overset{(4.2)}{>} 0 \, , \tag{4.4}$$

podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{tenhamos} \quad & \underbrace{\left|\frac{1}{2^n} - 0\right|}_{=\frac{1}{2^n}} < \varepsilon \overset{(4.4)}{=} b - a\,, \\ \text{ou seja,} \quad & 0 < \frac{1}{2^n} < b - a\,. \end{aligned}$$

Em particular, tomando-se $n = n_o$, obtemos (4.3), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Lema 4.1.2 *Seja $n_o \in \mathbb{N}$, dado pelo Lema 4.1.1.*
Então o intervalo

$$(2^{n_o}\,a\,, 2^{n_o}\,b)$$

tem comprimento maior que 1;

Demonstração:
Notemos que, do Lema 4.1.1 (ou ainda, (4.3)), temos:

$$0 < \frac{1}{2^{n_o}} < b - a\,,$$

multiplicando-se a desigualdade por $2^{n_o} > 0$, obteremos: $1 < 2^{n_o}\,b - 2^{n_o}\,a\,,$

ou seja, o intervalo

$$(2^{n_o}\,a\,, 2^{n_o}\,b)\;, \tag{4.5}$$

terá comprimento maior que 1, completando a demonstração do resultado.

□

Com o resultado acima, temos o:

Lema 4.1.3 *Seja $n_o \in \mathbb{N}$, dado pelo Lema 4.1.1.*
Então podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$2^{n_o}\,a < m_o < 2^{n_o}\,b\,. \tag{4.6}$$

Como consequência teremos

$$a < \frac{m_o}{2^{n_o}} < b\,;$$

Demonstração:
Do Lema 4.1.2, o intervalo (4.5) tem comprimento maior que 1.
Logo, do Lema 2.1.1 , podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\begin{aligned} & m_o \in (2^{n_o}\,a\,, 2^{n_o}\,b) \\ \text{ou seja,} \quad & 2^{n_o}\,a < m_o < 2^{n_o}\,b\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

E assim, temos o:

Lema 4.1.4 *Sejam* $n_o \in \mathbb{N}$ *e* $m_o \in \mathbb{Z}$, *obtidos nos Lemas 4.1.1 e 4.1.3, respectivamente. Então a fração diádica* $\frac{m_o}{2^{n_o}}$, *pertencente ao intervalo* $(a\,,b)$.

Demonstração:

Dos Lemas 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3, temos:

$$2^{n_o}\,a < m_o < 2^{n_o}\,b\,,$$

dividindo-se a desigualdade por $2^{n_o} > 0$, obteremos: $a < \frac{m_o}{2^{n_o}} < b\,,$

ou seja, $\frac{m_o}{2^{n_o}} \in (a\,,b)\,,$

completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora tratar da;

Demonstração do Teorema 4.1.1:

Consideremos $(a\,,b) \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Dos Lemas 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$d \doteq \frac{m_o}{2^{n_o}} \in (a\,,b)\,,$$

que, juntamente com (4.1), implicará em: $d \in D_2 \cap (a\,,b)\,.$ (4.7)

Logo, de (4.7) e da Definição 1.0.1, segue que o conjunto D_2, dado por (4.1), é denso em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do resultado

□

Capítulo 5

Densidade das frações p-diádicas em $\mathbb{R}$

Sejam $p \in \mathbb{N}$ um número primo e

$$D_p \doteq \left\{ \frac{m}{p^n} \, ; \, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^+ \right\} . \tag{5.1}$$

denominado, conjunto das <u>**frações p-ádicas**</u>.

5.1 Resultado principal

O objetivo deste capítulo é mostrar que o conjunto D é denso em $\mathbb{R}$, como trata

Teorema 5.1.1 *O conjunto formado pelas frações* p*-ádicas (ou seja, o conjunto* D_p*, dado por* (5.1)*) é denso em* $\mathbb{R}$*.*

Para tanto, dividiremos a prova em quatro Lemas.
Começaremos pelo:

Lema 5.1.1 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$*, tais*

$$a < b \, . \tag{5.2}$$

Então podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$0 < \frac{1}{p^{n_o}} < b - a \, ; \tag{5.3}$$

<u>**Demonstração:**</u>
Sabemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{p^n} = 0 \, .$$

Logo, da definição de limite, dado

$$\varepsilon \doteq b - a \overset{(5.2)}{>} 0 \, , \tag{5.4}$$

podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{para} \quad & n \geq n_o\,, \\ \text{tenhamos} \quad & \underbrace{\left|\frac{1}{p^n} - 0\right|}_{=\frac{1}{p^n}} < \varepsilon \overset{(5.4)}{=} b - a\,, \\ \text{ou seja,} \quad & 0 < \frac{1}{p^n} < b - a\,. \end{aligned}$$

Em particular, tomando-se $n = n_o$, obtemos (5.3), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Lema 5.1.2 *Seja $n_o \in \mathbb{N}$, dado pelo Lema 5.1.1.*

Então o intervalo

$$(p^{n_o}\, a\,, p^{n_o}\, b)$$

tem comprimento maior que 1;

Demonstração:

Notemos que, do Lema 5.1.1 (ou ainda, (5.3)), temos:

$$\begin{aligned} & 0 < \frac{1}{p^{n_o}} < b - a\,, \\ \text{multiplicando-se a desigualdade por } p^{n_o} > 0\text{, obteremos:} \quad & 1 < p^{n_o}\, b - p^{n_o}\, a\,, \end{aligned}$$

ou seja, o intervalo

$$(p^{n_o}\, a\,, p^{n_o}\, b)\ , \tag{5.5}$$

terá comprimento maior que 1, completando a demonstração do resultado.

□

Com o resultado acima, temos o:

Lema 5.1.3 *Seja $n_o \in \mathbb{N}$, dado pelo Lema 5.1.1.*

Então podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$p^{n_o}\, a < m_o < p^{n_o}\, b\,. \tag{5.6}$$

Como consequência teremos

$$a < \frac{m_o}{p^{n_o}} < b\,;$$

Demonstração:

Do Lema 5.1.2, o intervalo (5.5) tem comprimento maior que 1,.

Logo, do Lema 2.1.1 , podemos encontrar $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$
\begin{aligned}
& m_o \in (p^{n_o}\, a \,, p^{n_o}\, b) \\
\text{ou seja,} \quad & p^{n_o}\, a < m_o < p^{n_o}\, b \,,
\end{aligned}
$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

E assim, temos o:

Lema 5.1.4 *Sejam $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, obtidos nos Lemas 5.1.1 e 5.1.3, respectivamente. Então a fração p-ádica $\dfrac{m_o}{p^{n_o}}$, pertencente ao intervalo $(a\,, b)$.*

Demonstração:

Dos Lemas 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3, temos:

$$
\begin{aligned}
& p^{n_o}\, a < m_o < p^{n_o}\, b \,, \\
\text{dividindo-se a desigualdade por } p^{n_o} > 0, \text{ obteremos:} \quad & a < \frac{m_o}{p^{n_o}} < b \,, \\
\text{ou seja,} \quad & \frac{m_o}{p^{n_o}} \in (a\,, b)\,,
\end{aligned}
$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Podemos agora tratar da;

Demonstração do Teorema 5.1.1:

Consideremos $(a\,, b) \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Dos Lemas 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ e $m_o \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$
\begin{aligned}
& P \doteq \frac{m_o}{p^{n_o}} \in (a\,, b)\,, \\
\text{que, juntamente com (5.1), implicará em:} \quad & P \in D_p \cap (a\,, b),. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

Logo, de (5.7) e da Definição 1.0.1, segue que o conjunto D_p, dado por (5.1), é denso em $\mathbb{R}$, completando a demonstração do resultaldo.

$\square$

$\boxed{\textbf{F I M}}$